DEVOIR 12 : RÉDUCTION

PSI 1 2024-2025 **mardi 03 décembre 2024**

QCM

1 *Éléments propres d'une matrice : soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

1.1 $\text{card}\,(\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)) \leqslant n$

1.2 $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$

1.3 $(A$ et B semblables$) \Longleftarrow (\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B))$

1.4 $(A$ et B semblables$) \Longrightarrow (\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B))$

2 *Polynôme caractéristique : soit* $n \geqslant 2$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $P \in \mathbb{R}[X]$

2.1 $P(A) = 0 \Longrightarrow \chi_A$ divise P

2.2 $P(A) = 0 \Longleftarrow \chi_A$ divise P

2.3 n pair $\Longrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A))$

2.4 n impair $\Longrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A))$

3 Cayley-Hamilton *: soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* P *un polynôme unitaire de degré* n

3.1 Si $P(A) = 0$ alors $P = \chi_A$

3.2 $\chi_A(A) = 0$

3.3 A nilpotent $\Longleftrightarrow \chi_A = X^n$

3.4 $A = I_n \Longleftrightarrow \chi_A = (X-1)^n$

4 *Multiplicités : soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda\, \text{id}_E)$ *et* $m_\lambda(u)$ *l'ordre de multiplicité algébrique de* λ *(l'ordre de multiplicité de* λ *dans* χ_u*)*

4.1 $1 \leqslant m_\lambda(u) \leqslant \dim(E_\lambda(u))$

4.2 $m_\lambda(u) = 1 \Longrightarrow E_\lambda(u)$ est une droite

4.3 $\lambda \in \text{Sp}(u) \Longleftrightarrow m_\lambda(u) \geqslant 1$

4.4 $\lambda \in \text{Sp}(u) \Longleftrightarrow \dim(E_\lambda(u)) \geqslant 1$

Énoncé Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donner une version développée de χ_A qui spécifie son degré et trois de ses coefficients en fonction de $\text{tr}(A)$ et $\det(A)$.

Preuve Soit $n \geqslant 1$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose A et B semblables, montrer que $\chi_A = \chi_B = \chi_{A^\mathsf{T}}$.

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Calculer $\chi_A(X)$. En déduire $\text{Sp}(A)$.

b. Déterminer des bases de chaque sous-espace propre.

Exercice 2 Soit $n \geqslant 2$ et la matrice $A_n = (a_{i,j})_{1,\leqslant i,j \leqslant 2n} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 1$ si $i + j$ est pair et $a_{i,j} = 0$ sinon. Par exemple $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le rang de A_n. En déduire une valeur propre λ de A_n.

b. Trouver une autre valeur propre μ_n de A_n et montrer que $\dim(E_{\mu_n}) \geqslant 2$.

c. En déduire une base de $\mathbb{R}^{2n}$ formée de vecteurs propres de A_n.

DEVOIR 12 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne $\mathtt{i}$ colonne $\mathtt{j}$ revient à déclarer la question $\mathtt{i}.\mathtt{j}$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 12	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X			X	
2		X		X	
3		X	X		
4		X	X	X	

1.1 Vrai : les valeurs propres de A sont les racines de χ_A de degré n **1.2** Faux : $A = E_{2,1} - E_{1,2}$ n'a pas de valeur propre réelle **1.3** Faux : $A = 0$ et $B = E_{1,2}$ **1.4** Vrai : on a vu que $\chi_A = \chi_B$.
2.1 Faux : $A = I_n$ et $P = X - 1$ et $\chi_A = (X-1)^n$ **2.2** Vrai : si $P = Q\chi_A$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors, par CAYLEY-HAMILTON, $P(A) = Q(A)\chi_A(A) = 0$ **2.3** Faux : $A = I_{2n}$ vérifie $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1\}$ **2.4** Vrai : χ_A est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \chi_A(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} \chi_A(t) = -\infty$ et TVI.
3.1 Faux : si $A = I_n$ et $P = X^{n-1}(X-1)$ par exemple **3.2** Vrai : théorème **3.3** Vrai : A nilpotente ne peut avoir que 0 comme valeur propre complexe **3.4** Faux : $A = I_n + E_{2,1}$ vérifie $\chi_A = (X-1)^n$.
4.1 Faux : c'est $1 \leqslant \dim(E_\lambda(u)) \leqslant m_\lambda(u)$ **4.2** Vrai : car alors $1 \leqslant \dim(E_\lambda(u)) \leqslant 1$ **4.3** Vrai : car on a dans ce cas λ racine de χ_u donc valeur propre **4.4** Vrai : car on a dans ce cas $E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$ donc λ valeur propre.

Énoncé Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.

Preuve Par définition, on a l'existence d'une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Comme le déterminant d'une matrice carrée est égal à celui de sa transposée et que le déterminant d'un produit de matrices carrées est égal au produit des déterminants de ces matrices :

- $\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = \det(XPP^{-1} - PBP^{-1}) = \det\big(P(XI_n - A)P^{-1}\big) = \det(P)\det(XI_n - B)\det(P^{-1}) = \chi_B(X)$.
- $\chi_{A^T}(X) = \det(XI_n - A^T) = \det((XI_n - A)^T) = \det(XI_n - A) = \chi_A(X)$.

Exercice 1 **a.** $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+1 & -2 & -2 \\ -1 & X & 0 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} X+1 & -2 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ en développant selon la seconde ligne. Les racines de χ_A étant les valeurs propres de A : $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, -1\}$.
b. Comme les valeurs propres sont toutes simples, on en déduit que les sous-espaces propres sont des droites. On <u>constate</u> que si on pose $v_1 = (0, 1, -1)$, on a $Av_1 = 0$ (en identifiant le vecteur $v_1 \in \mathbb{R}^3$ et son vecteur colonne canoniquement associé). De même, en posant $v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, -1, 1)$, on a $Av_2 = v_2$ et $Av_3 = -v_3$. Ainsi : $E_0(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$ et $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(v_3)$. Ces droites étant en somme directe, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. A est diagonalisable et on a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$. On aurait bien sûr pu résoudre les systèmes (avec X vecteur colonne) $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = -X$.

Exercice 2 **a.** Clairement $\mathrm{rg}(A_n) = 2$ car les colonnes C_1 et C_2 sont indépendantes et toutes les suivantes sont égales à C_1 ou C_2. Comme $2n > 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(A_n)) = 2n - 2 > 0$ par la formule du rang donc $\lambda = 0 \in \mathrm{Sp}(A_n)$.
b. On trouve les autres vecteurs propres (à part ceux du noyau) dans $\mathrm{Im}(A_n) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$, or $A_nC_1 = nC_1$ et $A_nC_2 = nC_2$ donc $\mathrm{Vect}(C_1, C_2) \subset \mathrm{Ker}(A_n - nI_{2n})$. Ainsi, $\mu_n = n \in \mathrm{Sp}(A_n)$ et $\dim(E_{\mu_n}(A_n)) \geqslant 2$.
c. Comme $\mu_n = n \neq 0 = \lambda$, $\dim(E_0(A_n)) + \dim(E_n(A_n)) = \dim(E_0(A_n) \oplus E_{\mu_n}(A_n)) \geqslant 2n$ car $E_0(A_n)$ et $E_n(A_n)$ sont en somme directe. Or $E_0(A_n) \oplus E_{\mu_n}(A_n) \subset \mathbb{R}^{2n}$ donc, par inclusion et égalité des dimensions, $\mathbb{R}^{2n} = E_0(A_n) \oplus E_{\mu_n}(A_n)$ et $\dim(E_n(A_n)) = 2$.
Comme $(e_1 - e_3, e_1 - e_5, \cdots, e_1 - e_{2n-1}, e_2 - e_4, e_2 - e_6, \cdots, e_2 - e_{2n})$ est une base de $E_0(A_n)$ et (C_1, C_2) est une base de $E_n(A_n)$ avec $C_1 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} e_{2k+1}$ et $C_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} e_{2k}$, en concaténant, on conclut que la famille $\mathcal{B} = (e_1 - e_3, \cdots, e_1 - e_{2n-1}, e_2 - e_4, \cdots, e_2 - e_{2n}, C_1, C_2)$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$.