DEVOIR MAISON 7 : CENTRALE PC 2009 M1

PSI 1 2024/2025 **pour le vendredi 29 novembre 2024**

PARTIE 1 : ÉTUDE D'UN EXEMPLE

1.1 Si $x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{xn!}$ car $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $k+x \geqslant k$. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge par comparaison à la série exponentielle (ou avec le critère de d'Alembert car $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \dfrac{1}{n+1+x}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 0 < 1$).

On en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (vers S) et $\boxed{S \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$

1.2 Continuité

1.2.1 Si $x \geqslant a > 0$, on a $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant f_n(a)$ car f_n est clairement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f_n est bornée sur $[a;+\infty[$ et $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant f_n(a)$ (en fait on a même égalité car $a \in [a;+\infty[$). Comme $a > 0$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(a)$ converge d'après 1.1. On en déduit que $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge normalement sur } [a;+\infty[\text{ si } a > 0.}$

1.2.2 On applique le théorème de continuité des séries de fonctions :

(H_1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (fraction rationnelle).

(H_2) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ (car $[a;b] \subset [a;+\infty[$).

On en déduit que $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$ Pour la limite en $+\infty$, appliquons le théorème de double limite :

(H_1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \ell_n = 0$.

(H_2) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[1;+\infty[$ d'après 1.2.1.

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 0.}$ On pouvait aussi réutiliser la majoration de la question 1.1 car $\forall x > 0$, $0 \leqslant S(x) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{xn!} = \dfrac{1}{ex}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{ex} = 0$, par encadrement, on retrouve $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

1.3 Toutes les fonctions f_n sont décroissantes donc, comme la monotonie se conserve par convergence simple, $\boxed{S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$ Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \geqslant 0$, on a $\forall x > 0$, $S(x) \geqslant f_0(x) = \dfrac{1}{x}$ donc, comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, on déduit par encadrement que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} S(x) = +\infty.}$

1.4 Si $x > 0$, $xS(x) - S(x+1) = xf_0(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+p)}$ en posant $p = n+1$, donc on obtient $\boxed{xS(x) - S(x+1) = xf_0(x) = 1.}$ Comme S est continue en 1, $\lim\limits_{x\to 0^+} xS(x) = 1 + S(1)$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} xS(x) = e$ car $S(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)!} = e - 1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x+1) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} xS(x) = 1$. Ainsi, $\boxed{S(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{e}{x} \text{ et } S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}.}$

1.5 Voir la décroissance et les limites de S en 0^+ et en $+\infty$ sur ce graphe.

1.6 Expression intégrale

1.6.1 Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction θ_n est continue sur $[0;1[$ et $\theta_n(t) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{(1-t)^{1-x}}$ avec $1-x<1$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, la fonction θ_n est intégrable sur $[0;1[$.

1.6.2 Pour $n \in \mathbb{N}$, $u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto -\dfrac{(1-t)^x}{x}$ sont de classe C^1 sur $[0;1[$ et $\lim\limits_{t\to 1} u(t)v(t) = 0$ car $x>0$ donc $I_n(x) = \left[t^n \times \dfrac{-(1-t)^x}{x}\right]_0^1 + \dfrac{n}{x}\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^x dt = \dfrac{n}{x} I_{n-1}(x+1)$. Par une récurrence simple que $I_n(x) = \dfrac{n}{x} I_{n-1}(x+1) = \cdots = \dfrac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} I_0(x+n)$ et $I_0(x+n) = \dfrac{1}{x+n}$ donc $\boxed{I_n(x) = n! f_n(x).}$

1.6.3 Pour $t \in [0;1[$, $F(t) = e^t(1-t)^{x-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{x-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ si on pose $u_n(t) = \dfrac{1}{n!} t^n (1-t)^{x-1}$.
On va appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

- (H_1) $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $[0;1[$ vers F (série exponentielle).
- (H_2) Toutes les fonctions u_n sont continues et intégrables sur $[0;1[$ d'après 1.6.1 car $u_n = \dfrac{1}{n!}\theta_n$.
- (H_3) La fonction F est continue sur $[0;1[$ par opérations.
- (H_4) $\displaystyle\int_0^1 |u_n(t)| dt = \frac{1}{n!}\int_0^1 \theta_n(t) dt = f_n(x)$ d'après 1.6.2 et $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge d'après 1.1 car $x>0$.

Ainsi, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} I_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ donc $\boxed{S(x) = \displaystyle\int_0^1 e^t(1-t)^{x-1} dt \text{ pour } x>0.}$

PARTIE 2 : SÉRIES FACTORIELLES

2.1 Une limite

2.1.1 On a $\dfrac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)} = \dfrac{n(n+1)^x}{(x+n)n^x}$ donc $\ln\left(\dfrac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right) = -\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) + x\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'où $\ln\left(\dfrac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right) \underset{+\infty}{=} -\dfrac{x}{n} + \dfrac{x}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc, par comparaison aux séries de Riemann, on peut conclure que la série $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(\dfrac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right) \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

2.1.2 La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left[\ln(w_{n+1}(x)) - \ln(w_n(x))\right]$ converge d'après 2.1.1 donc, par dualité suite-série, la suite $(\ln(w_n(x)))_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel $c(x)$ et, par continuité de l'exponentielle, comme $w_n(x) = \exp(\ln(w_n(x)))$,
$\boxed{\text{la suite } (w_n(x))_{n\geqslant 0} = \left(\dfrac{u_n(x)}{v_n(x)}\right)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } \ell(x) = e^{c(x)} > 0.}$

2.2 On a $|a_n u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \ell(x)|a_n v_n(x)|$ (positives) d'après 2.1.2 donc, par comparaison de séries à termes positifs, comme $\ell(x) \neq 0$, $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n u_n(x) \text{ est absolument convergente} \iff \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n v_n(x) \text{ est absolument convergente.}}$

2.3 **Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{A}$**

2.3.1 On applique le théorème de continuité des séries de fonctions :

(H_1) Pour $n \geqslant 0$, la fonction $a_n u_n : x \mapsto a_n u_n(x)$ est continue sur $]0;+\infty[$ (c'est une fraction rationnelle).

(H_2) Si $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$ avec $0 < a < b$ et $x \in [a;b]$, on a $|a_n u_n(x)| \leqslant |a_n| u_n(a)$ car u_n est une fonction positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a donc $||a_n u_n||_{\infty,[a;b]} \leqslant |a_n| u_n(a)$ donc la convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n u_n(a)$ justifie la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n u_n$ sur le segment $[a;b]$. Ainsi, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que $\boxed{f_a \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2.3.2 On applique cette fois le théorème de double limite :

(H_1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n u_n(x) = \ell_n = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} [x(x+1)\cdots(x+n)] = +\infty$.

(H_2) Si $x \geqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n u_n(x)| \leqslant |a_n| u_n(1)$ donc $||a_n u_n||_{\infty,[1;+\infty[} \leqslant |a_n| u_n(1)$, donc, comme à la question précédente, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n u_n$ converge normalement sur $[1;+\infty[$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ donc que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = 0.}$

2.4 **Exemples**

2.4.1 D'après la question 1.1, la suite $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de } \mathcal{A}.}$

2.4.2 D'après la question 2.2, une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$ est donc une suite telle que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{(n+1)^x}$ est absolument convergente pour tout $x > 0$. Si on choisit $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$ alors la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^x}$ ne converge (absolument) que pour $x > 1$ (donc pas pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$) donc $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}} \notin \mathcal{A}.}$

2.5 **Soit a un élément de $\mathcal{A}$**

2.5.1 Comme $\alpha > 0$, on a $\ln(n) \underset{+\infty}{=} o\left((n+1)^{\frac{\alpha}{2}}\right)$ puis $a_n \dfrac{\ln(n)}{(n+1)^\alpha} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{|a_n|}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$. Par comparaison, $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \dfrac{\ln(n)}{(n+1)^\alpha} \text{ est absolument convergente}}$ puisque $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{|a_n|}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}}}$ converge d'après 2.2 car $\dfrac{\alpha}{2} > 0$.

2.5.2 Comme u_n est une fraction rationnelle, elle est de classe C^1 sur son domaine de définition donc sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\ln(u_n(x)) = \ln(n!) - \sum\limits_{n=0}^{n} \ln(x+k)$ donc, en dérivant, on obtient $\dfrac{u_n'(x)}{u_n(x)} = -\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x+k} = -\dfrac{1}{x} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x+k}$. Il suffit donc de prouver que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x+k} \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{n}{x}\right)$. Pour $x > 0$ et $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x+k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{dt}{x+t}$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x+k} \leqslant \displaystyle\int_0^n \dfrac{dt}{x+t} = \Big[\ln(x+t)\Big]_0^n = \ln\left(\dfrac{x+n}{x}\right)$ et on a bien $\boxed{\left|\dfrac{u_n'(x)}{u_n(x)}\right| \leqslant \dfrac{1}{x} + \ln\left(1 + \dfrac{n}{x}\right).}$

2.5.3 On applique le théorème de dérivation :

(H_1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $a_n u_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) La série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ par définition de $\mathcal{A}$.

(H_3) Si $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$ avec $0 < a < b$ et $x \in [a;b]$, on a $|a_n u_n'(x)| \leqslant |a_n| u_n(a) \left(\dfrac{1}{a} + \ln\left(1 + \dfrac{n}{a}\right)\right)$ donc $||a_n u_n'||_{\infty,[a;b]} \leqslant |a_n| u_n(a) \left(\dfrac{1}{a} + \ln\left(1 + \dfrac{n}{a}\right)\right) = \alpha_n$. Puis on a $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} |a_n| u_n(a) \ln\left(1 + \dfrac{n}{a}\right)$ ce qui montre que $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} |a_n| u_n(a) \ln(n)$ car $\ln\left(1 + \dfrac{n}{a}\right) = \ln(n) + \ln\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \ln(n) + o(\ln(n))$. D'après 2.2 et par comparaison, $\sum\limits_{n \geqslant 0} \alpha_n$ converge si et seulement si $\sum\limits_{n \geqslant 0} |a_n| \dfrac{\ln(n)}{(n+1)^a}$ converge, ce qui est le cas d'après la question 2.5.1 puisque $a > 0$. On en déduit donc que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n u_n'$ converge normalement sur $[a;b]$ donc sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

On a donc $\boxed{f_a \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \text{ et } f_a'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n u_n'(x) \text{ si } x > 0.}$

PARTIE 3 : REPRÉSENTATION INTÉGRALE

3.1 D'après 2.2, $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{a_n}{(n+1)^2}$ est absolument convergente et comme, pour $x \in [0;1[$, $a_n x^n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{a_n}{(n+1)^2}\right)$. Le théorème de comparaison donne $\boxed{\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n \text{ est absolument convergente pour } x \in [0;1[.}$ *On vient en fait de justifier que le rayon de convergence de la série entière* $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ *est supérieur ou égal à* 1.

3.2 Soit $a \in]0;1[$ et $x \in [0;a]$, avec $h_n : x \mapsto a_n x^n$, $|h_n(x)| \leqslant |a_n| a^n$ donc $||h_n||_{\infty,[0;a]} = |h_n(a)| = |a_n| a^n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n a^n$ converge absolument d'après 3.1 donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} h_n$ converge normalement sur $[0;a]$ donc sur tout segment de $[0;1[$. Comme toutes les h_n sont polynomiales donc continues, $\boxed{\Phi_a \text{ est continue sur } [0;1[.}$

3.3 Soit $x > 0$ fixé, on définit $g_n : [0;1[\to \mathbb{R}$ par $g_n(y) = a_n(1-y)^{1-x} y^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

(H_1) Si $y \in [0;1[$ alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(y) = (1-y)^{x-1} \Phi_a(y)$ d'après 3.1 et définition de Φ_a donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $[0;1[$ vers la fonction $y \mapsto (1-y)^{x-1} \Phi_a(y)$.

(H_2) Les fonctions g_n et $y \mapsto (1-y)^{x-1} \Phi_a(y)$ sont continues sur $[0;1[$ car Φ_a est continue sur $[0;1[$.

(H_3) Les fonctions g_n sont intégrables sur $[0;1[$ d'après 1.6.1.

(H_4) On a $\displaystyle\int_0^1 |g_n(y)| dy = |a_n| \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n dy = |a_n| u_n(x)$ d'après 1.6.1 et comme $(a_n) \in \mathcal{A}$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n u_n(x)$ est absolument convergente donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} \displaystyle\int_0^1 |g_n(y)| dy$ converge.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $y \mapsto (1-y)^{x-1} \Phi_a(y)$ est intégrable sur $[0;1[$ si $x > 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 (1-y)^{x-1} \Phi_a(y) dy$ existe si $x > 0$ et $\boxed{\displaystyle\int_0^1 (1-y)^{x-1} \Phi_a(y) dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(y) dy = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x) = f_a(x).}$