DEVOIR MAISON 4:MINES PSI 2015 MATHS1

PSI 1 2024/2025 **pour le mardi 05 novembre 2024**

PARTIE 1 : PRÉLIMINAIRES

1 Comme on connaît le développement en série entière de la fonction exponentielle, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda$. Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c\lambda^n}{n!} = ce^\lambda$ et l'unique choix de $c \in \mathbb{R}$ qui permette $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{c\lambda^n}{n!} \geqslant 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, c'est-à-dire $\left(c\frac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{P}$, est le choix $\boxed{c = e^{-\lambda}.}$

2 On note tout d'abord que $P = (1-p, p, 0, \dots)$ et $Q = (1-q, q, 0, \dots)$ sont bien des éléments de $\mathcal{P}$ car $(p, 1-p, q, 1-q) \in (\mathbb{R}_+)^4$ et $p + (1-p) = q + (1-q) = 1$. Ainsi, la quantité $\mathrm{dist}(P, Q)$ est bien définie. Soit une partie A de $\mathbb{N}$. Distinguons les trois cas suivants :

- Si $A \cap \{0, 1\} = \emptyset$, alors $|P(A) - Q(A)| = |0 - 0| = 0$.
- Si $A \cap \{0, 1\} = \{0\}$ ou $A \cap \{0, 1\} = \{1\}$, alors $|P(A) - Q(A)| = |1 - p - (1 - q)| = |p - q|$.
- Si $A \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}$, alors $|P(A) - Q(A)| = |1 - 1| = 0$.

Par conséquent, $\forall A \subset \mathbb{N},\ |P(A) - Q(A)| \leqslant |p - q|$ et cette valeur est atteinte en prenant la partie $A = \{0\}$ par exemple. Ainsi, $\boxed{\mathrm{dist}(P, Q) = \underset{A\subset\mathbb{N}}{\mathrm{Max}}\, |P(A) - Q(A)| = |p - q|.}$

3 Pour $f \in \mathcal{F}$, on choisit de noter $||f||_\infty = \mathrm{Sup}\{|f(n)| \mid n \in \mathbb{N}\}$ (qui existe puisque f est bornée). On a alors, pour $f \in \mathcal{F}$ et $P \in \mathcal{P}$, l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(n)p_n| \leqslant ||f||_\infty p_n$. Or la série $\sum_{n\geqslant 0} ||f||_\infty p_n$ converge puisque $P \in \mathcal{P}$ donc, par comparaison, $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)p_n \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

PARTIE 2 : CARACTÉRISATION

4 Soit $f \in \mathcal{F}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |nf(n)p_n^{(\lambda)}| \leqslant ne^{-\lambda}||f||_\infty \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda}||f||_\infty \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ par définition de P_λ et puisque f est bornée. Comme la série exponentielle $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ converge (sa somme est e^λ comme ci-dessus), par comparaison, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} nf(n)p_n^{(\lambda)} \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

5 Comme ci-dessus, puisque $nf(n)p_n^{(\lambda)} = 0$ pour $n = 0$ et que $nf(n)p_n^{(\lambda)} = (\lambda e^{-\lambda})f(n)\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=1}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=1}^{+\infty} nf(n)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = (\lambda e^{-\lambda}) \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On effectue un changement d'indice ($k = n - 1$) dans la dernière somme pour obtenir, pour $f \in \mathcal{F}$, la relation suivante : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} f(k+1)\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)p_n^{(\lambda)} \quad (1).}$

6 Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $f_k \in \mathcal{F}$ telle que $f_k(k) = 1$ et $\forall n \neq k,\ f_k(n) = 0$, c'est-à-dire $f_k = \mathbf{1}_{\{k\}}$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ f_k(n) = \delta_{k,n}$ (symbole de KRONECKER). En appliquant (1) à f_k pour $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient $kq_k = \lambda q_{k-1}$ car $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\delta_{k,n}p_n^{(\lambda)} = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \delta_{k,n+1}p_n^{(\lambda)}$. Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ q_k = \dfrac{\lambda^k}{k!}q_0$.

- Initialisation : c'est immédiat pour $k = 0$ ($q_0 = q_0$).
- Hérédité : soit $k \geqslant 1$ tel que $q_{k-1} = \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}q_0$. Alors, $q_k = \dfrac{\lambda}{k}q_{k-1} = \dfrac{\lambda}{k}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}q_0 = \dfrac{\lambda^k}{k!}q_0$.

Par principe de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N},\ q_k = \dfrac{\lambda^k}{k!}q_0$. Puisque $Q \in \mathcal{P}$, $q_0 = e^{-\lambda}$ avec la question 1 : $\boxed{Q = \mathcal{P}_\lambda.}$

PARTIE 3 : RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE STEIN

7 Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. On peut définir par récurrence une fonction $f_a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (c'est-à-dire une suite réelle) en posant $f_a(0) = a$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $f_a(n+1) = \dfrac{1}{\lambda}\big(nf_a(n) + \tilde{h}(n)\big)$ en exploitant la relation (2) ce qui prouve que $f_a \in \mathcal{S}_h$. Si $a \neq b$, $f_a \neq f_b$ car $f_a(0) = a \neq b = f_b(0)$: on a donc prouvé qu' $\boxed{\text{il existe une infinité d'éléments de } \mathcal{S}_h.}$ Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}_h$, posons $a = f(0)$, alors puisque f et f_a vérifie la même relation de récurrence (2) et ont le même terme initial $f(0) = f_a(0) = a$, on montre facilement par récurrence que $f = f_a$. On a donc établi que $\boxed{\mathcal{S}_h = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}.}$

Soit $f \in \mathcal{S}_h$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $f(n) = \dfrac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

- Initialisation : pour $n = 1$, la relation (3) se résume à $\lambda f(1) = \tilde{h}(0)$ et elle est bien vérifiée puisque quand on prend $n = 0$ dans la relation (2), $\lambda f(1) = h(0) - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} h(k)p_k^{(\lambda)} = \tilde{h}(0)$ par définition de $\tilde{h}$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $f(n) = \dfrac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!}$. La relation (2) donne alors $\lambda f(n+1) = nf(n) + \tilde{h}(n) = \dfrac{n!}{\lambda^n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!} + \dfrac{n!}{\lambda^n}\tilde{h}(n)\dfrac{\lambda^n}{n!} = \dfrac{n!}{\lambda^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!}$, ce qui prouve, en divisant par λ, le résultat au rang $n+1$, à savoir $f(n+1) = \dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{n}\tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Par principe de récurrence, on conclut que $\boxed{\forall f \in \mathcal{S}_h,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = \dfrac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!} \quad (3).}$

8 Comme h est bornée, $h(k)p_k^{(\lambda)} \underset{+\infty}{=} O(p_k^{(\lambda)})$. Par comparaison, $\sum\limits_{k\geqslant 0} h(k)p_k^{(\lambda)}$ converge. On pose $\ell_h = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} h(k)p_k^{(\lambda)}$ donc, par définition de $\tilde{h}$, $\tilde{h}(n) = h(n) - \ell_h$. On a aussi $\ell_h = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} h(k)\dfrac{\lambda^k}{k!}$ par définition de $\mathcal{P}_\lambda$. Ainsi, $\tilde{h}$ étant bornée (somme d'une fonction bornée et d'une constante), $\sum\limits_{k\geqslant 0}\tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!}$ converge et on en déduit que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} h(k)\dfrac{\lambda^k}{k!} - \ell_h\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda\ell_h - \ell_h e^\lambda = 0$.

Soit $f \in \mathcal{S}_h$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que $f(n) = \dfrac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!}$ d'après la question 7. Or, d'après ce qui précède, on a aussi $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!} + \sum\limits_{k=n}^{+\infty}\tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!} = 0$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!} = -\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!}$. En reportant dans l'expression de $f(n)$, on a bien $\boxed{\forall f \in \mathcal{S}_h,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = -\dfrac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!} \qquad (4).}$

9 Si $f \in \mathcal{S}_h$, d'après la question précédente et comme $\tilde{h}$ est bornée, la série $\sum_{k \geqslant n} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}$ converge absolument (série exponentielle), donc $\forall n \geqslant 1,\ |f(n)| \leqslant ||\tilde{h}||_\infty \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ par inégalité triangulaire. Le changement d'indice $j = k - n$ donne la nouvelle majoration $\forall n \geqslant 1,\ |f(n)| \leqslant \frac{||\tilde{h}||_\infty}{n} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{n!\lambda^j}{(j+n)!}$. En remarquant que $\frac{n!}{(j+n)!} = \frac{1}{(n+1)\dots(n+j)} \leqslant \frac{1}{(0+1)\dots(0+j)} = \frac{1}{j!}$, on en déduit que, comme $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^\lambda$, que

$$\forall n \geqslant 1,\ |f(n)| \leqslant \frac{||\tilde{h}||_\infty}{n} e^\lambda \leqslant ||\tilde{h}||_\infty e^\lambda.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est bornée avec la borne effective } ||f||_\infty \leqslant \operatorname{Max}\left(|f(0)|, ||\tilde{h}||_\infty e^\lambda\right).}$ On a même $\lim_{n \to +\infty} f(n) = 0$.

PARTIE 4 : PROPRIÉTÉ DE LIPSCHITZ

10 Comme à la question 8, $\ell_h = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) p_k^{(\lambda)}$. Or $\ell_h = p_m^{(\lambda)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ car $h = \mathbf{1}_{\{m\}}$, d'où $\tilde{h}(k) = h(k) - p_m^{(\lambda)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En reprenant la formule (3), il vient $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} h(k)\frac{\lambda^k}{k!} - p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}\right)$.

Si $n \leqslant m$, la première somme ci-dessus est nulle donc $\boxed{\forall n \in [\![1; m]\!],\ f_m(n) = -\frac{(n-1)!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}.}$

11 En utilisant cette fois-ci la relation (4), $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} h(k)\frac{\lambda^k}{k!} - p_m^{(\lambda)} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right)$. Si $n > m$, tous les termes de la première somme sont nuls et ainsi $\boxed{\forall n > m,\ f_m(n) = \frac{(n-1)!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.}$

On en déduit immédiatement avec la question 10 que $\boxed{\forall n \in [\![1; m]\!],\ f_m(n) \leqslant 0 \text{ et } \forall n \geqslant m+1,\ f_m(n) \geqslant 0.}$

12 Par définition, on a $\Delta f_m(n) = f_m(n+1) - f_m(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Distinguons deux cas :

- Si $n \in [\![1; m-1]\!]$, avec la formule de la question 10 pour $f_m(n+1)$ et $f_m(n)$ car $n \leqslant m$ et $n+1 \leqslant m$, on a $\Delta f_m(n) = -\frac{n!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{(n-1)!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{(n-1)!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^{n+1}}\left[(\lambda - n)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}\right) - \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\right]$.
  Pour montrer que cette quantité est négative, on montre que le crochet est négatif, c'est-à-dire aussi que $\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \leqslant \frac{\lambda^n}{(n-1)!} + n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}$, ce qui revient à dire (changement d'indice à gauche et regroupement des termes à droite) que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \leqslant n \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$. Nous montrons maintenant que cette inégalité a bien lieu en remarquant que $\frac{n}{k!} \geqslant \frac{1}{(k-1)!}$ pour $k \in [\![1; n]\!]$ et que donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \leqslant n \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \leqslant n \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$.
- Si $n > m$, on utilise cette fois la formule de la question 11 pour les deux termes $f_m(n+1)$ et $f_m(n)$ car $n > m$ et $n+1 > m$ et on obtient $\Delta f_m(n) = \frac{(n-1)!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^{n+1}}\left[(n-\lambda)\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right) - \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\right]$. Pour montrer que cette quantité est négative, il suffit de montrer que le crochet est négatif, c'est-à-dire aussi que $n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \leqslant \lambda \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}$. Ceci est vrai car $\frac{n}{k!} \leqslant \frac{1}{(k-1)!}$ quand $k \geqslant n$.

On a finalement prouvé que $\boxed{\forall n \notin \{0, m\},\ \Delta f_m(n) \leqslant 0.}$

13 Par définition, $\Delta f_0(0) = f_0(1) - f_0(0)$. Or, comme $1 \in \mathbb{N}^*$, $f_0(1)$ s'obtient avec la question 11 et vaut $\dfrac{0!p_0^{(\lambda)}}{\lambda^1} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} = \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^\lambda - 1)$. Ainsi, $\boxed{\Delta f_0(0) = \dfrac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} - f_0(0)}$ (erreur d'énoncé dans l'énoncé originel).

Pour $m > 0$, $\Delta f_m(m) = f_m(m+1) - f_m(m)$. D'après la question 11, $f_m(m+1) = \dfrac{m!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^{m+1}} \displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ et d'après la question 10, $f_m(m) = -\dfrac{(m-1)!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ d'où $\Delta f_m(m) = \dfrac{m!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^{m+1}} \displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} + \dfrac{(m-1)!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \dfrac{\lambda^k}{k!}$. Comme $\dfrac{m!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^{m+1}} = \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda}$, ceci donne $\Delta f_m(m) = \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} + \dfrac{\lambda}{m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \dfrac{\lambda^k}{k!}\right)$. Il suffit de faire rentrer $\dfrac{\lambda}{m}$ et de changer d'indice pour conclure que $\boxed{\Delta f_m(m) = \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m} \dfrac{k}{m}\dfrac{\lambda^k}{k!}\right) \text{ avec } m > 0.}$

14 Comme la seconde relation de la question précédente ne vaut que si $m > 0$, on distingue deux cas :

- Si $m = 0$, la question 12 montre que Δf_m est négative sur $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{n\geqslant 1} \Delta f_0(n) \leqslant 0 \leqslant \dfrac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$.
- Si $m > 0$, les questions 12 et 13 montrent que $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{n\geqslant 1} \Delta f_m(n) = \Delta f_m(m)$ car si $n \neq m$, $\Delta f_m(n) \leqslant 0$ et $\Delta f_m(m) > 0$. Or, en majorant $\forall k \in [\![1; m]\!]$, $\dfrac{k}{m} \leqslant 1$ ci-dessus, on majore avec la question 13, $\Delta f_m(m) \leqslant \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m} \dfrac{\lambda^k}{k!}\right) = \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} = \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^\lambda - 1) = \dfrac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$.

Ainsi, que m soit nul ou strictement positif, on a $\boxed{\displaystyle\operatorname*{Sup}_{n\geqslant 1} \Delta f_m(n) \leqslant \dfrac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.}$

15 Soit $c \in \mathbb{R}$ et $g = h + c$ de sorte que $g \in \mathcal{F}$ car g est aussi bornée. On a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la relation $\tilde{g}(n) = g(n) - \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g(k)p_k^{(\lambda)} = (h(n) + c) - \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)p_k^{(\lambda)} - c \sum_{k=0}^{+\infty} p_k^{(\lambda)}$, ce qui montre, comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k^{(\lambda)} = 1$, que $\tilde{g}(n) = h(n) + c - c - \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} h(k)p_k^{(\lambda)} = \tilde{h}(n)$. D'après ce qui précède et les formules (3), les valeurs sur $\mathbb{N}^*$ des éléments de $\mathcal{S}_h$ et de $\mathcal{S}_g$ sont égales. Comme les valeurs en 0 ne changent pas l'appartenance à $\mathcal{S}_h$ ou à $\mathcal{S}_g$, ces deux ensembles sont donc égaux. En prenant $c = -\displaystyle\operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} h(k)$ qui existe car h est bornée, $\boxed{\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{h^+}.}$

16 Soit $n \geqslant 1$ fixé. Avec la question 10, dès que $m \geqslant n$, on a $f_m(n) = A_n p_m^{(\lambda)}$ en notant $A_n = -\dfrac{(n-1)!}{\lambda^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ (qui ne dépend bien que de n). Comme la fonction h_+ est bornée, on a $h_+(m)f_m(n) \underset{+\infty}{=} O\big(p_m^{(\lambda)}\big)$ et, comme la série $\displaystyle\sum_{m\geqslant 0} p_m^{(\lambda)}$ converge, par théorème de comparaison, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{m\geqslant 0} h_+(m)f_m(n) \text{ est convergente.}}$

17 Comme $\displaystyle\sum_{m\geqslant 0} h_+(m)f_m(n)$ converge d'après la question 16, $f(n) = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m)f_m(n)$ permet de définir une fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, sous-entendu que $f(0)$ est quelconque. Par linéarité sur les séries convergentes, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lambda f(n+1) - nf(n) = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m)\big(\lambda f_m(n+1) - nf_m(n)\big)$. Or $\lambda f_m(m+1) - mf_m(m) = 1 - p_m^{(\lambda)}$ et $\lambda f_m(n+1) - nf_m(n) = -p_m^{(\lambda)}$ si $n \neq m$ car $f_m \in \mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$. Ainsi, $\lambda f(n+1) - nf(n) = h_+(n) - \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m)p_m^{(\lambda)}$, ce qui signifie exactement que $\boxed{f \text{ appartient à l'ensemble } \mathcal{S}_{h_+} \text{ qui est égal à } \mathcal{S}_h}$ d'après la question 15.

18 Toutes les fonctions de $\mathcal{S}_h$ prennent les mêmes valeurs sur $\mathbb{N}^*$ d'après la relation (3) de la question 7. Comme on vient de trouver un élément de $\mathcal{S}_h$, on peut dire que pour tout élément de $\mathcal{S}_h$, on a

$$\forall n \geqslant 1,\ f(n+1) - f(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m)(f_m(n+1) - f_m(n)) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m)\Delta f_m(n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme h_+ est à valeurs positives et que $\Delta f_m(n)$ est négatif pour tout $m \neq n$ d'après la question 12 et que $\Delta f_n(n) > 0$ d'après la question 13, $f(n+1) - f(n) \leqslant h_+(n)\Delta f_n(n)$. D'après la question 14, $\Delta f_n(n) \leqslant \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$ ce qui, comme h_+ est à valeurs positives, montre que $f(n+1)-f(n) \leqslant \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} h_+(n)$. Enfin, toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $h_+(n) = h(n) - \operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} h(k) \leqslant \operatorname*{Sup}_{k\in\mathbb{N}} h(k) - \operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} h(k)$ et on peut multiplier par $\dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \geqslant 0$ pour conclure que $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ f(n+1) - f(n) \leqslant \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\operatorname*{Sup}_{k\in\mathbb{N}} h(k) - \operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} h(k)\right).}$

PARTIE 5 : APPLICATION PROBABILISTE

19 Soit $k \in [\![1;n]\!]$ et $\omega \in \Omega$ (l'univers sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires). Puisque X_k suit une loi de Bernoulli, distinguons deux cas selon la valeur de $X_k(\omega)$:

- Si $X_k(\omega) = 0$, alors $X_k(\omega)f(S)(\omega) = X_k(\omega)f(S(\omega)) = X_k(\omega)f(W_k+1)(\omega) = X_k(\omega)f(W_k(\omega)+1) = 0$.
- Si $X_k(\omega) = 1$, comme dans ce cas on a la relation $S(\omega) = W_k(\omega) + X_k(\omega) = W_k(\omega) + 1$, il vient à nouveau $X_k(\omega)f(S)(\omega) = X_k(\omega)f(S(\omega)) = X_k(\omega)f(W_k+1)(\omega) = X_k(\omega)f(W_k(\omega)+1) = f(S(\omega))$.

Ainsi, $\forall \omega \in \Omega,\ X_k(\omega)f(S)(\omega) = X_k(\omega)f(W_k+1)(\omega)$, donc $\boxed{X_k f(S) = X_k f(W_k+1)}$ (égalité de fonctions).

Comme les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes mutuellement, toute fonction des variables aléatoires de la famille $(X_i)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}$ est indépendante de X_k (lemme des coalitions). C'est en particulier le cas de X_k et de $f(W_k) = f\Big(\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} X_i\Big)$. Puisque l'espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes est le produit de leur deux espérances et que l'espérance d'une variable aléatoires suivant une loi de Bernoulli de paramètre p vaut p, on a bien $\boxed{\mathbb{E}(f(W_k)X_k) = \mathbb{E}(f(W_k))\,\mathbb{E}(X_k) = r_k\,\mathbb{E}(f(W_k)).}$

20 Comme $\lambda = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k$ et $S = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $\lambda f(S+1) - Sf(S) = \sum\limits_{k=1}^{n} (r_k f(S+1) - X_k f(S))$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\lambda f(S+1) - Sf(S)) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(r_k f(S+1) - X_k f(S)) = \sum_{k=1}^{n} (r_k\,\mathbb{E}(f(S+1)) - \mathbb{E}(X_k f(S))).$$

Or, d'après la question 19, comme on a encore X_k et $f(W_k+1)$ indépendantes avec le lemme des coalitions, on trouve $r_k\,\mathbb{E}(f(W_k+1)) = \mathbb{E}(X_k)\,\mathbb{E}(f(W_k+1)) = \mathbb{E}(X_k f(W_k+1)) = \mathbb{E}(X_k f(S))$. On injecte ceci dans la relation précédente pour avoir, toujours par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(\lambda f(S+1) - Sf(S)) = \sum_{k=1}^{n} (r_k\,\mathbb{E}(f(S+1)) - r_k\,\mathbb{E}(f(W_k+1))) = \sum_{k=1}^{n} r_k(\,\mathbb{E}(f(S+1) - f(W_k+1)).$$

Comme à la question 19, on montre que $f(S+1) - f(W_k+1)$ et $X_k(f(W_k+2) - f(W_k+1))$ sont égales :

- Si $X_k(\omega) = 0$, $S(\omega) = W_k(\omega)$ donc $f(S(\omega)+1) - f(W_k(\omega)+1) = X_k(\omega)(f(W_k(\omega)+2) - f(W_k(\omega)+1)) = 0$.

- Si $X_k(\omega) = 1$, comme dans ce cas on a la relation $S(\omega) = W_k(\omega) + X_k(\omega) = W_k(\omega) + 1$, il vient $f(S(\omega)+1) - f(W_k(\omega)+1) = f(W_k(\omega)+2) - f(W_k(\omega)+1) = X_k(\omega)(f(W_k(\omega)+2) - f(W_k(\omega)+1))$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour } (h,f) \in \mathcal{F}^2, \text{ la relation } \mathbb{E}(\lambda f(S+1) - Sf(S)) = \sum_{k=1}^{n} r_k \, \mathbb{E}\left(X_k(f(W_k+2) - f(W_k+1))\right).}$

Remarque : l'hypothèse $f \in \mathcal{S}_h$ ne sert à rien, seule l'hypothèse $f \in \mathcal{F}$ de la question 19 est utile.

21 Soit $A \subset \mathbb{N}$ et $f_A \in \mathcal{S}_{\mathbf{1}_A}$, par la relation (2), on a $\forall j \in \mathbb{N},\ \lambda f_A(j+1) - jf_A(j) = \mathbf{1}_A(j) - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_A(k) p_k^{(\lambda)}$.
Par ailleurs, par la formule de transfert, on a $\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - Sf_A(S)) = \sum_{j=0}^{n} (\lambda f_A(j+1) - jf_A(j))\, \mathbb{P}(S=j)$.
Combinons les deux dernières formules pour obtenir

$$\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - Sf_A(S)) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{1}_A(j)\, \mathbb{P}(S=j) - \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_A(k) p_k^{(\lambda)}\, \mathbb{P}(S=j) \right)$$

Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_A(k) p_k^{(\lambda)}$ est une constante relativement à j, on obtient

$$\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - Sf_A(S)) = \sum_{j\in A} \mathbb{P}(S=j) - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_A(k) p_k^{(\lambda)} \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(S=j) \right) = \sum_{j\in A} \mathbb{P}(S=j) - \sum_{k\in A} p_k^{(\lambda)}$$

car $\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(S=j) = 1$ puisque S est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$. Avec les notations de l'énoncé, cela donne la relation simplifiée $\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - Sf_A(S)) = \mathrm{loi}(S)(A) - P_\lambda(A)$, et ceci indépendamment de la fonction f_A choisie dans $\mathcal{S}_{\mathbf{1}_A}$. Si on revient à la définition de la distance définie par l'énoncé, on obtient donc la formule souhaitée, c'est-à-dire $\boxed{\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S), P_\lambda) = \operatorname*{Sup}_{A\subset\mathbb{N}} |\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - Sf_A(S))|}$ où f_A est un élément de $\mathcal{S}_{\mathbf{1}_A}$.

22 Soit $A \subset \mathbb{N}$ et $f_A \in \mathcal{S}_{\mathbf{1}_A}$ de sorte que $f_A \in \mathcal{F}$. Par indépendance de X_k et W_k pour $k \in [\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{E}\left(X_k(f_A(W_k+2) - f_A(W_k+1))\right) = r_k(\mathbb{E}(X_k)\,\mathbb{E}(f_A(W_k+2)) - \mathbb{E}(X_k)\,\mathbb{E}(f_A(W_k+1)))$ et, comme $\mathbb{E}(X_k) = r_k$, $\mathbb{E}\left(X_k(f_A(W_k+2) - f_A(W_k+1))\right) = r_k^2(\mathbb{E}(f_A(W_k+2)) - \mathbb{E}(f_A(W_k+1)))$, et avec la question 20

$$\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - Sf_A(S)) = \sum_{k=1}^{n} r_k^2\, \mathbb{E}\left(f_A(W_k+2) - f_A(W_k+1)\right).$$

Avec la formule (5) et car $\operatorname*{Sup}_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_A(k) - \operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_A(k) \leqslant 1$ car $h = \mathbf{1}_A$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, on a $|f_A(W_k+2) - f_A(W_k+1)| \leqslant \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$. Il reste à combiner le tout pour conclure que

$$|\,\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - Sf_A(S))| \leqslant \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} r_k^2,$$

et comme le majorant est indépendant de A, la question 21 donne enfin $\boxed{\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S), P_\lambda) \leqslant \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} r_k^2.}$

On retrouve la loi des évènements rares ; en effet, si $\forall k \in [\![1;n]\!],\ r_k = \dfrac{\lambda}{n}$ avec $\lambda > 0$, alors on a bien $\lambda = \sum_{k=1}^{n} r_k$ et S suit une loi binomiale de paramètres n, $\dfrac{\lambda}{n}$. L'inégalité précédente, appelée inégalité de Le Cam, montre que $\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S), P_\lambda) \leqslant \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \dfrac{\lambda^2}{n} = \dfrac{\lambda(1-e^{-\lambda})}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S), P_\lambda) = 0$.