SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 6 RÉDUCTION

6.1 Éléments propres

6.1 $E_0(u) = \mathrm{Ker}(u - 0.\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$ car u injectif. Ainsi : 0 n'est pas une valeur propre de u.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u^{-1})$, il existe $x \in E$ avec $x \neq 0_E$ tel que $u^{-1}(x) = \lambda x$.
On compose par u pour avoir $x = \lambda u(x)$ par linéarité de u donc $u(x) = \dfrac{1}{\lambda}x$ et $x \neq 0_E$ donc $\dfrac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(u)$.

Par symétrie, on montre la seconde inclusion et on a bien $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \big(\mathrm{Sp}(u)\big)^{-1}$.

6.2 On calcule le polynôme caractéristique de A (donc de u canoniquement associé à A) et on trouve -1, 2 et $a+5$ comme valeurs propres. On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(-1, 2, a+5)$ et $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en cherchant les sous-espaces propres ($v_1 = (-3, 3, 1)$, $v_2 = (1, -5, 1)$ et $v_3 = (1, -1, 1)$). Reste à considérer les cas $a \notin \{-6, -3\}$ et $a = -6$ et $a = -3$.

• Si $a \notin \{-6, -3\}$ alors les trois valeurs propres sont distinctes, si F est un sous-espace stable, alors u_F est diagonalisable car u l'est et les valeurs propres de u_F sont parmi celles de u car χ_{u_F} divise χ_u. Alors F est engendré par des vecteurs propres de u_F donc de u et on a comme sous-espaces stables F : $\{0_E\}$, $D_1 = \mathrm{Vect}(v_1)$, $D_2 = \mathrm{Vect}(v_2)$, $D_3 = \mathrm{Vect}(v_3)$, $P_1 = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$, $P_2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_3)$, $P_3 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $\mathbb{R}^3$

• Si $a = -6$: en plus on trouve toutes les droites $D = \mathrm{Vect}(v_1 + \lambda v_3)$ avec $\lambda \neq 0$ (car $E_{-1} = \mathrm{Vect}(v_1, v_3)$) et les plans $P = \mathrm{Vect}(v_2, v_1 + \lambda v_3)$ avec $\lambda \neq 0$.

• Si $a = -3$: même chose en échangeant les vecteurs v_1 et v_2.

6.3 On traite trois cas :

• Si (A, B, C) est liée : il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tel que $aA + bB + cC = 0$ qui admet une valeur propre double : 0.

• Si (A, B, C) est libre et $I_2 \in \mathrm{Vect}(A, B, C)$ alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tel que l'on ait $aA + bB + cC = I_2$ qui admet une valeur propre double : 1.

• Si (A, B, C) est libre et $I_2 \notin \mathrm{Vect}(A, B, C)$ alors comme $\dim\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\big) = 4$, (A, B, C, I_2) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ tel que $aA + bB + cC + dI_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $aA + bB + cC = \begin{pmatrix} -d & 1 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et cette matrice admet comme valeur propre double $-d$.

6.4 **a.** g est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = F'(0) = f(0)$ où $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ donc $g \in E$; la linéarité est claire. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u(f) = \lambda f$ avec $f \in E$ non nulle, alors en dérivant f est solution de l'équation (E) : $\lambda x y' + (\lambda - 1)y = 0$ donc $f(x) = \alpha x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ et la continuité en 0 impose $\lambda \in]0; 1]$. Ainsi : $\mathrm{Sp}(u) =]0; 1]$.

b. Ce sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ (abus de notation) est stable et de dimension finie. Comme $u(X^k) = \dfrac{1}{k+1}X^k$, u_F est diagonalisable ($n+1$ valeurs propres distinctes).

$\boxed{6.5}$ Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ telle que $T(f) = \lambda f \iff \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x+1) = \lambda f(x)$, alors en notant $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\ell = \lambda\ell$.

- Si $\ell \neq 0$ alors $\lambda = 1$ et f constante égale à 1 convient donc 1 est valeur propre.
- Si $\ell = 0$, soit $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) \neq 0$, alors $f(a+n) = \lambda^n f(a)$ donc en passant à la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n f(a) = 0$ donc $\lambda \in]-1;1[$. Réciproquement si $\lambda \in]-1;1[$, si on se donne $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue non nulle vérifiant $\varphi(1) = \lambda\varphi(0)$ (affine par exemple), et qu'on construit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ prolongeant φ et vérifiant la relation $\forall x \geqslant 0,\ f(x+1) = \lambda f(x)$ (c'est possible avec $f(x+n) = \lambda^n\varphi(x)$ si $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$), alors $f \in E$ et $T(f) = \lambda f$. Par conséquent : $Sp(T) =]-1;1]$.

$\boxed{6.6}$ Tout d'abord $g : t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car f est dérivable en 0 et $T(f)$ est donc dérivable et $T(f)' = g$. T est donc bien un endomorphisme de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ non nulle tels que $T(f) = \lambda f$, alors en dérivant on obtient : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \lambda f'(x)$ et on doit avoir $\lambda \neq 0$ car f n'est pas nulle. f est donc solution de $(E)\ :\ y' = \dfrac{1}{\lambda x} y$ donc $\forall x > 0,\ f(x) = \alpha x^{\frac{1}{\lambda}}$ et la continuité en 0 impose $\lambda \in]0;1]$. $Sp(T) =]0;1]$.

$\boxed{6.7}$ **a.** Comme $f \in E$ est de classe C^∞, $u(f)$ l'est aussi par composition. De plus, u est clairement linéaire. Soit $\varphi : x \mapsto px + q$, l'application φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on a facilement $\forall y \in \mathbb{R},\ \varphi^{-1}(y) = \dfrac{y-q}{p}$. Enfin, si $(f,g) \in E^2$, $u(f) = g \iff f \circ \varphi = g \iff f = g \circ \varphi^{-1}$ donc u est bien un automorphisme de E car toute fonction g de E admet un unique antécédent f de E par u.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f, par définition, il existe $f \in E$ tels que $u(f) = f \circ \varphi = \lambda f$ et $f \neq 0$.

Par une récurrence simple, $\forall n \in \mathbb{N},\ f \circ \varphi^n = \lambda^n f$. Si $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(x) = px + 1 - p = p(x-1) + 1$, $\varphi^2(x) = p\big((p(x-1)+1) - 1\big) + 1 = p^2(x-1) + 1$ et, à nouveau, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi^n(x) = p^n(x-1) + 1$ par une récurrence simple. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f\big(p^n(x-1)+1\big) = \lambda^n f(x)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, si on fait tendre n vers $+\infty$, comme $|p| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n = 0$ donc, par continuité de f en 1, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} f(p^n(x-1)+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n f(x) = f(1)$. Pour un réel x tel que $f(x) \neq 0$ (il en existe car $f \neq 0$), on a donc la convergence de $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui impose $\lambda \in]-1;1]$.

b. Si f est un vecteur propre de u, alors $f \neq 0$ et il existe $\lambda \in]-1;1]$ tel que $u(f) = \lambda f$. Ainsi, $u(f) = f \circ \varphi = \lambda f$ donc, en dérivant k fois (toutes les fonctions sont de classe C^∞), on a $\forall k \in \mathbb{N},\ \big(u(f)\big)^{(k)} = \lambda f^{(k)}$ d'où $\forall k \in \mathbb{N},\ p^k f^{(k)} \circ \varphi = \lambda f^{(k)}$ par récurrence car $\varphi'(x) = p$. Ainsi, $u(f^{(k)}) = \dfrac{\lambda}{p^k} f^{(k)}$ car $p \neq 0$. Si $f^{(k)}$ est non nulle, cette relation montre que $f^{(k)}$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\dfrac{\lambda}{p^k}$. Mais comme $\left|\dfrac{\lambda}{p^k}\right| > 1$ si k assez grand car $|p| < 1$, la question **b.** prouve que c'est absurde. Ainsi, $\exists k \in \mathbb{N},\ f^{(k)} = 0$.

c. Si λ valeur propre, f vecteur propre de u associé à λ, on sait d'après **c.** qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$ donc que f est une fonction polynomiale (de degré inférieur ou égal à $k-1$). En notant $n = \deg(f) \in \mathbb{N}$ et en écrivant $f(x) = a_n x^n + \cdots$ avec $a_n = \mathrm{dom}(f) \neq 0$, on obtient $p^n a_n = \lambda a_n$ en identifiant le terme en x^n dans la relation $u(f) = \lambda f$. Ainsi, comme $a_n \neq 0$, on a $\lambda = p^n$. Comme on a vu en **c.** que $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)} \circ \varphi = \dfrac{\lambda}{p^k} f^{(k)} = p^{n-k} f^{(k)}$, si on évalue en 1 sachant que $\varphi(1) = p + q = 1$, on obtient $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(1) = p^{n-k} f^{(k)}(1)$. Comme $p^{n-k} \neq 1$ dès que $k \neq n$, on en déduit $\forall k \neq n,\ f^{(k)}(1) = 0$. En particulier, $\forall k \in [\![0;n-1]\!],\ f^{(k)}(1) = 0$ donc, d'après la formule de Taylor sur les polynômes, comme $\deg(f) = n$, on a $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = a_n(x-1)^n$.

On a montré que $Sp(u) = \{p^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ E_{p^n}(u) = \mathrm{Vect}(f_n)$ est une droite où $f_n : x \mapsto (x-1)^n$.

6.8 $A = \text{Mat}_{\text{can}}(f)$ où $f(e_1) = \alpha_1 e_{2p}, \cdots, f(e_p) = \alpha_p e_{p+1}, f(e_{p+1}) = \alpha_p e_p, \cdots, f(e_{2p}) = \alpha_1 e_1$. Dans $\mathcal{B} = (e_1, e_{2p}, e_2, e_{2p-1}, \cdots, e_p, e_{p+1})$ la matrice de f est B composée de blocs diagonaux $\begin{pmatrix} 0 & \alpha_k \\ \alpha_k & 0 \end{pmatrix}$ donc $\chi_A = \chi_B = \prod\limits_{k=1}^{p} (X^2 - \alpha_k^2)$ car A et B sont semblables.

6.9 **a.** On factorise par a_k dans la ligne k et on retranche ensuite la ligne k à toutes les autres lignes : $P(a_k) = a_k \prod\limits_{j \neq k} (a_k - a_j)$. $P = \chi_{-A}(X)$ donc P est de degré n et unitaire car $\chi_A = (-1)^n X^n + \cdots$.

b. $\dfrac{P(X)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (X - a_k)} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_k}{X - a_k}$ (R) car la partie entière de cette fraction rationnelle vaut 1 d'après la question **a.**. Pour $k \in [\![1; n]\!]$, α_k s'obtient en multipliant la relation (R) par $(X - a_k)$ et en prenant la valeur en a_k ; grâce à la question **a.**, on trouve $\alpha_k = a_k$.

c. Si 1 est un a_k, $P(1) = P(a_k)$ avec **a.**. Sinon, avec $x = 1$, $\det(A + I_n) = P(1) = \left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{1 - a_k}\right) \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - a_k)$ avec **b.**. $\det(A) = P(0) = \left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{-a_k}\right) \prod\limits_{k=1}^{n} (-a_k) = (-1)^{n-1}(n-1) \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$.

6.10 On trouve $\chi_A = -X(X-2)^2$, puis $E_0(A) = \text{Vect}\big((-1,-1,1)\big)$ et $E_2(A) = \text{Vect}\big((2,1,0),(3,0,2)\big)$ donc A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(0,2,2)$.

6.11 **a.** Notons $F = \big\{u \in E^* \mid u(H) = \{0\}\big\}$ alors F est clairement un sous-espace vectoriel de E^*. Soit $v \neq 0_E$ tel que $v \notin H$, alors $E = H \oplus \text{Vect}(v)$ et l'application $\varphi \in F$ est entièrement caractérisée par $\varphi(v)$; on montre que $\theta : F \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(\varphi) = \varphi(v)$ est un isomorphisme donc $\dim(F) = n - 1$.

b. H a pour équation $u(x) = 0$ avec $u \in E^*$. Si H est stable par f, alors $\forall x \in H$, $u(f(x)) = 0$ donc $u \circ f \in F$ or u non nulle donc c'est une base de F (d'après **a.**) et ainsi $u \circ f$ est colinéaire à u. La réciproque est claire.

c. On a $\big(H \text{ stable par } f\big) \iff \big(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ LA = \lambda L\big) \iff \big({}^tL \text{ vecteur propre de } {}^tA\big)$ en passant à la transposée cette équation et car L n'est pas nul.

d. Les valeurs propres de ${}^tA$ sont celles de A : après calculs $\text{Sp}(A) = \{1, 2, -1\}$ avec des vecteurs propres $(-1,-1,1)$, $(0,1,1)$ et $(-1,0,1)$; les plans stables sont $P_1 : x + y - z = 0$, $P_2 : y + z = 0$ et $P_3 : x - z = 0$.

6.12 • Si λ valeur propre de A, alors il existe une colonne non nulle X telle que $AX = \lambda X$ et si on construit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec toutes les colonnes qui valent X, on a $u(M) = AM = \lambda M$ donc λ est valeur propre de u.

• Si λ est une valeur propre de u, il existe une matrice non nulle M telle que $AM = \lambda M$ et toute colonne non nulle de M est une colonne propre pour A associée à la valeur propre λ.

• $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(u)$ et si λ est une valeur propre de u (donc de A), on a $E_\lambda(u)$ isomorphe à $\big(E_\lambda(A)\big)^n$ d'après ce qui précède (choix de n colonnes qui sont des vecteurs propres pour A) : $\dim\big(E_\lambda(u)\big) = n \dim\big(E_\lambda(A)\big)$ et qui fait que A est diagonalisable si et seulement si u l'est (avec la somme des dimensions des sous-espaces propres qui donne la dimension de l'espace de départ).

6.13 • Soit f canoniquement associé à A ; $\text{rang}(A) = 2$ donc $\dim\big(E_0(A)\big) = n - 2$ et $m_0(A) \geqslant n - 2$; comme $A^n \neq 0$, A n'est pas nilpotente donc n'a pas (d'après CAYLEY-HAMILTON) que 0 comme valeur propre) ainsi, comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, on a $\chi_A = (-1)^n X^{n-2}(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ avec $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 = -\lambda_1 \neq 0$ donc A est diagonalisable car $\dim\big(E_{\lambda_1}(A)\big) = 1$ et $\dim\big(E_{\lambda_1}(A)\big) = 1$.

• Autre méthode : comme A est complexe, A est trigonalisable et donc semblable à une matrice T triangulaire supérieure avec $n - 2$ fois 0 sur la diagonale (car $\text{rang}(A) = n - 2$) puis λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ sinon A serait nilpotente ; λ_1 et $-\lambda_1$ sont valeurs propres simples de A et A est diagonalisable.

6.14 **a.** Prendre $n = 1$ et $B = (i)$ pour répondre par la négative.

b. Le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} b & b^2 \\ b^2 & -b \end{pmatrix}$ est $X^2 - b^2(1+b^2)$ donc A est diagonalisable si et seulement si $b \neq \pm i$ (traiter les cas : $b = 0$ alors $A = 0$; $b \notin \{0, i, -i\}$ alors deux valeurs propres distinctes et $b = \pm i$ alors $A^2 = 0$ alors que A non nulle).
Plus généralement, A semblable (en réorganisant les lignes et les colonnes, à une matrice avec n blocs diagonaux $\begin{pmatrix} \lambda_k & \lambda_k^2 \\ \lambda_k^2 & -\lambda_k \end{pmatrix}$ où les λ_k sont les termes diagonaux de B. Ainsi, d'après le cas $n = 1$, on montre (car si u est diagonalisable et F stable par u alors u_F l'est aussi) que : A est diagonalisable $\Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(B) \cap \{i, -i\} = \emptyset$.
c. Si $B = PDP^{-1}$ diagonalisable, $\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & B^2 \\ B^2 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & D^2 \\ D^2 & -D \end{pmatrix}$ puis la question **b.**.

6.15 **a.** En développant selon la première colonne le déterminant $\chi_J(x)$, on trouve $\chi_J = (-1)^n(X^n - 1)$ donc par les valeurs propres de J sont les n racines n-ièmes de l'unité et elles sont toutes simples ce qui fait que J est diagonalisable. J est donc semblable à $\mathrm{diag}(1, \omega, \cdots, \omega^{n-1})$ où $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

b. Comme $A = a_0 I_n + a_1 J + \cdots + a_{n-1} J^{n-1}$, A est semblable à $\mathrm{diag}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k, \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\omega^k, \cdots, \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\omega^{(n-1)k}\Big)$ donc on a $\det(A) = \prod\limits_{j=0}^{n-1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\omega^{jk}$ (c'est extrêmement classique).

6.16 $P = X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X-1)(X^2-4) = (X-1)(X+2)(X-2)$ est annulateur de A donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 2, -2\}$. Comme $P(0) \neq 0$, A est inversible. Comme $A\Big(\frac{1}{4}\big(A - 4I_n - A^2\big)\Big) = I_n$, on a $A^{-1} = \frac{1}{4}\big(A - 4I_n - A^2\big)$.

6.2 Diagonalisation

6.17 **a.** $u \circ u^{p-1} = u^{p-1} \circ u = \mathrm{id}_E$ donc u est un automorphisme de E et $u^{-1} = u^{p-1}$. Les valeurs propres complexes de A sont les racines p-ièmes de l'unité parmi lesquelles seules 1 et -1 sont réelles. Donc (u est diagonalisable) $\Longleftrightarrow u^2 = \mathrm{id}_E \Longleftrightarrow$ (u est une symétrie).
b. Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, on a $\chi_u(X) \in \mathbb{Z}[X]$ qui est de degré 3 donc qui possède au moins une racine réelle qui ne peut valoir que $\varepsilon = \pm 1$. Ainsi $\chi_u(X) = (\varepsilon - X)(X^2 + aX + b)$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Mais A est diagonalisable car annule $X^p - 1$ scindé à racines simples donc les valeurs propres de A sont des racines p-ièmes de l'unité et $\chi_A(X) = \chi_u(X) = (\varepsilon - X)(X - \alpha)(X - \beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{U}_p^2$ donc $a = -(\alpha + \beta) \in [\![-2; 2]\!]$ et $b = \alpha\beta \in \{-1, 1\}$.
c. On ne peut donc avoir que $\chi_u(X) = (\varepsilon - X)(X^2 - 2X + 1)$ ou $(\varepsilon - X)(X^2 - X + 1)$ ou $(\varepsilon - X)(X^2 + 1)$ ou $(\varepsilon - X)(X^2 + X + 1)$ ou $(\varepsilon - X)(X^2 + 2X + 1)$ ou $(\varepsilon - X)(X^2 - 1)$. Les racines de ses polynômes sont des racines seconde, troisième, quatrième, sixième de l'unité donc χ_u divise $X^{12} - 1$ et on a donc $u^{12} = \mathrm{id}_E$.

6.18 **a.** On peut prendre le fameux carré magique : $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

b. Si $A \in X_n(\mathbb{R})$, on constate que $AJ_n = J_nA = s_n(A)J_n$. Réciproquement, $AJ_n = \big(l_i(A)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $J_nA = \big(c_j(A)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, si $AJ_n = J_nA$: $A \in X_n(\mathbb{R})$. On conclut par double inclusion.
c. Classique sur la sous-algèbre. On a $ABJ_n = s_n(AB)J_n = A(BJ_n) = s_n(B)AJ_n = s_n(B)s_n(A)J_n$ si $(A, B) \in X_n(\mathbb{R})^2$ donc $s_n(AB) = s_n(A)s_n(B)$; le fait que s_n est linéaire est clair. De plus $s_n(I_n) = 1$.
d. Pour J_n : $E_0 = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ et $E_n = \mathrm{Vect}\big((1, \cdots, 1)\big)$ donc J_n est semblable à $nE_{n,n}$, dont le commutant contient les matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, ainsi $\dim\big(X_n(\mathbb{R})\big) = (n-1)^2 + 1$. $X_n^0(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(s_n)$ où s_n est une forme linéaire non nulle donc $X_n^0(\mathbb{R})$ est un hyperplan de $X_n(\mathbb{R})$: par conséquent $\dim\big(X_n^0(\mathbb{R})\big) = (n-1)^2$.

6.19 **a.** Pour $m \in \mathbb{R}$, on calcule $\chi_{A_m}(X) = -X(1-X)^2$. A_m est donc diagonalisable si et seulement si E_1 est un plan. Or $A_m - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -m & -m & m \\ -m-1 & -m & m \end{pmatrix}$ est de rang 1 si et seulement si $m = 0$.

b. $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. u_0 est un projecteur, c'est la projection sur $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1+e_3)$.

6.20 **a.** On trouve $A_n^3 = A^2 + (n-1)A$. Le polynôme $P = X^3 - X^2 - (n-1)X = X\big(X^2 - X - (n-1)\big)$ et le discriminant de $X^2 - X - (n-1)$ est $\Delta_n = 4n - 3 > 0$ et 0 n'est pas racine de $X^2 - X - (n-1)$. Ce polynôme P est scindé à racines simples et annulateur de A_n donc A_n est diagonalisable. Ou alors A_n est symétrique réelle !

b. Il est clair que $\mathrm{rang}\,(A_n) = 2$ et $P = X\big(X - \alpha_n\big)\big(X - \beta_n\big)$ avec $\alpha_n = \dfrac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}$ et $\beta_n = \dfrac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}$. Comme A_n est diagonalisable, si α_n non valeur propre, $\dim(E_{\beta_n}) = 2$ et $\mathrm{Tr}\ (A_n) = 2\beta_n \neq 1$. Par symétrie, α_n et β_n sont des valeurs propres de A_n et leurs sous-espaces propres associés sont des droites. Ainsi : $\chi_{A_n} = (-1)^n X^{n-2}\big(X^2 - X - (n-1)\big)$. Alors $\det(I_n + A_n) = (-1)^n \chi_{A_n}(-1) = (-1)^n(3-n)$.

c. Méthode 1 : $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$ et on obtient $a_{p+1} = a_p + b_p$ et $b_{p+1} = 6a_p$ car $A_7^{p+1} = A_7^p \times A_7 = A_7(a_p A_7^2 + b_p A_7) = (a_p + b_p)A_7^2 + 6a_p A_7$ ((A_7, A_7^2) libre). Alors $a_{p+2} = a_{p+1} + 6a_p$ dont l'équation caractéristique est $z^2 - z - 6 = 0$ de solutions entières : $\alpha_7 = 3$ et $\beta_7 = -2$.
Après calculs : $a_p = \dfrac{1}{15}3^p + \dfrac{1}{10}(-2)^p$ et $b_p = 6\big(\dfrac{1}{15}3^{p-1} + \dfrac{1}{10}(-2)^{p-1}\big) = \dfrac{2}{15}3^p - \dfrac{3}{10}(-2)^p$.

Méthode 2 : On effectue la division euclidienne de X^p par $P = X(X-3)(X+2)$: $X^p = PQ + a_p X^2 + b_p X + c_p$ car $\deg(P) = 3$. On utilise l'interpolation de LAGRANGE : en évaluant en 0, 3 et -2, on a $(p \geqslant 1)$:
$R = a_p X^2 + b_p X + c_p = 0\dfrac{(X-3)(X+2)}{(0-3)(0+2)} + 3^p\dfrac{X(X+2)}{(3-0)(3+2)} + (-2)^p\dfrac{(X(X-3)}{(-2-0)(-2-3)}$ et on calcule.

6.21 **a.** Comme $a \neq \pm b$, on a $\mathrm{rang}\,(M) = 2$ donc 0 est valeur propre de M d'ordre au moins $2n-2$. De plus $u(1,1,\cdots,1) = (na+nb)(1,1,\cdots,1)$ et $u(1,-1,1,-1,\cdots,1,-1) = (na-nb)(1,-1,1,-1,\cdots,1,-1)$ si u canoniquement associé à M. Si $b = 0 \Longrightarrow a \neq 0$ et le sous-espace propre associé à na est un plan. Par contre, si $b \neq 0$, on a $na + nb \neq na - nb$ dont les sous-espaces propres sont des droites.

Dans les deux cas, M est semblable à $\mathrm{diag}(0,\cdots,0,na+nb,na-nb)$.

b. D'après la question **1**, on a $\chi_M(X) = X^{2n-2}(X - na - nb)(X - na + nb)$.
Or $A = M + cI_{2n}$ donc $\det(A) = \chi_M(-c) = c^{2n-2}\big((c-na)^2 - (nb)^2\big)$.

6.22 **a.** Supposons $p \geqslant q$, on a $\chi_A(A) = 0$ d'après CAYLEY-HAMILTON avec $\chi_A = \sum\limits_{i=0}^{q} a_i X^i$ donc il vient $\chi_A(A) = \sum\limits_{i=0}^{q}\sum\limits_{k=1}^{p} a_i \lambda_k^i B_k = \sum\limits_{k=1}^{p} \chi_A(\lambda_k) B_k = 0$. Comme $(B_1,\cdots,B_p)$ est libre : $\chi_A(\lambda_1) = \cdots = \chi_A(\lambda_p) = 0$ or les $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ sont distincts 2 à 2 et sont des racines de χ_A de degré q : $p \geqslant q \Longrightarrow p = q$.

b. Posons $P = \prod\limits_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$, alors $\deg(P) = p$ donc $P(A) = \sum\limits_{k=1}^{p} P(\lambda_k)B_k = 0$ par construction. A annule un polynôme scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

c. Quitte à ré-indexer en regroupant les matrices pour des scalaires égaux, on peut supposer que les $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ distincts 2 à 2 avec $m \leqslant p$ et on utilise la question **2.**.

d. On suppose $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ distincts 2 à 2 : si $n \geqslant p$, on écrit $X^n = QP + R$ avec $\deg(R) \leqslant p-1$. Alors $A^n = R(A) = \sum\limits_{k=1}^{p} R(\lambda_k)B_k$ (comme avant) or $R(\lambda_1) = \lambda_1^n, \cdots, R(\lambda_p) = \lambda_p^n$ donc $A^n = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^n B_k$.

e. Si A est diagonalisable, il existe $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\cdots,\lambda_p)$ et $P \in GL_q(\mathbb{C})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Posons $B_1 = P\ \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_1,0,\cdots,0)\ P^{-1}$, etc... alors on a bien l'hypothèse de l'énoncé.

6.23 D'abord, A est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

Comme rang $(A) = 2$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n-2$ par la formule du rang donc $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ dès que $n \geqslant 3$.

Si $\lambda \neq 0$, on résout $AX = \lambda X$ qui équivaut au système $(\lambda x_1 = \cdots = \lambda x_{n-1} = x_n$ et $x_1 + \cdots + x_n = \lambda x_n)$ puis au système $(x_1 = \cdots = x_{n-1}$ et $(n-1)x_n + \lambda x_n = \lambda^2 x_n)$ et enfin à $(x_1 = \cdots = x_{n-1}$ et $(\lambda^2 - \lambda - (n-1))x_n = 0)$.

On traite alors deux cas :

- Si $\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$, alors la seule solution de $x_n = 0$ donc $X = 0$: λ n'est pas valeur propre de A.
- Si $\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$, c'est-à-dire si $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}$, $AX = \lambda X \Longleftrightarrow x_1 = \cdots = x_{n-1} = \dfrac{x_n}{\lambda}$ donc $E_\lambda(A)$

est la droite engendrée par le vecteur $v_\lambda = \left(1, \cdots, 1, \dfrac{1}{\lambda}\right)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \left\{\dfrac{1+\sqrt{4n-3}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{4n-3}}{2}\right\}$ si $n = 2$ et $\mathrm{Sp}(A) = \left\{0, \dfrac{1+\sqrt{4n-3}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{4n-3}}{2}\right\}$ si $n \geqslant 3$.

6.24 **a.** Soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre α, alors $f\big(g(v)\big) = g\big(f(v)\big) = \alpha g(v)$ donc $g(v) \in \mathrm{Vect}(v) = \mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{id}_E)$. Alors $\exists \beta \in \mathbb{R},\ g(v) = \beta v$ donc v est un vecteur propre pour g.

b. D'après **a.**, il existe une base $\mathcal{B}$ de E de vecteurs propres communs à f et à g et deux matrices diagonales $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $D' = \mathrm{diag}(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ telles que $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$ et $D' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$. Pour $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$: $g = P(f) \Longleftrightarrow D' = P(D) \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1;n]\!],\ \beta_k = P(\alpha_k)$. Les $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ étant distincts 2 à 2 : $\exists! P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ (polynôme d'interpolation de Lagrange) qui vérifie ceci donc tel que $g = P(f)$.

c. $\mathcal{C}(f)$ est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ (même une sous-algèbre) et on vient de trouver un isomorphisme $P \mapsto P(f)$ entre $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{C}(f)$ d'après la question **b.** donc $\dim\big(\mathcal{C}(f)\big) = n$.

6.25 **a.** $u^{-1} = u^{p-1}$. Les valeurs propres complexes de A sont les racines p-ièmes de l'unité parmi lesquelles seules 1 et -1 sont réelles. Donc (u est diagonalisable) $\Longleftrightarrow u^2 = \mathrm{id}_E \Longleftrightarrow$ (u est une symétrie).

b. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ d'où $\chi_u(X) \in \mathbb{Z}[X]$ est de degré 3 donc possède au moins une racine réelle $\varepsilon = \pm 1$. Ainsi $\chi_u(X) = (\varepsilon - X)(X^2 + aX + b)$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Mais A est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$) car annule $X^p - 1$ et $\chi_A(X) = \chi_u(X) = (\varepsilon - X)(X - \alpha)(X - \beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{U}_p^2$ donc $a = -(\alpha + \beta) \in [\![-2;2]\!]$ et $b = \alpha\beta \in \{-1, 1\}$. On ne peut avoir que $\chi_A(X) = \chi_u(X) = (\varepsilon - X)(X^2 - 2X + 1)$ ou $(\varepsilon - X)(X^2 - X + 1)$ ou $(\varepsilon - X)(X^2 + 1)$ ou $(\varepsilon - X)(X^2 + X + 1)$ ou $(\varepsilon - X)(X^2 + 2X + 1)$ ou $(\varepsilon - X)(X^2 - 1)$. Si $\chi_A(X) = (1 - X)(X+1)^2$ par exemple, A diagonalisable donc A annule $X^2 - 1$. Les racines de ces polynômes sont des racines seconde, troisième, quatrième, sixième de l'unité donc χ_u divise $X^{12} - 1$ et on a donc $u^{12} = \mathrm{id}_E$.

6.26 **a.** Il suffit de considérer f canoniquement associé à M et de prendre une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $(e_{n-r+1}, \cdots, e_n)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

b. Par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ BA^{k-1} & 0 \end{pmatrix}$ donc si $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $MP(M) = \begin{pmatrix} AP(A) & 0 \\ BP(A) & 0 \end{pmatrix}$. Il suffit donc de prendre $P = \chi_A$ pour que le polynôme $X\chi_A$ de degré $r+1$ soit annulateur de M.

c. Il suffit de prendre les matrices élémentaires $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ qui sont de rang 1. S'il existait P de degré 1 tel que $P(M) = 0$, alors M serait une matrice d'homothétie, ce qui n'est pas.

d. Soit une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$, $(e_{n-r+1}, \cdots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ induit un automorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec A inversible par le théorème du rang. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de terme constant p_0, on a $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & p_0 I_{n-r} \end{pmatrix}$ donc $P(M) = 0 \Longleftrightarrow (p_0 = 0$ et $P(A) = 0) \Longleftrightarrow (p_0 = 0$ et $\chi_A | P) \Longleftrightarrow (X\chi_A | P)$. Donc $\chi_M = X\chi_A$.

e. $M = PDP^{-1}$ et D admet les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ non nulles et $n-r$ fois 0 sur la diagonale. Si $Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q(M) = P.\mathrm{diag}(Q(\lambda_1), \cdots, Q(\lambda_r), Q(0), \cdots, Q(0)).P^{-1} = 0 \Longleftrightarrow Q(\lambda_1) = \cdots = Q(\lambda_r) = Q(0)$. Ainsi, la condition cherchée est qu'il y ait une valeur propre de M qui soit non nulle et au moins double.

6.27 **a.** C'est clair par la linéarité de la trace.

b. Soit H l'hyperplan des matrices de trace nulle : α est valeur propre de u et $H \subset E_\alpha$.
Si $\underline{\mathrm{Tr}\ (A) \neq 0}$, alors $u(A) = \big((\alpha + \mathrm{Tr}\ (A)\big)A$ donc $\lambda = \alpha + \mathrm{Tr}\ (A)$ est valeur propre de u avec $\mathrm{Vect}(A) \subset E_\lambda$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = H \oplus \mathrm{Vect}(A)$, u est diagonalisable.
Si $\underline{\mathrm{Tr}\ (A) = 0}$, on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = H \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$ et $u(I_n) = \alpha I_n + nA$ donc la matrice de u dans une base $(\mathcal{B}_H, I_n)$ (si $\mathcal{B}_H$ est une base de H) est triangulaire supérieure avec des α sur la diagonale, ainsi u n'est pas diagonalisable $\iff u = \alpha \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} \iff u(I_n) = \alpha I_n \iff A = 0$. On a toujours $\mathrm{Tr}\ (u) = n^2\alpha + \mathrm{Tr}\ (A)$.

6.28 On écrit $A = QDQ^{-1}$ par hypothèse avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et on cherche un polynôme P tel que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $P(\lambda_k^5) = \lambda_k$. Un tel polynôme existe par les polynômes d'interpolation de LAGRANGE car l'application $x \mapsto x^5$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $P(A^5) = Q\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)Q^{-1} = A$. Quand A est complexe, on peut prendre $A = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{5}\right)$ pour voir que c'est faux !

6.29 **a.** On résout $AX = \lambda X$ et en notant ${}^tX = (x_1 \cdots x_n) \neq (0 \cdots 0)$ on arrive à $s = \sum\limits_{k=1}^{n} kx_k = (\lambda + i)x_i$ pour $i \in [\![1;n]\!]$. Cela impose $s \neq 0$ et $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\lambda \neq -k$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{\lambda + k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{kx_k}{s} = 1$. Réciproquement, en remontant les calculs, si λ vérifie ceci, alors λ est valeur propre et un vecteur propre est $\left(\dfrac{1}{\lambda+1} \cdots \dfrac{1}{\lambda+n}\right)$.

b. On étudie la fonction $f : \mathbb{R} \setminus [\![-n;-1]\!] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{x+k}$ et on montre par le théorème des valeurs intermédiaires qu'elle prend n fois la valeur 1 donc A est diagonalisable. On constate au passage que les valeurs propres vérifient $-n < \lambda_1 < 1 - n < \lambda_2 < \cdots < -2 < \lambda_{n-1} < -1 < \lambda_n$ et comme $\mathrm{Tr}\ (A) = 0 \Longrightarrow \lambda_n = -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \lambda_k$, on encadre et on montre que $\lambda_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{2}$.

6.30 On diagonalise $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ en $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et on pose $Q = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -2I_n & -I_n \end{pmatrix}$ pour avoir $QBQ^{-1} = \begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ puis on passe par les polynômes annulateurs pour voir que la condition cherchée est : A diagonalisable.

6.31 On diagonalise $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ en $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on pose $Q = \begin{pmatrix} -2I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$ pour avoir $QBQ^{-1} = \begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & 4A \end{pmatrix}$ puis on passe par les polynômes annulateurs pour voir que la condition cherchée est : A diagonalisable.

6.32 On saura bientôt que A est diagonalisable en tant que matrice réelle symétrique. En attendant, on distingue 3 cas :
- $(a_1, \cdots, a_n) = (0, \cdots, 0)$ alors $M = 0$ est diagonale.
- $(a_1, \cdots, a_{n-1}) = (0, \cdots, 0)$ et $a_n \neq 0$ alors $M = a_n E_{n,n}$ est diagonale.
- $(a_1, \cdots, a_{n-1}) \neq (0, \cdots, 0)$ alors $\mathrm{rang}\,(M) = 2$ donc $\mathrm{Ker}(M)$ est de dimension $n-2$. Il ne reste plus que deux valeurs propres réelles à trouver. Si on prend un vecteur colonne X tel que ${}^tX = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ et qu'on résout le système $MX = \lambda X$ pour trouver les valeurs propres, on a $a_1 x_n = \lambda x_1, \cdots, a_{n-1}x_n = \lambda x_{n-1}$ et $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \lambda x_n$. On multiplie cette dernière équation par λ et $(a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2)x_n + \lambda a_n x_n = \lambda^2 x_n$. Soit l'équation (E) : $z^2 - a_n z - \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$. Si λ n'est pas solution de cette équation, $x_n = 0$ et $X = 0$ ce qu'on ne veut pas. (E) possède deux solutions réelles non nulles λ_1 et λ_2 et distinctes (son discriminant est strictement positif et $a_n^2 + 4\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 > 0$). Ainsi, en remontant les calculs en prenant par exemple $x_n = \lambda_1 \neq 0$ (pour la première solution λ_1) ou $x_n = \lambda_2 \neq 0$ (pour la seconde) on a λ_1 et λ_2 qui sont des valeurs propres associées aux vecteurs propres $(a_1, \cdots, a_{n-1}, \lambda_1)$ et $(a_1, \cdots, a_{n-1}, \lambda_2)$.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n : M est diagonalisable.

6.33 **a.** La vérification du fait que B et C sont des sous-espaces est classique (à faire).

b. On raisonne matriciellement, il existe une base $\mathcal{B}$ (adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$) de E dans laquelle la matrice de p soit $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $g \in \mathcal{L}(E)$, on notera $\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ sa matrice dans la même base $\mathcal{B}$. Par exemple, $g \in A$ si et seulement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$ donc $\dim(A) = (n-r)^2$. De même (faire les trois autres cas) : $\dim(B) = \dim(C) = r(n-r)$ et $\dim(D) = r^2$.

c. On a (par les dimensions) : $A \oplus B \oplus C \oplus D = E$ et $\forall g \in A,\ \varphi(g) = 0$; $\forall g \in B,\ \varphi(g) = \frac{g}{2}$; $\forall g \in C,\ \varphi(g) = \frac{g}{2}$; $\forall g \in D,\ \varphi(g) = g$. Ainsi φ est diagonalisable et $E_0(\varphi) = A$, $E_{1/2}(\varphi) = B \oplus C$ et $E_1(\varphi) = D$.

6.34 • Si M est inversible, supposons qu'il existe une telle matrice P inversible comme dans l'énoncé, alors $\forall z \in \mathbb{C},\ \det(P - zM) = \det(M^{-1})\det(PM^{-1} - zI_n) = \det(M^{-1})\chi_{PM^{-1}}(z)$ et, comme on travaille dans $\mathbb{C}$, $\chi_{PM^{-1}}$ possède au moins une racine complexe ce qui contredit l'hypothèse.

• Si M n'est pas inversible, alors en posant $r = \mathrm{rang}\,(M) < n$, on sait que M est équivalente à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en multipliant à gauche par la matrice inversible $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_{n-r} & 0 \end{pmatrix}$ on obtient $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = K_r$ donc il existe deux matrices inversibles U et V telles que $M = U \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^{-1}$. Posons donc $P = UV^{-1}$ qui est bien inversible, alors $\forall z \in \mathbb{C},\ \det(P - zI_n) = \det(U)\det(I_n - zK_r)\det(V)^{-1} = \det(U)\det(V)^{-1} \neq 0$.

6.35 **a.** φ est visiblement linéaire et : $\big((A, B) \text{ vérifie } \mathcal{P}\big) \Longleftrightarrow \big(\varphi \text{ surjective}\big)$. Comme on est en dimension finie : $\big((A, B) \text{ vérifie } \mathcal{P}\big) \Longleftrightarrow \big(\varphi \text{ automorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big) \Longleftrightarrow \big(\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}\big)$.

b. Avec ces notations, $AX = XB \Longrightarrow A^2X = XB^2$ et par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^kX = XB^k$. Par linéarité, si $P \in \mathbb{C}[X]$, on a donc $P(A)X = XP(B)$. Avec $P = \chi_A$ et d'après CAYLEY-HAMILTON : $X\chi_A(B) = 0$ et comme $X \neq 0$, cela impose $\chi_A(B)$ non inversible. Mais χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$ et ses racines sont les valeurs propres de A : $\chi_A = (-1)^n \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$ donc $\prod\limits_{k=1}^{r} (B - \lambda_k I_n)^{m_k} \notin GL_n(\mathbb{C})$ et l'une des matrices $\big(B - \lambda_k I_n\big)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ n'est pas inversible ce qui justifie l'existence d'une valeur propre λ_i de A qui est aussi valeur propre de B.

c. Si A et B possèdent une valeur propre commune λ, comme $\chi_B = \chi_{{}^tB}$, il existe deux vecteurs colonnes non nuls U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $AU = \lambda U$ et ${}^tBV = \lambda V$. En posant $X = U{}^tV \neq 0$, on a $AX = AU{}^tV = \lambda X$ et $XB = U{}^tVB = U{}^t({}^tBV) = \lambda X$ donc $X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et (A, B) ne vérifie pas $\mathcal{P}$.

6.36 $(M^2 - 2I_n)^2 = \big({}^tM\big)^2 = {}^t(M^2) = 2I_n - M$ donc, après développement, $P = X^4 - 4X^2 + X + 2$ est annulateur de M et se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ en $P = (X-1)(X+2)\Big(X - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)\Big(X - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)$ en "voyant" les racines élémentaires 1 et -2 (car I_n et $-2I_n$ sont des solutions évidentes de l'équation). Comme P est scindé à racines simples : M est diagonalisable.

6.37 $C^3 - C^2 = 3(A+B) = 3C$ donc le polynôme $P = X^3 - X^2 - 3X$ annule C et comme $P = X(X^2 - X - 3)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ (discriminant $\Delta = 13 > 0$) C est diagonalisable. Par conséquent, $A = C^3 - 2C^2$ et $B = C + 2C^2 - C^3$ sont diagonalisables en tant que polynômes en C qui l'est : si $C = QDQ^{-1}$, on a $A = Q(D^3 - 2D^2)Q^{-1}$ et $B = Q(D + 2D^2 - D^3)Q^{-1}$ et $D^3 - 2D^2$ et $D + 2D^2 - D^3$ diagonales.

6.38 Par hypothèse, $X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$ est un annulateur de f : $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0, 1, -1\}$. Deux cas :

• Si $0 \in \mathrm{Sp}(f)$ alors f possède trois valeurs propres distinctes dans un espace de dimension 3 donc f est diagonalisable car $3 \leqslant \dim\big(E_0(f)\big) + \dim\big(E_1(f)\big) + \dim\big(E_{-1}(f)\big) \leqslant \dim(E) = 3$ car les sous-espaces propres sont en somme directe. Il existe donc une base de E dans laquelle la matrice de f soit $\mathrm{diag}(0, 1, -1)$.

• Si $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$ alors f est injective donc $f \in GL(E)$ et $f^4 = f^2 \Longrightarrow f^2 = \mathrm{id}_E$ donc $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ scindé à racines simples est annulateur de f donc f est diagonalisable et il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit $\mathrm{diag}(1, 1, -1)$ ou $\mathrm{diag}(1, -, 1-1)$.

6.39 Il suffit de calculer, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi^2(M) = PM + MP + 2PMP$ et $\varphi^3(M) = PM + MP + 6PMP$ pour constater que $\varphi^3(M) - 3\varphi^2(M) + 2\varphi(M) = 0$ donc $X(X-1)(X-2)$ est annulateur de φ et comme il est scindé à racines simples, φ est diagonalisable.

6.40 **a.** Si $A^2 = A$ alors $f_A^2(M) = f_A(M)$ donc $f_A^2 = f_A$ d'où $X(X-1)$ annule f_A diagonalisable.

b. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on constate que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $P(A)M = P(f_A)(M)$ (récurrence sur les monômes). Ainsi si A diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(A) = 0$ donc $P(f_A) = 0$ et f_A est diagonalisable. Réciproquement, si f_A diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(f_A) = 0$ donc, pour $M = I_n$, on a $P(A)I_n = P(f_A)(I_n) = 0$ donc A est diagonalisable.

6.41 Le polynôme $X^5 - X^2 = X^2(X-1)(X-j)(X-j^2)$ est annulateur de M qui est trigonalisable avec des 0, 1, j et j^2 sur la diagonale (les valeurs propres avec leurs multiplicités). Mais comme $\text{Tr}\,(A) = n$, on ne peut avoir (car $j + j^2 = -1 < 2$ et $0 < 1$) que 1 sur la diagonale ainsi 1 est la seule valeur propre de A. Alors A est inversible et $A^3 = I_n$ donc A est diagonalisable (scindé à racines simples) et on n'a que des 1 sur la diagonale donc $A = I_n$ (seule solution).

6.42 **a.** Par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$ et on a donc $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.

b. Si M est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(M) = 0$ donc $P(A) = 0$ et A l'est aussi. De plus $AP'(A) = 0$ donc XP' est annulateur de A et si λ est valeur propre de A alors $P(\lambda) = 0 = \lambda P'(\lambda)$; mais comme les racines de P sont simples, P et P' n'ont pas de racines communes d'où $\lambda = 0$ et 0 est la seule valeur propre de A. Comme A est diagonalisable : $A = 0$.

Par conséquent : M diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

6.43 **a.** Soit $(a, b) \in Sp(A) \times Sp(B)$, comme $\chi_B = \chi_{{}^tB}$, b est aussi valeur propre de ${}^tB$. Par définition d'une valeur propre, il existe $(U, V) \in \big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}\big)^2$ tel que $AU = aU$ et ${}^tBV = bV$ qui s'écrit aussi ${}^tVB = b\,{}^tV$.

Comme U et V sont non nulles, si on écrit ${}^tU = (u_1 \cdots u_n)$ et ${}^tV = (v_1 \cdots v_n)$, il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $u_{i_0} \neq 0$ et $j_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $v_{j_0} \neq 0$. Alors, $M = U\,{}^tV = (u_iv_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $M \neq 0$ car $u_{i_0}v_{j_0} \neq 0$. De plus $\varphi(M) = \varphi(U\,{}^tV) = AU\,{}^tV - U\,{}^tVB = aU\,{}^tV - bU\,{}^tV = (a-b)U\,{}^tV$ donc $a - b \in Sp(\varphi)$ car $M \neq 0$.

b. Comme B est diagonalisable, il existe Q inversible et D diagonale telles que $B = QDQ^{-1}$ ce qui donne ${}^tB = ({}^tQ)^{-1}D\,{}^tQ$ car ${}^tD = D$ et que $({}^tQ)^{-1} = {}^t(Q^{-1})$ (classique) : ceci prouve aussi que ${}^tB$ est diagonalisable. Ainsi, il existe deux bases $(U_1, \cdots, U_n)$ et $(V_1, \cdots, V_n)$ de $\mathbb{C}^n$ (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) formées de vecteurs propres de A et de ${}^tB$ respectivement. Considérons la famille $\mathcal{F} = \big(U_i\,{}^tV_j\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elle est composée de vecteurs propres de φ d'après la question **a.** et son cardinal est n^2, la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; pour montrer que $\mathcal{F}$ est une base, il suffit donc de montrer qu'elle est libre ou génératrice.

Méthode 1 : soit une famille $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de n^2 scalaires telle que $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}U_i\,{}^tV_j = 0$, alors la p-ième colonne de cette matrice vaut $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}v_{p,j}U_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}v_{p,j} \Big) U_i = 0$ si on pose ${}^tV_j = (v_{1,j} \ \cdots \ v_{n,j})$. Comme la famille $(U_1, \cdots, U_n)$ est une base (donc libre), on en déduit que $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}v_{p,j} = 0$ ce qui montre, puisque ceci est vrai pour tout $p \in [\![1;n]\!]$, que $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}V_j = 0$. À nouveau, comme $(V_1, \cdots, V_n)$ est une base (donc libre), tous les $a_{i,j}$ sont nuls, ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Méthode 2 : en notant $E_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que ${}^tE_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ (avec le 1 en k-ième position), la famille $(E_1, \cdots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]$, alors $E_{i,j} = E_i\,{}^tE_j$. Or

$(U_1,\cdots,U_n)$ est une base (donc génératrice) donc il existe $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$ tel que $E_i=\sum\limits_{p=1}^{n}\alpha_p E_p$. De même, $(V_1,\cdots,V_n)$ est une base (donc génératrice) donc il existe $(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{C}^n$ tel que $E_j=\sum\limits_{q=1}^{n}\beta_q E_q$. $E_{i,j}=\Big(\sum\limits_{p=1}^{n}\alpha_p E_p\Big)\Big(\sum\limits_{q=1}^{n}\beta_q {}^tE_q\Big)=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\alpha_i\beta_j E_i {}^tE_j=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\alpha_i\beta_j E_{i,j}$ par linéarité de la transposition. La famille $\mathcal{F}$ engendre donc les vecteurs de la base canonique $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc elle engendre toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (par transitivité). Ainsi, $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On a donc prouvé que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Or celle-ci est formée avec des vecteurs propres de l'endomorphisme φ, ce qui justifie que φ est diagonalisable.

c. Comme χ_A est unitaire par construction et scindé sur $\mathbb{C}$ par D'ALEMBERT-GAUSS, si $a_1,\cdots,a_r$ sont les valeurs propres distinctes de A, on peut écrire $\chi_A=\prod\limits_{i=1}^{r}(X-a_i)^{m_{a_i}(A)}$ d'où $\chi_A(C)=\prod\limits_{i=1}^{r}(C-a_iI_n)^{m_{a_i}(A)}$. Comme $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe multiplicatif, on a $\chi_A(C)\in GL_n(\mathbb{C})\iff\forall i\in[\![1;n]\!],\ C-a_iI_n\in GL_n(\mathbb{C})$. On peut aussi le justifier par le déterminant (qui est une fonction multiplicative), en écrivant que l'on a $\chi_A(C)\in GL_n(\mathbb{C})\iff\det(\chi_A(C))\neq 0\iff\prod\limits_{i=1}^{r}(\det(C-a_iI_n))^{m_{a_i}(A)}\neq 0\iff\forall i\in[\![1;r]\!],\ \det(C-a_iI_n)\neq 0$. Or $C-a_iI_n\in GL_n(\mathbb{C})\iff \mathrm{Ker}(C-a_iI_n)=\{0\}\iff a_i\notin Sp(A)$, ainsi on a l'équivalence souhaitée : $\chi_A(C)\in GL_n(\mathbb{C})\iff(\forall i\in[\![1;n]\!],\ a_i\notin Sp(C))\iff Sp(A)\cap Sp(C)=\emptyset$.

d. Soit $\lambda\in Sp(\varphi)$, alors il existe $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M\neq 0$ et $AM-MB=\lambda M\iff AM=M(B+\lambda I_n)$. Posons $C=B+\lambda I_n$ de sorte que $AM=MC$. Par une récurrence simple, on montre que $\forall p\in\mathbb{N},\ A^pM=MC^p$ donc, en posant $P=\sum\limits_{p=0}^{+\infty}a_pX^p\in\mathbb{C}[X]$, cela donne $P(A)M=\sum\limits_{p=0}^{+\infty}A^pM=\sum\limits_{p=0}^{+\infty}MC^p=MP(C)$. Prenons maintenant $P=\chi_A$, alors d'après CAYLEY-HAMILTON on a $\chi_A(A)=0$ d'où $M\chi_A(C)=0$. Comme $M\neq 0$, on a forcément $\chi_A(C)$ non inversible (sinon on pourrait écrire $M\chi_A(C)(\chi_A(C))^{-1}=M=0$ NON !) donc, d'après la question précédente, il existe a dans $Sp(A)\cap Sp(C)$. Ceci montre l'existence de $X\neq 0$ tel que $CX=aX$ donc $BX+\lambda X=aX\iff BX=(a-\lambda)X$ ce qui montre que $(a-\lambda)$ est une valeur propre de B car $X\neq 0$. En posant $b=a-\lambda\in Sp(B)$, on a bien $\lambda=a-b$ avec $a\in Sp(A)$ et $b\in Sp(B)$ comme attendu.

6.44 **a.** Il suffit de se rendre compte que X^2-X (scindé à racines simples) annule A^2 pour voir que A^2 est diagonalisable. Ensuite, on calcule $(A^2-A)^2$ et on trouve 0.
b. Même chose en prenant $A^{2k}=A^k$ donc si $p=k$, on a X^2-X qui annule A^p. On montre ensuite que $(A^{2k}-A^k)^k=0$ en développant avec le binôme de NEWTON car $\forall j\geqslant k,\ A^j=A^k$.

6.3 Trigonalisation et diagonalisation simultanée

6.45 Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on sait que M est trigonalisable. Il existe donc $P\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP=T$ triangulaire supérieure avec $(\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)$ sur la diagonale ($\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ distincts deux à deux et λ_k étant répété $m_k\geqslant 1$ fois). Il suffit de modifier légèrement (pour $n\in\mathbb{N}$ de maximum $\frac{1}{2^n}$ en module par exemple) les coefficients diagonaux de T de manière à ce qu'ils deviennent tous distincts deux à deux et le tour est joué : pour $n\in\mathbb{N}$, il existe donc T_n triangulaire supérieure avec des valeurs propres distinctes deux à deux donc T_n diagonalisable telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=T$ (en effet, par construction $||T_n-T||_\infty\leqslant\frac{1}{2^n}$. On conclut avec la continuité de l'application $N\to PNP^{-1}$.

6.46 **a.** On est en dimension finie donc toutes les normes sont équivalentes ; on utilise la définition de cette équivalence et le fait que $\forall \alpha > 0,\ \lim\limits_{k \to +\infty} \alpha^{\frac{1}{k}} = 1$.
b. Si B est semblable à A, il existe P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Comme le produit matriciel est bilinéaire, il existe $M \geqslant 0$ tel que $N(UV) \leqslant MN(U)N(V)$ quelle que soit le norme N choisie. Or, $A^k = PB^kP^{-1}$, donc $N(A^k) \leqslant M^2N(P)N(B^k)N(P^{-1})$ et $N(B^k) \leqslant M^2N(P^{-1})N(B^k)N(P)$. On passe ces deux inégalités à la puissance $\frac{1}{k}$ et on passe à la limite pour établir que $\lim\limits_{k \to +\infty} N(B^k)^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$ par encadrement.
c. On écrit $T = I_n + N$ avec $N = T - I_n$ nilpotente d'ordre inférieur ou égal à n (classique) et, comme N et I_n commutent, on a $\forall k \geqslant n,\ T^k = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} N^i$. On écrit l'inégalité triangulaire et $1 \leqslant ||T^k||_\infty = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} ||N^i||_\infty$; le terme de droite est polynomial en k de degré maximum $n-1$ donc quand on élève tout à la puissance $\frac{1}{k}$, la limite vaut 1 à gauche et à droite et on conclut $\lim\limits_{k \to +\infty} ||T^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$ par le théorème des gendarmes.
d. On montre cette inégalité $||A^k||_\infty \leqslant ||B^k||_\infty$ par récurrence sur k avec la définition du produit matriciel. Ensuite, $\frac{A}{\rho(A)}$ a une valeur propre de module 1 et que des valeurs propres de modules inférieurs ou égaux à 1 par construction ; elle est trigonalisable donc est semblable à une matrice T dont les coefficients sont en module inférieur à 1 sur la diagonale. D'après **c.** et le début de **d.**, comme il,reste sur la diagonale de T^k un coefficient de module 1, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} ||T^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$ donc $\lim\limits_{k \to +\infty} ||A^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$ par homogénéité de la norme. On conclut avec **a.**.

6.47 **a.** Il suffit de vérifier que X_n est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or si on considère une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs propres de f canoniquement associé à A, on a $\forall k \in [\![1;n]\!],\ f(v_k) = \lambda_k v_k$ avec $\lambda_k > 0$. Ainsi : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et P inversible.
Si g_n est canoniquement associé à X_n on a : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ g_0(v_k) = 1.v_k$ (initialisation).
Ensuite $\forall k \in [\![1;n]\!],\ g_1(v_k) = \frac{1}{2}\Big(v_k + \lambda_k v_k\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \lambda_k\Big)v_k$ donc X_1 est diagonalisable dans la même base $\mathcal{B}$ avec des valeurs propres $\frac{1}{2}\Big(1 + \lambda_k\Big)$ strictement positives. On continue pour vérifier que X_n est toujours diagonalisable (dans $\mathcal{B}$) avec des valeurs propres strictement positives, car si $x > 0$ alors $\frac{1}{2}\Big(x + \frac{\lambda_k}{x}\Big) > 0$.
b. Par l'algorithme de HÉRON, pour $k \in [\![1;n]\!]$, la suite définie par $x_{k,0} = 1$, $\forall p \in \mathbb{N},\ x_{k,p} = \frac{2}{1}\Big(x_{k,p} + \frac{\lambda_k}{x_{k,p}}\Big)$ converge (très très vite) vers $\sqrt{\lambda_k}$. On a donc $\lim\limits_{p \to +\infty} \mathrm{diag}(x_{1,p}, \cdots, x_{n,p}) = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) = \Delta$. Or, clairement $\Delta^2 = D$; ainsi, par continuité de $N \mapsto PNP^{-1}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = P\Delta P^{-1} = X$ qui vérifie $X^2 = A$.
c. D'après ce qui précède, comme A et X_n sont codiagonalisables, elles commutent donc A et X_n^{-1} commutent aussi. Ainsi, on montre par récurrence que X_n est symétrique et ainsi $X = \sqrt{A}$ l'est aussi comme limite de suites symétrique ($\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé : le justifier).

6.48 **a.** La linéarité de T est claire et par inégalité triangulaire, on a $||T(f)||_\infty \leqslant ||f||_\infty$ donc T est continue et $|||T||| \leqslant 2$. Il suffit de prendre $f = 1$ pour avoir l'égalité donc $|||T||| = 2$.
b. Comme $|f|$ est non nulle et continue sur un segment, elle atteint sa borne supérieure donc il existe $x_0 \in]0;1]$ tel que $|f(x_0)| = ||f||_\infty$. Ensuite, il suffit de se servir de la continuité de f en 0 avec $f(0) = 0$.
1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 2, si une fonction non constante g était aussi un vecteur propre associé à la valeur propre 2, on poserait $f = g - g(0).1 \in E_2(T)$ et on aurait par une récurrence simple $T^n(f) = 2^n f$ sauf que pour n assez grand (qui vérifie $\frac{1}{2^n} \leqslant x_0$), on aurait $T^n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big)$ qui ne pourrait pas être de norme 2^n d'après l'inégalité stricte du début de la question **b.** (à justifier rigoureusement). Ainsi $E_2(T) = \mathrm{Vect}(1)$.

6.49 A est trigonalisable donc semblable à T où la diagonale de T est composée des valeurs propres de A répétées avec leurs ordres de multiplicité : $A = QTQ^{-1}$. Alors $P(A)$ est semblable à $P(T)$ ($P(A) = QP(T)Q^{-1}$) dont on connaît la diagonale. Ainsi, si $\chi_A = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$, alors $\chi_{P(A)} = \prod\limits_{k=1}^{n} \big(X - P(\lambda_k)\big)$.

6.50 On calcule et on trouve $\chi_A = (X-1)^3$ alors que $A - I_3$ est de rang 2 et $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ est une droite engendrée par $v_1 = (1,0,1)$. On peut rendre (c'est la réduction de JORDAN évoquée en cours mais hors programme) A semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (car $(A - I_3)^3 = 0$ et $(A - I_3)^2 \neq 0$) en choisissant v_2 tel que $f(v_2) = v_2 + v_1$ et $f(v_3) = v_3 + v_2$ si f est canoniquement associé à A ; on trouve par des calculs fastidieux $v_2 = (0,1,0)$ et $v_3 = (0,-1,1)$ donc si $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A = PTP^{-1}$.

6.4 Exercices posés aux étudiants de PSI1

6.51 Le cas où tous les a_k et les b_k sont nuls équivaut au fait que la matrice A est nulle et alors elle est clairement diagonalisable. Nous supposerons dans la suite que $A \neq 0$ donc $\exists k \in [\![1;n]\!],\ a_k \neq 0$ et $b_k \neq 0$.

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 & 0 \\ a_1b_2 & a_1b_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}b_n & \vdots \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_{n-1} & a_nb_n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & s \end{pmatrix}$ avec $s = \sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k$ donc $\mathrm{Tr}\,(A^2) = 2s = 2\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k$.

($\Longrightarrow$) Supposons A diagonalisable, alors il existe $P \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ donc $A^2 = PD^2P^{-1}$. Comme D^2 est diagonale, A^2 est aussi diagonalisable. Bien sûr, on montrerait de même que A^k est diagonalisable. Comme $A \neq 0$, il existe au moins une valeur propre $\mu \neq 0$ de A et comme on a $\mathrm{Tr}\,(A^2) = \sum\limits_{\lambda \in Sp(A)} \lambda^2 = 2\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k \geqslant \mu^2 > 0$ car toutes les valeurs propres sont réelles.

($\Longleftarrow$) Supposons $\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k > 0$, on sait que A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$, or elle est de rang 1 (si tous les a_k sont nuls ou si tous les b_k sont nuls) ou de rang 2 si au moins un des a_k est non nul et un des b_k non nul. La liste des valeurs propres de A est donc $(0,\cdots,0,\lambda_1,\lambda_2)$ avec 0 répété au moins $n-1$ fois, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ ($\lambda_1 = 0$ par exemple si A est seulement de rang 1).
Mais comme A est semblable (dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$) à une matrice triangulaire supérieure T avec sur la diagonale $0,\cdots,0,\lambda_1,\lambda_2$, on a $\mathrm{Tr}\,(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\mathrm{Tr}\,(A^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2\lambda_1^2 = 2\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k$. Ainsi, par exemple $\lambda_1 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k}$ et $\lambda_2 = -\lambda_1$ sont deux valeurs propres simples de A et comme $\mathrm{rang}\,(A) = 2$, A est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$) car $\dim(E_0(A)) + \dim(E_{\lambda_1}(A)) + \dim(E_{\lambda_2}(A)) = n - 1 + 1 + 1 = n + 1$.

6.52 **a.** Tout d'abord, la matrice K est symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral. Les deux premières colonnes de K ne sont pas proportionnelles et la troisième vaut la première, d'où $\mathrm{rang}\,(K) = 2$. D'après le théorème du rang, on a donc $\dim(\mathrm{Ker}(K)) = 3 - \mathrm{rang}\,(K) = 1$ donc $\mathrm{Ker}(K)$ est une droite et comme $(1,0,-1) \in \mathrm{Ker}(K)$, on a donc $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}((1,0,-1))$. Pour trouver les deux autres valeurs propres, on calcule $\chi_K(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda$ donc $\chi_K = X^3 - 2X$ et les autres valeurs propres sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. On résout $KX = \sqrt{2}X$ et $KX = -\sqrt{2}X$ pour avoir $E_{\sqrt{2}}(K) = \mathrm{Vect}((1,\sqrt{2},1))$

et $E_{-\sqrt{2}}(K) = \mathrm{Vect}((1, -\sqrt{2}, 1))$. Comme K possède trois valeurs propres distinctes en dimension 3, K est diagonalisable (on le savait déjà) et $K = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. $K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $M = aI_3 + cK + b(K^2 - I_3) = (a-b)I_3 + cK + bK^2$.

c. Comme $K^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1}$, on a $M = P((a-b)I_3 + cD + bD^2)P^{-1} = PD'P^{-1}$ en posant la matrice $D' = \mathrm{diag}(a-b, a+b+c\sqrt{2}, a+b-c\sqrt{2})$. Par calculs, on trouve $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D'^n = \begin{pmatrix} (a-b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (a+b+c\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (a+b-c\sqrt{2})^n \end{pmatrix}$ et $M^n = PD'^nP^{-1}$ ce qui donne au final
$M^n = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a-b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (a+b+c\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (a+b-c\sqrt{2})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

6.53 Comme A est inversible, en multipliant par A^{-1}, on a $A^2 - 4A + 3I_3 = 0$.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ donc $A^2 = \lambda^2 X$ et $(A^2 - 4A + 3I_3)X = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)X = 0$ donc $\lambda = 3$ ou $\lambda = 1$. En considérant A comme matrice complexe, un résultat du cours nous dit que $\mathrm{Tr}\,(A)$ est la somme des valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité : or pour faire $\mathrm{Tr}\,(A) = 5$ avec trois termes parmi des 1 et des 3, on ne peut avoir que $5 = 3 + 1 + 1$: ainsi : $\chi_A = (X-1)^2(X-3)$.
On aurait pu dire (en avançant dans le cours) que comme A annule un polynôme scindé à racines simples $P = (X-1)(X-3)$, alors A est diagonalisable (mais ce n'est pas demandé ici) et que ses valeurs propres sont les parmi les racines de P et avoir le même résultat. La matrice A est donc n'importe quelle matrice de la forme $A = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(1, 1, 3)$.

6.54 On considère deux cas :

• Si A est inversible, on a $BA = A^{-1}(AB)A$ donc BA et AB sont semblables et $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ donc les spectres de ces deux matrices sont les mêmes.
• Si A n'est pas inversible, 0 est racine de χ_A et en notant $\alpha = \{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A),\ \lambda \neq 0\} > 0$, on a pour tout p suffisamment grand (tel que $\dfrac{1}{p} < \alpha$) $A_p = A - \dfrac{1}{p}I_n \in GL_n(\mathbb{C})$. Par le premier cas : $\chi_{A_pB} = \chi_{BA_p}$.
Il reste à passer à la limite en constatant que, clairement $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p = A$, que les applications $M \mapsto MB$ et $M \mapsto BM$ sont continues car linéaires en dimension finie donc $\lim\limits_{p\to+\infty} A_pB = AB$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} BA_p = BA$, que le déterminant est une application continue donc que pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé : $\lim\limits_{p\to+\infty} \det(A_pB - \lambda I_n) = \det(AB - \lambda I_n)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \det(BA_p - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$. De tout ceci on déduit que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$ donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ et ces deux matrices ont mêmes valeurs propres.

6.55 **a.** Pour un polynôme P de l'espace E, on a $P(t)e^t \underset{-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t}^2\right)$ par croissance comparée ce qui prouve que $t \mapsto P(t)e^t$ est intégrable sur $]-\infty; x]$ donc que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)e^t dt$ converge.

b. $L(1)(x) = e^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^t dt = e^{-x}\left[e^t\right]_{-\infty}^{x} = 1$ donc $L(1) = 1 \in E$. Si on suppose que $L(X^k)$ est un polynôme de degré inférieur $k \in [\![0; n-1]\!]$ alors $L(X^{k+1})(x) = e^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} t^{k+1}e^t dt = e^{-x}\left([t^{k+1}e^t]_{-\infty}^{x} - (k+1)\int_{-\infty}^{x} t^k e^t dt\right)$ par IPP (les fonctions sont de classe C^1 sur $]-\infty; x]$ et le crochet converge). Ainsi $L(X^{k+1}) = X^{k+1} - (k+1)L(X^k)$. On en déduit que $L(X^{k+1})$ est bien un polynôme et qu'il est bien de degré inférieur ou égal à $k+1$. Comme la linéarité de L est claire, L est bien un endomorphisme de E.
La relation précédente montre par récurrence que $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $L(X^k)$ est un polynôme unitaire de degré k. En écrivant la matrice A de L dans la base canonique de E, on constate que A est triangulaire supérieure

avec des 1 sur la diagonale. Ainsi $\chi_L = (X-1)^{n+1}$. L n'a donc qu'une seule valeur propre 1.
• Si L était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale : I_{n+1}. On aurait alors $A = QI_{n+1}Q^{-1} = I_{n+1}$ ce qui est absurde car $L \neq \mathrm{id}_E$: en effet $L(X) = X - 1 \neq X$.
• Ou alors, si $P \in E$ tel que $L(P) = P$, comme $\forall x \in \mathbb{R},\ L(P)(x)e^x = \int_{-\infty}^{x} P(t)e^t dt$, en dérivant, pour $x \in \mathbb{R}$, $L(P)(x) + L(P)'(x) = P(x)$ donc $P + P' = P \Longrightarrow P' = 0 \Longrightarrow P$ constant. Alors $E_1(L) = \mathbb{R}_0[X] \neq E$: L non DZ.
• Ou alors : L diagonalisable $\Longleftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(L)} E_\lambda(L) = E_1(L) \Longleftrightarrow L = \mathrm{id}_E$ ce qui est clairement faux.
Par trois méthodes différentes (mais pas si éloignées que ça) on arrive à prouver que f n'est pas diagonalisable.

6.56 **a.** $M = (a-b)I_n + bJ$ où J est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1. Comme J est de rang 1, on a $\det(J) = 0$ donc $\det((a-b)I_n - M) = 0$ ainsi $\lambda_1 = a - b$ est une valeur propre. De plus, comme rang $((a-b)I_n - M) = 1$ car $b \neq 0$, on a $\dim(E_{a-b}(M)) = n - 1$ donc $a - b$ est au moins valeur propre d'ordre $n-1$ de M. Il reste à voir que $\mathrm{Tr}\ (M) = na$ pour affirmer que la valeur propre (a priori complexe) manquante est $\mathrm{Tr}\ (A) - (n-1)(a-b) = (n-1)b + a = \lambda_2$ (et elle est bien sûr réelle). Comme $\lambda_2 \neq \lambda_1$, le sous-espace propre associé à λ_2 ne peut être qu'une droite et on constate qu'elle est engendrée par le vecteur $(1, \cdots, 1)$. De même $E_{a-b}(M) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, \cdots, e_1 - e_3, \cdots, e_1 - e_n)$.
Comme $\dim(E_{\lambda_1}(M)) + \dim(E_{\lambda_2}(M))n$, M est diagonalisable. On vient aussi de trouver une base de vecteurs propres de M. On en déduit que $\chi_M = (X - a + b)^{n-1}(X - a - (n-1)b)$.
b. M est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de M donc si $a \notin \{b, -(n-1)b\}$.
Dans ce cas, on cherche M^{-1} sous la même forme que M : $M^{-1} = N = \alpha I_n + \beta J$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. En calculant $MN = (a-b)\alpha I_n + ((a-b)\beta + \alpha b + nb\beta)J$ car $J^2 = nJ$. Comme (I_n, J) est libre on résout le système $(a-b)\alpha - 1 = (a-b)\beta + \alpha b + nb\beta = 0$: $\alpha = \dfrac{1}{a-b}$ et $\beta = -\dfrac{b}{(a-b)(a+(n-1)b)}$ et $M^{-1} = \alpha I_n + \beta J$.
On pouvait aussi dire (en avançant dans le cours), que comme M est diagonalisable, $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ est annulateur de M donc $M(M - (\lambda_1 + \lambda_2)I_n) = \lambda_1\lambda_2 I_n$ d'où l'on déduit que $M^{-1} = \dfrac{M - (\lambda_1 + \lambda_2)I_n}{\lambda_1\lambda_2}$.
c. On calcule $M^2 = (a-b)^2 I_n + 2b(a-b)J + b^2J^2 = (a-b)^2 I_n + (2(a-b) + nb)bJ$ car $J^2 = nJ$. Donc $M^2 = (2(a-b) + nb)M + ((a-b)^2 - (2(a-b) + nb)(a-b))I_n = (2a + (n-2)b)M - (a-b)(a-b+nb)I_n$. Par conséquent le polynôme $P = (X - a + b)(X - a - (n-1)b)$ est annulateur de M. Pour $p \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^p par P et on trouve $X^p = PQ + uX + v$ et en évaluant en $a-b$ et $a+(n-1)b$, on trouve $u(a-b) + v = (a-b)^p$ et $u(a+(n-1)b) + v = (a+(n-1)b)^p$ ce qui donne $u = \dfrac{(a+(n-1)b)^p - (a-b)^p}{nb}$ et $v = \dfrac{(a+(n-1)b)(a-b)^p - (a-b)(a+(n-1)b)^p}{nb}$. Comme $M^p = P(M)Q(M) + uM + vI_n$ et $P(M) = 0$:
Ainsi $M^p = \dfrac{(a+(n-1)b)^p - (a-b)^p}{nb}M + \dfrac{(a+(n-1)b)(a-b)^p - (a-b)(a+(n-1)b)^p}{nb}I_n$.

6.57 **a.** On écrit par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $A^2 = -I_2$, $A^3 = -A$ et $A^4 = (A^2)^2 = I_2$ ce qui prouve que A est d'ordre 4 ; cela signifie que $A^4 = I_2$ et que $\forall k \in [\![1;3]\!],\ A^k \neq I_2$.
De même, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = I_3$: B est d'ordre 3 car $B^3 = I_3$ et que $\forall k \in [\![1;2]\!],\ B^k \neq I_3$.

Par récurrence, on montre facilement que $\forall p \in \mathbb{N},\ M^p = \begin{pmatrix} A^p & 0 \\ 0 & B^p \end{pmatrix}$. Puisque A est d'ordre 4, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, si $n = 4p$ alors $A^n = A^{4p} = (A^4)^p = I_2^p = I_2$. Réciproquement, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = I_2$, on effectue la division euclidienne de n par 4, à savoir $n = 4q + r$ avec $r \in [\![0;3]\!]$ et on a $A^n = A^{4q+r} = (A^4)^q A^r = A^r$ donc $r = 0$ par définition de l'ordre. Ainsi, $n = 4q$ est un multiple de 4. On vient de montrer l'équivalence : $A^n = I_2 \Longleftrightarrow 4|n$. Bien sûr, de même, $B^n = I_3 \Longleftrightarrow 3|n$. Ainsi, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, $M^n = I_5 \Longleftrightarrow (A^n = I_2$ et $B^n = I_3) \Longleftrightarrow (4|n$ et $3|n) \Longleftrightarrow 12|n$ puisque ppcm $(3,4) = 12$. Par conséquent, M est d'ordre 12, c'est-à-dire que $M^{12} = I_5$ et que $\forall k \in [\![1;11]\!],\ M^k \neq I_5$.

b. Comme $M^{12} = I_5$, le polynôme $P = X^{12} - 1$ est annulateur de M. Or, $X^{12} - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ car ses 12 racines sont les 12 racines douzième de l'unité d'expression $e^{\frac{ik\pi}{12}}$ avec $k \in [\![0;11]\!]$ et elles sont toutes distinctes. On déduit du cours que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$. On sait aussi que les valeurs propres de M sont parmi les racines de P donc que $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{U}_{12}$. On n'a bien sûr pas égalité puisqu'on sait que card $(\mathrm{Sp}(A)) \leqslant 5$ alors que card $(\mathbb{U}_{12}) = 12$.

c. D'après la décomposition par blocs de M, les sous-espaces $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $\mathrm{Vect}(e_3, e_4, e_5)$ sont stables par M et il est donc hors de question de prendre x dans l'un de ces deux sous-espaces pour avoir une base $\big(x, m(x), m^2(x), m^3(x), m^4(x)\big)$. Il suffit par contre de prendre un vecteur x "à cheval" sur ces deux sous-espaces, par exemple $x = e_1 + e_3$. Alors $m(x) = e_2 + e_4$, $m^2(x) = -e_1 + e_5$, $m^3(x) = -e_2 + e_3$, $m^4(x) = e_1 + e_4$ et $m^5(x) = e_2 + e_5$. Un calcul simple (déterminant ou système) montre que la famille $\mathcal{B} = \big(x, m(x), m^2(x), m^3(x), m^4(x)\big)$ est libre donc que c'est une base de $\mathbb{R}^5$ puisqu'elle comporte 5 vecteurs.

Comme on obtient $m^5(x) = m^2(x) + e_2 + e_1 = m^2(x) - m^3(x) + x$, Mat $_{\mathcal{B}}(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$: l'endomorphisme m est dit cyclique car il existe une base de $\mathbb{C}^n$ de la forme $\big(x, m(x), m^2(x), m^3(x), m^4(x)\big)$. De plus, on reconnaît la matrice compagnon de $Q = X^5 + X^3 - X^2 - 1$ ce qui fait que le polynôme caractéristique de M vaut $\chi_M = Q = (X^2 + 1)(X^3 - 1)$ et le spectre de M vaut donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{i, -i, 1, j, j^2\} \subset \mathbb{U}_{12}$. On pouvait bien sûr trouver directement ce résultat car, en calculant par blocs, $\chi_M = \chi_A \times \chi_B = (X^2+1)(X^3-1)$.

6.58 **a.** Considérons le reste de la division euclidienne de χ_A par $X - \lambda$: $\chi_A = (X - \lambda)P + P\chi_A(\lambda)$.

Alors $\chi_A(A) = (A - \lambda I_n)P(A) + \chi_A(\lambda)I_n$. Or d'après le théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_A(A) = 0$.

De plus $\chi_A(\lambda) \neq 0$ car λ n'est pas valeur propre de A. Ainsi : $(A -_\iota I_n)\Big(\dfrac{P(A)}{\chi_A(\lambda)}\Big) = I_n$ ce qui garantit que $(A - \lambda I_n)^{-1} = \dfrac{P(A)}{\chi_A(\lambda)}$ est bien un polynôme en A (et même de degré inférieur ou égal à $n - 1$). On pouvait aussi utiliser $\chi_{A-\lambda I_n}$ et se servir du fait qu'un polynôme en $A - \lambda I_n$ est un polynôme en A.

b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ qui ne sont pas dans le spectre de A. Posons, pour $i \in [\![1;k]\!]$, le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_i = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \Big(\dfrac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}\Big)$. Notons aussi $P = \prod\limits_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. Alors comme toutes les matrices $(A - \lambda_i I_n)_{1\leqslant i\leqslant k}$ sont inversibles car les $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ ne sont pas des valeurs propres de A : la matrice $P(A) = \prod\limits_{i=1}^{k}(A - \lambda_i I_n)$ est inversible et $\forall i \in [\![1;k]\!]$, $(A - \lambda_i I_n)P_i(A) = P(A)$ donc $(A - \lambda_i I_n)^{-1} = P(A)^{-1}P_i(A)$.

La famille $(P_1, \cdots, P_k)$ constitue une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ car si $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i P_i = 0$, en évaluant en λ_i, on trouve $\alpha_i = 0$.

Par conséquent, en notant π un polynôme annulateur unitaire de A de degré k, le polynôme $P - \pi$ est dans $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ car ces deux polynômes sont de degré k et unitaires. Ainsi il existe des constantes $(c_1, \cdots, c_k)$ telles que $P - \pi = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i P_i$. En évaluant en la matrice A, cela donne $P(A) - \pi(A) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i P_i(A) = P(A)$. Il suffit de multiplier tout ceci par $P(A)^{-1}$ pour obtenir grâce à ce qui précède $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(A - \lambda_i I_n)^{-1} = I_n$.

6.59 Par définition, si $P = a_nX^n + \cdots + a_0$ on a $f(P) = X^n\left(\frac{a_n}{X^n} + \cdots + a_0\right) = a_0X^n + \cdots + a_n$.

Appliquer f revient donc à inverser l'ordre des coefficients dans le polynôme P. La linéarité de f est claire et le fait que $f(P) \in E$ si $f \in E$. f est donc un endomorphisme de E et on a aussi clairement $f^2 = \mathrm{id}_E$ donc f est une symétrie de E. On sait d'après le cours de sup. qu'alors $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$ ce qui s'écrit aussi $E = E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$. Ainsi f est diagonalisable et une base de vecteurs propres est composée de vecteurs des deux sous-espaces propres.
Or $P \in E_{-1}(f) \iff a_nX^n + \cdots + a_0 = -(a_0X^n + \cdots + a_n) \iff (a_0 + a_n = a_1 + a_{n-1} = \cdots = 0)$: ces polynômes sont dits anti-réciproques. $\dim\left(E_{-1}(f)\right) = 2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ avec pour base $(X^n - 1, X^{n-1} - X, \cdots)$.
Or $P \in E_1(f) \iff a_nX^n + \cdots + a_0 = a_0X^n + \cdots + a_n \iff (a_0 - a_n = a_1 - a_{n-1} = \cdots = 0)$: ces polynômes sont dits réciproques. $\dim\left(E_1(f)\right) = n + 1 - 2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ avec pour base $(X^n + 1, X^{n-1} + X, \cdots)$.

Hors propos ici mais intéressant : pour trouver les racines de ces polynômes, on pose $Y = X + \frac{1}{X}$ (ou $Y = X - \frac{1}{X}$) et la recherche des racines de P se ramène à celle d'un polynôme Q de degré moitié (ou presque) car (les formules sont analogues dans le cas anti-réciproque) $X^2 + \frac{1}{X^2} = Y^2 - 2$ (voilà pour l'initialisation) et $X^{n+1} + \frac{1}{X^{n+1}} = \left(X + \frac{1}{X}\right) \times \left(X^{n+1} + \frac{1}{X^{n+1}}\right) - \left(X^{n-1} + \frac{1}{X^{n-1}}\right)$ (hérédité) avec par exemple $X^3 + \frac{1}{X^3} = Y^3 - 3Y$.
Par exemple si $P = X^7 + 3X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 2X^2 + 3X + 1$. Comme $\deg(P)$ est impair, -1 est racine évidente de P donc $P = (X+1)(X^6 + 2X^5 + 4X^3 + 2X + 1) = (X+1)X^3(Y^3 - 3Y + 2Y^2 - 4 + 4)$ ce qui donne après factorisation : $P = (X+1)X^3Y(Y-1)(Y+3) = (X+1)(X^2+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + 3X + 1)$.

6.60 **a.** Comme $u \circ v = 0$ se traduit par $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$. on va traiter deux cas :

- Si $v = 0$, tout vecteur non nul est propre pour v. Comme on travaille sur le corps $\mathbb{C}$, χ_u est scindé donc u admet au moins une valeur propre λ et donc au moins un vecteur propre x associé à λ. Alors x est un vecteur propre commun à u et v.
- Si $v \neq 0$, alors soit $\tilde{v}$ l'endomorphisme v induit dans $\mathrm{Im}\,(v) \neq \{0_E\}$ (stable par v). À nouveau, comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe un vecteur propre x de $\tilde{v}$ associé à une valeur propre α : $v(x) = \alpha x$. Comme $x \in \mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$, on a $u(x) = 0_E = 0.x$ donc x est vecteur propre commun à u et v.

Dans les deux cas, si $u \circ v = 0$, il existe un vecteur propre commun à u et v.

b. Supposons que $u \circ v = \alpha u + \beta v$, alors $(u - \beta \mathrm{id}_E) \circ (v - \alpha \mathrm{id}_E) = \alpha\beta \mathrm{id}_E$.

- si $\alpha\beta = 0$, par le cas précédent et $u - \beta \mathrm{id}_E$ et $v - \alpha \mathrm{id}_E$ ont un vecteur propre commun donc u et v aussi. En effet, si $x \in E$ vérifie $(u - \alpha \mathrm{id}_E)(x) = \lambda x$ et $(v - \beta \mathrm{id}_E)(x) = \mu x$, alors $u(x) = (\alpha + \lambda)x$ et $v(x) = (\beta + \mu)x$.
- si $\alpha\beta \neq 0$, $\left(\frac{u - \beta \mathrm{id}_E}{\beta}\right) \circ \left(\frac{v - \alpha \mathrm{id}_E}{\alpha}\right) = \mathrm{id}_E$ donc $\frac{u - \beta \mathrm{id}_E}{\beta}$ et $\frac{v - \alpha \mathrm{id}_E}{\alpha}$ sont des automorphismes de E réciproques l'un de l'autre. Soit x un vecteur propre de u, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u(x) = \lambda x$ (avec $\lambda \neq \beta$ puisque $u - \beta \mathrm{id}_E$ est inversible). Alors $\frac{u - \beta \mathrm{id}_E}{\beta}(x) = \frac{\lambda - \beta}{\beta} x$, puis, en appliquant $\frac{v - \alpha \mathrm{id}_E}{\alpha} = \left(\frac{u - \beta \mathrm{id}_E}{\beta}\right)^{-1}$, $x = \frac{\lambda - \beta}{\beta} \frac{v - \alpha \mathrm{id}_E}{\alpha}(x)$ donc $v(x) = \left(\frac{\alpha\beta}{\lambda - \beta} + \alpha\right)x$ donc x est un vecteur propre commun à u et v.

c. On passe en mode matriciel et cela revient à montrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété suivante :
$\mathcal{P}(n) =$ "$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ AB \in \mathrm{Vect}(A, B) \Longrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\ P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont triangulaires sup.".
Si $n = 1$, c'est évident car toute matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure.
Soit $n \geqslant 2$, supposons $\mathcal{P}(n-1)$ vraie. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB \in \mathrm{Vect}(A, B)$ alors d'après la question précédente, il existe un vecteur propre X_1 commun à A et B. On complète (X_1) en une base

$\mathcal{B} = (X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{K}^n$ et on pose Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la matrice dont les colonnes sont justement $X_1, \cdots, X_n$. Si $AX_1 = \alpha X_1$ et $BX_1 = \beta X_1$, d'après la formule de changement de base, on a $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ et $Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \beta & * \\ 0 & B' \end{pmatrix}$. Or, par calcul par blocs, si $AB = \lambda A + \mu B$, on a $A'B' = \lambda A' + \mu B'$ donc $A'B' \in \mathrm{Vect}(A', B')$ et l'hypothèse de récurrence montre qu'il existe $P' \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ et T'_A, T'_B de taille $n-1$ et triangulaires supérieures telles que $A' = P'T'_AP'^{-1}$ et $B' = P'T'_BP'^{-1}$. En posant $P = Q\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & P' \end{pmatrix}$, on a bien $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $A = PT_AP^{-1}$ et $B = PT_BP^{-1}$ avec $T_A = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & T'_A \end{pmatrix}$ et $T_B = \begin{pmatrix} \beta & * \\ 0 & T'_B \end{pmatrix}$ triangulaires supérieures. L'hérédité est établie.

On conclut par principe de récurrence et en revenant au vectoriel que si $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v \in \mathrm{Vect}(u, v)$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de u et v sont simultanément triangulaires supérieures.

6.61 Il s'agit d'un cas particulier, pour des matrices 2×2, du produit de KRONECKER (qui est lui-même un cas particulier de produit tensoriel) qu'on note habituellement $A \otimes B$ plutôt que $F(A, B)$.

a. Par les opérations classiques du produit par blocs des matrices, on a, avec des notations claires :

$F(A_1, B_1)F(A_2, B_2) = \begin{pmatrix} a_1B_1 & b_1B_1 \\ c_1B_1 & d_1B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2B_2 & b_2B_2 \\ c_2B_2 & d_2B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1a_2 + b_1c_2)B_1B_2 & (a_1b_2 + b_1d_2)B_1B_2 \\ (c_1a_2 + d_1c_2)B_1B_2 & (c_1b_2 + d_1d_2)B_1B_2 \end{pmatrix}$ donc $F(A_1, B_1)F(A_2, B_2) = F(A_1A_2, B_1B_2)$ car $F(A_1A_2, B_1B_2) = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$.

b. • Par définition : $\mathrm{Tr}\,(F(A, B)) = a\mathrm{Tr}\,(B) + d\mathrm{Tr}\,(B) = (a + d)\mathrm{Tr}\,(B) = \mathrm{Tr}\,(A)\mathrm{Tr}\,(B)$.

• En notant $r = \mathrm{rang}\,(A)$ et $s = \mathrm{rang}\,(B)$, on sait (même si c'est hors programme) qu'il existe 4 matrices inversibles P, Q, P', Q' telles que $A = QJ_rP^{-1}$ et $B = Q'J_sP'^{-1}$.

Par la relation de la question **a.** : $F(Q^{-1}, Q'^{-1})F(A, B)F(P, P') = F(J_r, J_s) = J_{rs}$ alors que $F(P, P')$ (et aussi $F(Q, Q')$) est inversible puisque $F(P^{-1}, P'^{-1})F(P, P') = F(I_2, I_2) = I_2$. Ainsi $\mathrm{rang}\,(F(A, B)) = \mathrm{rang}\,(A)\mathrm{rang}\,(B)$.

• Si par exemple A n'est pas inversible, il existe $A' \neq 0$ telle que $AA' = 0$ (qui représente par exemple la projection sur $\mathrm{Ker}(A)$ parallèlement à n'importe quoi) donc $F(A, B)F(A', I_2) = F(0, B) = 0$ donc $F(A, B)$ n'est pas inversible car $F(A', I_2) \neq 0$. De même, si B n'est pas inversible, alors $F(A, B)$ ne l'est pas non plus.

Si maintenant A et B sont inversibles et en supposant par exemple que $a \neq 0$, si on effectue dans le calcul de $\det(F(A, B))$ les opérations de GAUSS $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{c}{a}L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{c}{a}L_2$, on a en utilisant les déterminants par blocs : $\det(F(A, B)) = a^2\det(B) \times \left(d - \frac{cb}{a}\right)^2\det(B) = (ad - bc)^2\det(B)^2 = \det(A)^2\det(B)^2$.

c. Si A et B sont diagonalisables, alors il existe deux matrices inversibles P et Q et deux matrices diagonales D et D' telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = QD'Q^{-1}$, alors $F(P^{-1}, Q^{-1})F(A, B)F(P, Q) = F(D, D')$ est diagonale donc $F(A, B)$ est diagonalisable car $F(P^{-1}, Q^{-1}) = F(P, Q)^{-1}$.

"A et B sont diagonalisables" est donc une condition suffisante de diagonalisabilité de $F(A, B)$!

6.62 **a.** Si $f \in E$, on a clairement $x \mapsto xf'(x)$ qui est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc $D(f) \in E$ et D est clairement linéaire : D est bien un endomorphisme de E.

b. Si $f \in \mathrm{Ker}(D)$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) = 0$ donc, par continuité de f' : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, f est constante. Ainsi $\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Vect}(1)$ (fonctions constantes) donc $0 \in \mathrm{Sp}(D)$.

c. Si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de D et $f \in \mathrm{Ker}(D - \lambda \mathrm{id}_E)$ avec $f \neq 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) = \lambda f(x)$.

On résout cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x > 0,\ f(x) = \alpha x^\lambda$ et $\forall x < 0,\ f(x) = \beta(-x)^\lambda$. De plus $f(0) = 0$. Comme f est continue en 0 et que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on a $\lambda > 0$. De plus, $\forall x > 0,\ f('x) = \alpha\lambda x^{\lambda-1}$ et $\forall x < 0,\ f'(x) = -\beta\lambda(-x)^{\lambda-1}$. Comme f' est aussi continue, on a $\lambda > 1$. Par récurrence, en se servant de la continuité de $f^{(n)}$ en 0, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda > n$ ce qui est impossible. Il n'existe aucune valeur de λ pour laquelle cette fonction peut être de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Ainsi : $\mathrm{Sp}(D) = \{0\}$.

d. Déjà, les fonctions de $\mathrm{Im}\,(D)$ s'annulent en 0 par définition de D. Réciproquement, soit g une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $g(0) = 0$. Par TAYLOR-YOUNG : $g(x) \underset{0}{=} xg'(0) + o(x)$. Ainsi, la fonction $h : x \mapsto \dfrac{g(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 avec $h(0) = g'(0)$, donc on peut poser $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x h(t)dt$ de sorte que $f'(x) = h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $xf'(x) = g(x)$ (ce qui marche aussi si $x = 0$).

On a $g = D(f)$ si on prouve que f est C^∞ (on peut le démontrer avec les intégrales à paramètres.... à suivre).

6.63 On sait que M, en tant que matrice carrée complexe, est trigonalisable. Ainsi, il existe une matrice T triangulaire supérieure avec sur la diagonale les valeurs propres de M comptées avec leur ordre de multiplicité algébrique et une matrice Q inversible telles que $M = PTP^{-1}$. Alors $P(M) = QP(T)Q^{-1}$ classiquement. Mais sur la diagonale de $P(T)$ on a les $P(\lambda)$ où $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. Ainsi : $\mathrm{Sp}(P(M)) = P(\mathrm{Sp}(M))$.

6.64 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E. Le polynôme $P = X^3 + X^2 - 1$ est annulateur de f donc de A. En étudiant la fonction $t \mapsto t^3 + t^2 - 1$, on montre que P admet une racine réelle $\alpha \in]0;1[$ et deux racines complexes conjuguées β et $\overline{\beta}$. Comme P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, il existe donc une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale D avec α, β et $\overline{\beta}$ sur la diagonale (comptées avec leurs ordres de multiplicité algébriques) telles que $A = QDQ^{-1}$.

Comme A est réelle et $\beta \notin \mathbb{R}$, on a $m_\beta(A) = m_{\overline{\beta}}(A)$ donc $\mathrm{Tr}\,(A) = m_\alpha(A)\alpha + m_\beta(A)(\beta + \overline{\beta})$. D'après les relations coefficients/racines, on sait que $\alpha + \beta + \overline{\beta} = -1$ donc $\mathrm{Tr}\,(A) = (m_\alpha(A) - m_\beta(A))\alpha - m_\beta(A)$. Si $\dfrac{p}{q}$ (mis sous forme irréductible) est racine de P, on a $p^3 + p^2q - q^3 = 0$ donc $q|p^3$ et comme p et q sont premiers entre eux : $q = \pm 1$. De même $p = \pm 1$ donc $\dfrac{p}{q} = \pm 1$ mais ni 1 ni -1 n'est racine de P.

Ainsi $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Pour que $\mathrm{Tr}\,(A)$ soit un rationnel, il est donc nécessaire que $m_\alpha(A) = m_\beta(A)$.

Mais, on sait que $n = m_\alpha(A) + 2m_\beta(A)$ avec le degré de χ_A, ainsi : $n = 3m_\alpha(A)$ est un multiple de 3.

6.65 Petit rappel concernant les matrices (ou endomorphismes) nilpotents, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A \text{ est nilpotent} \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\} \text{ (avec CAYLEY-HAMILTON).}$$

$$A \text{ nilpotente et diagonalisable} \iff A = 0.$$

L'implication ($\Leftarrow$) est évidente car I_n est diagonalisable.
Réciproquement, supposons que $P(M)$ est diagonalisable. Comme χ_B est scindé (car le corps des scalaires est $\mathbb{C}$), B est trigonalisable. Comme la seule valeur propre de B est 0, il existe une matrice inversible Q et une matrice triangulaire supérieure T avec des 0 sur la diagonale telles que $B = QTQ^{-1}$. Ainsi, si on pose $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a $P(M) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k(\lambda I_n + B)^k$. On peut développer ave le binôme de NEWTON car I_n et B commutent pour avoir, en réorganisant selon les puissances croissantes de B :

$$P(M) = P(\lambda)I_n + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \cdots + \alpha_{m-1}B^{m-1},$$

si m est l'indice de nilpotence de B (défini par $B^m = 0$ et $B^{m-1} \neq 0$).

Par conséquent : $P(M) = Q\big(P(\lambda)I_n + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_{m-1}T^{m-1}\big)Q^{-1} = QCQ^{-1}$ en définissant la matrice C par $C = P(\lambda)I_n + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_{m-1}T^{m-1}$. On peut conclure de deux façons différentes :

- Comme $\chi_C = (X - P(\lambda))^n$ et que C est diagonalisable puisque semblable à $P(M)$, l'ordre de multiplicité de sa valeur propre $P(\lambda)$ vaut $\dim(\mathrm{Ker}(C - P(\lambda)I_n))$ donc $C - P(\lambda)I_n = 0$ et $P(M) = QP(\lambda)I_nQ^{-1} = P(\lambda)I_n$.
- Comme $P(\lambda)$ est l'unique valeur propre de C et que C est diagonalisable, $\prod\limits_{\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(C)} (X - \mu) = X - P(\lambda)$ est annulateur de C donc $C - P(\lambda)I_n = 0$ dont on déduit encore que $P(M) = P(\lambda)I_n$.

On conclut bien par ce qui précède : $P(M)$ est diagonalisable $\iff P(M) = P(\lambda)I_n$.

6.66 **a.** Comme $f \in E$ est de classe C^∞, $u(f)$ l'est aussi par composition. De plus, u est clairement linéaire. Soit $\varphi : x \mapsto px + q$, l'application φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on a facilement $\forall y \in \mathbb{R},\ \varphi^{-1}(y) = \dfrac{y-q}{p}$.

Enfin, si $(f,g) \in E^2$, $u(f) = g \iff f \circ \varphi = g \iff f = g \circ \varphi^{-1}$ donc u est bien un automorphisme de E car toute fonction g de E admet un unique antécédent f de E par u.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f, par définition, il existe $f \in E$ tels que $u(f) = f \circ \varphi = \lambda f$ et $f \neq 0$.

Par une récurrence simple, $\forall n \in \mathbb{N},\ f \circ \varphi^n = \lambda^n f$. Si $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(x) = px + 1 - p = p(x-1) + 1$, $\varphi^2(x) = p\big((p(x-1)+1)-1\big)+1 = p^2(x-1)+1$ et, à nouveau, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi^n(x) = p^n(x-1)+1$ par une récurrence simple. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f\big(p^n(x-1)+1\big) = \lambda^n f(x)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, si on fait tendre n vers $+\infty$, comme $|p| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n = 0$ donc, par continuité de f en 1, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} f(p^n(x-1)+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n f(x) = f(1)$. Pour un réel x tel que $f(x) \neq 0$ (il en existe car $f \neq 0$), on a donc la convergence de $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui impose $\lambda \in]-1;1]$.

c. Si f est un vecteur propre de u, alors $f \neq 0$ et il existe $\lambda \in]-1;1]$ tel que $u(f) = \lambda f$. Ainsi, $u(f) = f \circ \varphi = \lambda f$ donc, en dérivant k fois (toutes les fonctions sont de classe C^∞), on a $\forall k \in \mathbb{N},\ \big(u(f)\big)^{(k)} = \lambda f^{(k)}$ d'où $\forall k \in \mathbb{N},\ p^k f^{(k)} \circ \varphi = \lambda f^{(k)}$ par récurrence car $\varphi'(x) = p$. Ainsi, $u(f^{(k)}) = \dfrac{\lambda}{p^k} f^{(k)}$ car $p \neq 0$. Si $f^{(k)}$ est non nulle, cette relation montre que $f^{(k)}$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\dfrac{\lambda}{p^k}$. Mais comme $\left|\dfrac{\lambda}{p^k}\right| > 1$ si k assez grand car $|p| < 1$, la question **b.** prouve que c'est absurde. Ainsi, $\exists k \in \mathbb{N},\ f^{(k)} = 0$.

d. Si λ valeur propre, f vecteur propre de u associé à λ, on sait d'après **c.** qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$ donc que f est une fonction polynomiale (de degré inférieur ou égal à $k-1$). En notant $n = \mathrm{deg}(f) \in \mathbb{N}$ et en écrivant $f(x) = a_n x^n + \cdots$ avec $a_n = \mathrm{dom}(f) \neq 0$, on obtient $p^n a_n = \lambda a_n$ en identifiant le terme en x^n dans la relation $u(f) = \lambda f$. Ainsi, comme $a_n \neq 0$, on a $\lambda = p^n$. Comme on a vu en **c.** que $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)} \circ \varphi = \dfrac{\lambda}{p^k} f^{(k)} = p^{n-k} f^{(k)}$, si on évalue en 1 sachant que $\varphi(1) = p + q = 1$, on obtient $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(1) = p^{n-k} f^{(k)}(1)$. Comme $p^{n-k} \neq 1$ dès que $k \neq n$, on en déduit $\forall k \neq n,\ f^{(k)}(1) = 0$. En particulier, $\forall k \in [\![0;n-1]\!],\ f^{(k)}(1) = 0$ donc, d'après la formule de Taylor sur les polynômes, comme $\mathrm{deg}(f) = n$, on a $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = a_n(x-1)^n$.

On a montré que $\mathrm{Sp}(u) = \{p^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ E_{p^n}(u) = \mathrm{Vect}(f_n)$ est une droite où $f_n : x \mapsto (x-1)^n$.

6.67 **a.** Non, il suffit de prendre u la rotation de $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui est sans vecteur propre. En effet, la matrice de u dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\chi_A = X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle donc il n'existe pas de valeur propre réelle ce qui équivaut d'après le cours à l'absence de droite stable par u.

b. On considère trois cas :

- Soit il existe deux valeurs propres distinctes α, β réelles de u, alors si $x \neq 0_E$ vérifie $u(x) = \alpha x$ et $y \neq 0_E$ vérifie $u(y) = \beta y$, le plan $P = \mathrm{Vect}(x,y)$ (x et y sont non colinéaires car vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes) est clairement stable par u car $u(\lambda x + \mu y) = \lambda\alpha x + \mu\beta y \in F$.
- Soit il existe un polynôme $Q = X^2 + aX + b$ de degré 2 irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ ($a^2 - 4b < 0$) tel que

$Q(u) \notin GL(E)$. On prend alors $x \neq 0_E$ tel que $Q(u)(x) = 0_E$; il en existe car $\mathrm{Ker}(Q(u)) \neq \{0_E\}$. Posons $P = \mathrm{Vect}(x, u(x))$. Alors $u(x)$ n'est pas colinéaire à x ! En effet, si on avait $u(x) = \lambda x$, λ serait racine de P car on aurait $u^2(x) + au(x) + bx = (\lambda^2 + a\lambda + b)x = 0_E$: exclu. Ainsi P est bien un plan et il est stable par u car $u(u(x)) = u^2(x) = -au(x) - bx \in P$.

- Soit on n'est dans aucun des deux premiers cas, alors en décomposant le polynôme caractéristique $\chi_u = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{m_k} \times \prod_{k=1}^{s}(X^2 + a_kX + b_k)^{n_k}$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, on a $\prod_{k=1}^{r}(u-\lambda_k\mathrm{id}_E)^{m_k} \circ \prod_{k=1}^{s}(u^2+a_ku+b_k\mathrm{id}_E)^{n_k} = 0$ par CAYLEY-HAMILTON mais tous les $u^2+a_ku+b_k\mathrm{id}_E$ sont inversibles par négation du second cas donc $\prod_{k=1}^{r}(u-\lambda_k\mathrm{id}_E)^{m_k} = 0$ et comme on ne peut pas avoir deux valeurs propres distinctes car on n'est pas dans le premier cas, on a forcément un seul des $u - \lambda_k\mathrm{id}_E$ qui est non inversible par néagation du premier cas donc, par exemple, $(u-\lambda_1\mathrm{id}_E)^{m_1} = 0$. En posant $v = u - \alpha_1\mathrm{id}_E$, on a $v^{m_1} = 0$ donc v est nilpotent. En notant m l'indice de nilpotence de v, on a $v^{m-1} \neq 0$ et $v^m = 0$. On traite à nouveau deux cas :
  - Si $m = 1$, alors $u = \alpha\mathrm{id}_E$ et tous les plans de E sont stables par u.
  - Si $m \geqslant 2$, soit un vecteur x tel que $v^{m-1}(x) \neq 0_E$, alors il est classique de montrer que la famille $(x, v(x), \cdots, v^{m-1}(x))$ est libre. Le plan $P = \mathrm{Vect}(v^{m-1}(x), v^{m-2}(x))$ est stable par u car on a $u(v^{m-1}(x)) = v(v^{m-1}(x)) + \alpha v^{m-1}(x) = \alpha v^{m-1}(x)$ et $u(v^{m-2}(x)) = v^{m-1}(x) + \alpha v^{m-2}(x)$.

En conclusion, , si $n \geqslant 2$, il existe toujours un plan stable par u.

6.68 **a.** Notons $B = A - A^{-1}$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, comme les n valeurs propres de B sont simples, il vient : $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^{n} D_k$ avec $D_k = \mathrm{Ker}(B - \lambda_k I_n) = \mathrm{Vect}(v_k)$ qui est une droite. Mais comme A et B commutent car $AB = BA = A^2 - I_n$, les sous-espaces propres D_k sont stables par A et il existe $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que $Av_k = \alpha_k v_k$. La base $(v_1, \cdots, v_n)$ est donc une base de vecteurs propres de A et A est DZ. De même pour A^{-1} car si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale (ses termes diagonaux sont non nuls car A est inversible), alors $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ et D^{-1} est diagonale donc A^{-1} est DZ (c'est général).

b. En notant maintenant $\mathrm{Sp}(B) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ distincts deux à deux, on sait que puisque B est DZ, le polynôme $U = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$ est annulateur de B, donc $\prod_{k=1}^{p}(A - A^{-1} - \lambda_k I_n) = 0$ et en multipliant par A^p, on obtient $\prod_{k=1}^{p}(A^2 - \lambda_k A - I_n) = 0$ donc le polynôme $V = \prod_{k=1}^{p}(X^2 - \lambda_k X - 1)$ est annulateur de A. Le polynôme $X^2 - \lambda_k X - 1$ admet deux racines réelles $\alpha_k = \dfrac{\lambda_k + \sqrt{\lambda_k^2 + 4}}{2} > 0$ et $\beta_k = \dfrac{\lambda_k - \sqrt{\lambda_k^2+4}}{2} < 0$. Or $f : t \mapsto \dfrac{t + \sqrt{t^2+4}}{2}$ et $g : t \mapsto \dfrac{t + \sqrt{t^2+4}}{2}$ sont respectivement bijectives de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ (petites études de fonctions). Ainsi $V = \prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k)(X - \beta_k)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.

c. Notons $U = A + A^{-1}$ et $\mathrm{Sp}(U) = \{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$, alors $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^{n} D_k$ avec $D_k = \mathrm{Ker}(U - \mu_k I_n) = \mathrm{Vect}(w_k)$ qui est une droite. Mais comme A et U commutent car $AU = UA = A^2 + I_n$, les sous-espaces propres D_k sont stables par A et il existe $\beta_k \in \mathbb{R}$ tel que $Aw_k = \beta_k w_k$. La base $(w_1, \cdots, w_n)$ est donc une base de

vecteurs propres de A et A est DZ. De même pour A^{-1}.
Par contre, si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A = X^2 + 1$ donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et pourtant $U = A + A^{-1} = 0$ est diagonalisable (avec une valeur propre double).
Autre contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A = (X-1)^2$ et $A \neq I_2$ donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et pourtant $U = A + A^{-1} = 2I_2$ est diagonalisable (avec une valeur propre double).

6.69 **a.** Comme M^2 est diagonalisable et inversible, il existe un polynôme P à racines simples $P = \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$ tel que $P(M^2) = 0$. Comme aucun des α_k n'est nul, on a $Q(M) = 0$ avec $Q = \prod_{k=1}^{n} (X - \delta_k)(X + \delta_k)$ où δ_k est une racine carrée de α_k. Alors Q est scindé à racines simples donc M est diagonalisable.
b. $NN' = N'N = I_{2n}$ avec $N' = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ donc N est inversible et on a $N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.
On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, on a par blocs $P(N^2) = \begin{pmatrix} P(AB) & 0 \\ 0 & P(BA) \end{pmatrix}$.
Si N est diagonalisable alors on peut écrire $N = UDU^{-1}$ avec $U \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ et D diagonale donc il vient $N^2 = UD^2U^{-1}$ et N^2 est aussi diagonalisable. Alors il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples P tel que $P(N^2) = 0 = \begin{pmatrix} P(AB) & 0 \\ 0 & P(BA) \end{pmatrix}$ donc $P(AB) = 0$ ce qui montre que AB est DZ.
Réciproquement, si AB est diagonalisable, il existe une matrice $U \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale D telles que $AB = UDU^{-1}$ donc $BA = B(AB)B^{-1} = (BU)D(BU)^{-1}$ donc BA est aussi DZ car $BU \in GL_n(\mathbb{C})$.
En posant $V = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & BU \end{pmatrix}$, on a $V \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ et $V^{-1}N^2V = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ donc N^2 est DZ et comme N est inversible, on sait d'après **a.** que N est aussi DZ. Ainsi : N est diagonalisable si et seulement si AB l'est.

6.70 **a.** Si on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes deux à deux de u, alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_k}(u)$ sont des droites engendrées par un vecteur $v_k \neq 0_E$ par hypothèse. Comme $E_{\lambda_k}(u)$ est stable par u car $u \circ v = v \circ u$, il existe pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ un scalaire α_k tel que $v(v_k) = \alpha_k v_k$ d'où v_k est aussi un vecteur propre de v. Ainsi $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ est une base commune de vecteurs propres de u et de v.
b. Par les polynômes d'interpolation de LAGRANGE, il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $L(\lambda_k) = \alpha_k$, en notant $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, l_n)$ et $D' = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = D$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = D'$. De plus, on a $L(D) = D'$ par construction donc $v = L(u) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u, \cdots, u^{n-1})$.
c. On sait que C_u a une structure de sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. On vient de voir que $C_u \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u, \cdots, u^{n-1})$ et il est clair que $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u, \cdots, u^{n-1}) \subset C_u$ car $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u, \cdots, u^{n-1}) \subset \mathbb{K}[u]$ et $\mathbb{K}[u] \subset C_u$. Ainsi $C_u = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u, \cdots, u^{n-1})$ et la famille $(\mathrm{id}_E, u, \cdots, u^{n-1})$ est donc génératrice de C_u.
Si on suppose que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = 0$, alors le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est annulateur de u donc toutes les valeurs propres de u sont des racines de P, ce qui fait que $P = 0$ car il y a n valeurs propres distinctes de u. Comme $P = 0$: $a_1 = \cdots = a_n = 0$ donc $(\mathrm{id}_E, u, \cdots, u^{n-1})$ est aussi libre, c'est une base de C_u : $\dim(C_u) = n$.

6.71 **a.** $C(A)$ est le commutant de A : on a vu en cours que c'était une sous-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (il y a I_n, c'est stable par somme, multiplication par un scalaire et produit).
b. Si M inversible et $AM = MA$, on multiplie par M^{-1} à gauche, à droite et $M^{-1}A = AM^{-1}$: $M^{-1} \in C(A)$.
c. Soit $M \in C(D)$, soit u et d les endomorphismes canoniquement associés à M et D, alors $u \circ d = d \circ u$. Or d admet n valeurs propres distinctes deux à deux donc tous les sous-espaces propres de d sont les droites vectorielles $D_k = \mathrm{Vect}(e_k)$ (où $(e_1, \cdots, e_n)$ est la base canonique) qui sont stables par u. Ainsi, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\exists \alpha_k \in \mathbb{R}$, $u(e_k) = \alpha_k e_k$ car $u(e_k) \in D_k$. Ceci justifie M est aussi diagonale. $C(D)$ est donc le sous-espace des matrices diagonales (elles commutent clairement avec D).
On aurait pu aussi le faire par calcul matriciel direct $DM = MD \Longrightarrow M$ diagonale en identifiant.
Comme $C(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales : $\dim(C(D)) = n$.

Il est clair que les D^k commutent avec D. De plus, si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k D^k = 0 \ \ (1)$, alors soit le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k X^k$. La relation (1) montre que les λ_i sont des racines de P, qui est de degré inférieur ou égal à n. Ainsi $P = 0$ donc $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$.

On aurait pu écrire le système et reconnaître une matrice de VANDERMONDE inversible donc un système de CRAMER. On pouvait enfin dire que $P = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ est annulateur de D donc les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de D sont des racines de P ce qui montre que $P = 0 \Longrightarrow \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$.

Dans tous les cas : $(I_n, D, \cdots, D^{n-1})$ est libre donc c'est bien une base de $C(D)$ car $\dim(C(D)) = n$.

d. Comme $C(A) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\dim(C(A)) = 4 \Longleftrightarrow C(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On cherche donc les A qui commutent avec toutes les autres. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $AE_{1,1} = E_{1,1}A \Longrightarrow b = c$; $AE_{2,1} = E_{2,1}A \Longrightarrow (a = d$ et $b = 0)$. Ainsi $A = aI_2$. La réciproque est claire. Par conséquent : $\dim(C(A)) = 4 \Longleftrightarrow (A, I_2)$ liée.

e. Si $A = \lambda I_2$, alors $C(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\dim(C(A)) = 4 \geqslant 2$.

Si (A, I_2) libre, alors cette famille étant libre dans $C(A)$, $\dim(C(A)) \geqslant 2$.

f. $F = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})$ et $G = \mathrm{Vect}(E_{2,1}, E_{2,2})$ sont deux plans supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Comme $C(A)$ est de dimension 3, $\dim(F \cap C(A)) \geqslant 1$ et $\dim(G \cap C(A)) \geqslant 1$ d'après GRASSMANN. Il existe donc quatre réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que les deux matrices $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0$ sont éléments de $C(A)$.

Or $AB = BA \Longleftrightarrow (\beta c = \alpha c = 0$ et $\alpha b + \beta d = \beta a)$. Comme $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on en déduit que $c = 0$.
De même, $AC = CA \Longleftrightarrow (\gamma b = \delta b = 0$ et $\gamma a + \delta c = \gamma d)$. Comme $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$, on a $b = 0$.
La matrice A est donc diagonale, si elle n'était pas scalaire $(A \neq \lambda I_2)$, on a vu que en **c.** que $C(A)$ serait de dimension $n = 2$, non ! Ainsi, $a = d$ et A est proportionnelle à la matrice I_2.

g. Si $A = \lambda I_2$, alors $C(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une base de $C(A)$.
Sinon, $\dim(C(A)) = 2$ d'après ce qui précède donc (I_2, A) est une base de $C(A)$.

6.72 **a.** A est trigonalisable si et seulement son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.

$A = E_{1,2}$ est triangulaire supérieure, nilpotente d'ordre 2 et non nulle donc non diagonalisable.

b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. On sait que puisque $\chi_M = \chi_f$ est scindé dans $\mathbb{C}$, f ou M sont trigonalisables. Il existe donc une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = T$ est triangulaire supérieure. Soit $\alpha > 0$ et la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(v_1, \frac{v_2}{\alpha}, \cdots, \frac{v_n}{\alpha^{n-1}}\right)$. Alors la matrice la passage P entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est diagonale donc $A = P^{-1}TP = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est aussi triangulaire supérieure. Par le calcul matriciel ou en calculant les images des nouveaux vecteurs par f, on a $A = \left(\frac{t_{i,j}}{\alpha^{j-i}}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Soit $\varepsilon > 0$, en prenant $m = \underset{1 \leqslant i < j \leqslant n}{\mathrm{Max}} |t_{i,j}|$ et $\alpha > \mathrm{Max}\left(1, \frac{m}{\varepsilon}\right)$ on a $\forall i < j$, $|a_{i,j}| = \frac{|t_{i,j}|}{\alpha^{j-i}} \leqslant \frac{|t_{i,j}|}{\alpha} \leqslant \frac{m}{\alpha} \leqslant \varepsilon$. La matrice A convient puisque M est semblable à T elle-même semblable à A.

Questions : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et m_λ l'ordre de multiplicité algébrique d'une de ses valeurs propres λ :

- A DZ $\Longleftrightarrow \mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(A)$.
- A DZ $\Longleftrightarrow \chi_A$ est scindé dans $\mathbb{K}$ et si $\forall \lambda \in Sp(A)$, $m_\lambda = \dim(E_\lambda(A))$.
- A DZ $\Longleftrightarrow \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)$ est annulateur de A.
- A DZ $\Longleftrightarrow$ il existe un polynôme annulateur de A qui soit scindé à racines simples.

6.73 **a.** Méthode 1 : clairement $(A, A^2, A^3) \in \mathrm{Vect}(B, C)$ donc (A, A^2, A^3) est une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension inférieure ou égale à 2. Précisons, comme $a^2(B + C) = aA$ et $A^2 = a^2(B + 2C)$, on a $a^2C = A^2 - aA$ et $a^2B = 2aA - A^2$. Ainsi $A^3 = a(a^2B) + 3a(a^2C) = a(2aA - A^2) + 3a(A^2 - aA) = 2aA^2 - a^2A$.

Le polynôme $P = X^3 - 2aX^2 + a^2X = X(X-a)^2$ est annulateur de A.

Soit $p \geqslant 3$, effectuons la division euclidienne de X^p par P, on a $X^p = PQ + a_pX^2 + b_pX + c_p$. On évalue en 0 ce qui donne $c_p = 0$. On évalue en a et on a $a^p = a_pa^2 + b_pa$. Ensuite on dérive et on évalue en a et $pa^{p-1} = 2a_pa + b_p$. On résout ce système pour trouver $a_p = (p-1)a^{p-2}$ et $b_p = (2-p)a^{p-1}$. On en déduit que $A^p = P(A)Q(A) + (p-1)a^{p-2}A^2 - (p-2)a^{p-1}A = (p-1)a^p(B+2C) - (p-2)a^p(B+C) = a^p(B+pC)$.

Méthode 2 : l'autre idée est bien sûr une récurrence sur p puisque l'énoncé donne l'initialisation pour $p \in \{1,2,3\}$. Soit $p \geqslant 3$ et supposons $A^p = a^p(B+pC)$, alors $A^{p+1} = A^p \times A = a^{p+1}(B+pC)(B+C)$ d'où $A^{p+1} = a^{p+1}(B^2 + pC^2 + pCB + BC)$. Comme $A^2 = a^2(B+2C) = a^2(B+C)^2 = A \times A$, en simplifiant par a^2 et en développant, on obtient la relation (1) : $B + 2C = B^2 + BC + CB + C^2$. De même, comme $A^3 = a^2(B+3C) = a^2(B+2C)(B+C) = A^2 \times A$, on obtient la relation (2) : $B + 3C = B^2 + 2CB + BC + 2C^2$. En effectuant $(2)-(1)$, on arrive à $CB + C^2 = C$. En reportant ceci dans la relation (1), on a $B^2 + BC = B + C$. Ainsi, $A^{p+1} = a^{p+1}(B^2 + pC^2 + pCB + BC) = a^{p+1}(B + C + pC) = a^{p+1}(B + (p+1)C)$ et l'hérédité est établie. On conclut avec le principe de récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a^p = a^p(B+pC)$.

b. Comme $X(X-a)^2$ est annulateur de A, on sait d'après le cours que $\mathrm{Sp}(a) \subset \{0, a\}$.

Si $AX = 0$ avec $X \neq 0$, on a aussi $A^2X = 0$ donc $BX + CX = 0 = BX + 2CX$ car $a \neq 0$ donc $BX = CX = 0$.

Si $AX = aX$ avec $X \neq 0$, on a aussi $A^2X = a^2X$ donc $BX + CX = BX + 2CX = X$ d'où $CX = 0$ et $BX = X$. Dans les deux cas, que le vecteur propre X soit associé à 0 et a, alors $CX = 0$. Ceci se traduit aussi par $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(C)$ et $E_a(A) \subset \mathrm{Ker}(C)$. On a même $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(B)$ et $E_a(A) \subset E_1(B)$.

c. Méthode 1 : si A est diagonalisable, $\mathbb{R}^n = E_0(A) \oplus E_a(A)$ par définition car $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, a\}$. D'après la question **b.**, on a donc $\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Ker}(C)$ dons $\mathrm{Ker}(C) = \mathbb{R}^n$ donc $C = 0$.

Réciproquement, si $C = 0$, alors $A^2 - aA = 0$ donc $X(X-a)$ annule A donc A est diagonalisable car il en existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Méthode 2 : si $C = 0$, comme avant, $A^2 - aA = 0$ donc $X(X-a)$ annule A et A est diagonalisable.

Si A est diagonalisable, comme $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, a\}$ est non vide car on travaille dans $\mathbb{C}$, on a trois cas mais on utilise toujours le théorème qui dit que $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ annule A.

- Si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, alors X est annulateur de A donc $X(X-a)$ aussi.
- Si $\mathrm{Sp}(A) = \{a\}$, alors $X - a$ est annulateur de A donc $X(X-a)$ aussi.
- Si $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a\}$, alors $X(X-a)$ est annulateur de A.

Ainsi, on a toujours $X(X-a)$ est annulateur de A, d'où $A^2 - aA = 0 = a^2(B+2C) - a^2(B+C) = a^2C = 0$.

Par les deux méthodes, A est diagonalisable si et seulement si $C = 0$.

6.74 **a.** $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ scindé à racines simples est annulateur de u donc u est diagonalisable. On sait que u est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E)$.

b. Puisque $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$ (car u est diagonalisable) et que $\dim(E_1(u)) = 1$, on a $\dim(E_{-1}(u)) = n - 1$. Ainsi, $\mathrm{Im}\,(u + \mathrm{id}_E)$ est une droite d'après le théorème du rang. Soit $a \neq 0_E$ tel que $\mathrm{Im}\,(u + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(a)$. Par définition, pour tout vecteur x de E, il existe un scalaire $\theta(x)$ tel que $(u + \mathrm{id}_E)(x) = \theta(x)a$.

Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $(u + \mathrm{id}_E)(x) = \theta(x)a$, $(u + \mathrm{id}_E)(y) = \theta(y)a$ et $(u + \mathrm{id}_E)(x + \lambda y) = \theta(x + \lambda y)a$. Or par linéarité de u, on a aussi $(u + \mathrm{id}_E)(x + \lambda y) = \theta(x)a + \lambda\theta(y)a = (\theta(x) + \lambda\theta(y))a$ et on a donc, comme $a \neq 0_E$: $\theta(x + \lambda y) = \theta(x) + \lambda\theta(y)$). θ ainsi créée est donc bien une forme linéaire et $\forall x \in E,\ u(x) = -x + \theta(x)a$.

6.75 Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique ! On va donc faire une disjonction des cas selon le type de χ_A. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

Cas 1 : Si $\chi_A = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distincts deux à deux, χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable et semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ car $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

Cas 2 : Si $\chi_A = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$ avec λ_1, λ_2 distincts, alors on sait que A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = 2$. Il y a donc à nouveau deux cas.

Cas 2.1 : Si $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = 2$, la matrice A est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ car A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec λ_1 valeur propre double et λ_2 valeur propre simple.

Cas 2.2 : Si $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = 1$, il existe $v_1 \neq 0_E$ dans $E_{\lambda_1}(u)$ et $v_3 \neq 0_E$ dans $E_{\lambda_2}(u)$; il nous manque un vecteur. Comme $(u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2 \circ (u-\lambda_2 \mathrm{id}_E) = 0$, on a $\mathrm{Im}\,(u-\lambda_2 \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}((u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2)$ or, d'après la formule du rang, rang $(u-\lambda_2 \mathrm{id}_E) = 2$ car λ_2 est une valeur propre simple de u donc $\mathrm{Ker}((u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2)$ est un plan (ça ne peut pas être l'espace en entier car on aurait alors $(u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2 = 0$ et λ_2 ne serait pas valeur propre de u). Soit donc un vecteur w_2 tel que $w_2 \in \mathrm{Ker}((u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2) \setminus \mathrm{Ker}(u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)$. Comme $w_2 \in \mathrm{Ker}((u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2)$, on a $u(w_2) - w_2 \in \mathrm{Ker}(u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ (car $w_2 \notin E_{\lambda_1}(u)$) tel que $u(w_2) = w_2 + \alpha v_1$. En posant $v_2 = \dfrac{w_2}{\alpha}$, on a $u(v_2) = v_2 + v_1$. Comme (v_1, v_2) est une base de $\mathrm{Ker}((u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2)$ et que $v_3 \notin \mathrm{Ker}((u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2)$ car $(u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2(v_3) = (\lambda_2-\lambda_1)^2 v_3 \neq 0_E$, la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Cas 3 : Si $\chi_A = (X-\lambda_1)^3$, posons $v = u - \lambda_1 \mathrm{id}_E$, alors, par CAYLEY-HAMILTON, v est nilpotent d'indice inférieur ou égal à 3 (normal car on est en dimension 3). Il y a à nouveau quelques cas.

Cas 3.1 : Si $v^2 \neq 0$, classiquement il existe une base $\mathcal{B} = (v^2(x), v(x), x)$ (en prenant x tel que $v^2(x) \neq 0$). Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc la matrice de $u = v + \lambda_1 \mathrm{id}_E$ dans $\mathcal{B}$ vaut $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Cas 3.2 : Si $v^2 = 0$ et $v \neq 0$, $\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Ker}(v)$ donc rang $(v) = 1$. Soit (x_2) une base de $\mathrm{Im}\,(v)$, complétée en une base (x_1, x_2) de $\mathrm{Ker}(v)$; $\exists x_3 \in E,\ x_2 = v(x_3) \neq 0_E$ donc $x_3 \notin \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$, ainsi $\mathcal{B} = (x_1, x_2, x_3)$ est une base de E. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

Cas 3.3 : Si $v = 0$ alors $u = \lambda_1 \mathrm{id}_E$ et la matrice de u dans toute base est $\lambda_1 I_3$.

Toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ sont donc semblables à une et à une seule des matrices triangulaires supérieures (on savait déjà que toute matrice complexe est trigonalisable) suivantes :

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distincts deux à deux ; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec λ_1, λ_2 distincts ; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec λ_1, λ_2 distincts ; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{C}$.

6.76 **a.** ($\Longrightarrow$) si A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible donc $A^3 = PD^3P^{-1}$. Comme D^3 est aussi diagonale, on en déduit que A^3 est diagonalisable.

($\Longleftarrow$) Si A^3 est diagonalisable, alors A^3 possède un polynôme annulateur scindé à racines simples qu'on écrit $P = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_p)$ avec $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ distincts deux à deux et non nuls (en effet comme A est inversible on peut multiplier par A^{-1} et ne pas avoir 0 comme racine d'un polynôme annulateur).

Par conséquent, $(A^3-\lambda_1 I_n)\cdots(A^3-\lambda_p I_n) = Q(A) = 0$ avec $Q = \prod\limits_{k=1}^{p}\big((X-\alpha_k)(X-j\alpha_k)(X-j^2\alpha_k)\big)$ où $\alpha_k \neq 0$ est une racine cubique de λ_k. Mais Q est scindé à racines simples (on ne peut pas avoir par exemple $j\alpha_k = j^2\alpha_\ell$ si $k \neq \ell$ car alors on aurait $\alpha_k^3 = \lambda_k = \lambda_\ell = \alpha_\ell^3$) donc A est diagonalisable.

Ainsi A diagonalisable $\Longleftrightarrow A^3$ diagonalisable.

b. Il suffit de prendre $A = E_{1,n}$ qui est nilpotente d'indice 2 (dès que $n \geqslant 2$) alors qu'elle n'est pas diagonalisable. En effet, sa seule valeur propre est 0 et pourtant elle n'est pas semblable à la matrice nulle sinon elle serait nulle.

c. Par exemple si on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\chi_A = X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et pourtant $A^3 = I_3$ est on ne peut plus diagonalisable.

6.77 $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ se reconnaît aisément, c'est la matrice de l'endomorphisme $f_1 : P \mapsto P'$ dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \cdots, X^n)$ car $\forall k \geqslant 1,\ f_1(X^k) = kX^{k-1}$.

La matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est obtenue à partir de A_1 en échangeant l'ordre des lignes et des colonnes. Ceci signifie que $A_2 = PA_1P$ où P est la matrice qui ne contient que des 0 et des 1 sur la "seconde" diagonale : $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ avec $p_{i,j} = 1$ si $i+j = n+2$ et $p_{i,j} = 0$ sinon. Or P est la matrice de l'endomorphisme f de E qui envoie X^k sur X^{n-k}. On constate que $f : P \mapsto X^n P\Big(\dfrac{1}{X}\Big)$. Ainsi, A_2 est la matrice dans la base canonique de $f_2 = f \circ f_1 \circ f$. Or $f_1 \circ f(P) = \Big(X^n P\Big(\dfrac{1}{X}\Big)\Big)' = nX^{n-1}P\Big(\dfrac{1}{X}\Big) - X^{n-2}P'\Big(\dfrac{1}{X}\Big)$ pour un polynôme $P \in E$, donc $f_2(P) = X^n\big(nX^{1-n}P(X) - X^{2-n}P'(X)\big) = nXP(X) - X^2P'(X)$.

On pouvait aussi dire que f_2 vérifiait $f_2(X^n) = 0$ et $f_2(X^k) = (n-k)X^{k+1} = nX.X^k - X^2(kX^{k-1})$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$ donc que les endomorphismes f_2 et $P \mapsto nXP - X^2P'$ coïncident sur la base canonique (même pour X^n) donc sont égaux (mais encore fallait-il le voir) !!!!

Au final, comme $A = A_1 + A_2 = \mathrm{Mat}_{\,can}(g)$ où $g = f_1 + f_2 : P \mapsto nXP + (1-X^2)P'$.

<u>Méthode 1</u> : $g(1) = nX = -n + n(X+1)$ et, si $k \in [\![1; n]\!]$, on a $g((X+1)^k) = nX(X+1)^k + k(1-X^2)(X+1)^{k-1}$ donc $g((X+1)^k) = n(X+1)^{k+1} - n(X+1)^k + k(2-1-X)(X+1)^k = (2k-n)(X+1)^k - (n+k)(X+1)^{k+1}$.

Par conséquent, la matrice de g dans la base $(1,(1+X),\cdots,(1+X)^n)$ est triangulaire inférieure avec, sur la diagonale, les réels $2k-n$ (pour k variant de 0 à n). Ces réels étant différents, χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable. Ainsi $\mathrm{Sp}(A)=\{2k-n\}_{0\leqslant k\leqslant n}$ (mais encore fallait-il le voir) !!!!

Méthode 2 : on peut aussi chercher les valeurs propres de f en résolvant l'équation différentielle $f(P)=\lambda P$ pour un réel λ en cherchant les solutions polynomiales. Or $f(P)=\lambda P$ revient à dire que la fonction polynomiale P est solution de $(E)\ :\ (1-t^2)y'=(\lambda-nt)y$. Or $\dfrac{\lambda-nt}{1-t^2}=\dfrac{\lambda+n}{2}.\dfrac{1}{1+t}+\dfrac{\lambda-n}{2}.\dfrac{1}{1-t}$. Ainsi les solutions de (E) (sur $]-1;1[$ par exemple) sont les $y:t\mapsto\alpha(1+t)^{\frac{\lambda+n}{2}}(1-t)^{\frac{n-\lambda}{2}}$ qui sont des fonctions polynomiales non nulles si $\alpha\neq0$ et $0\leqslant\lambda+n\leqslant2n$ est un entier pair. Ainsi, pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, le réel $\lambda=2k-n$ est valeur propre de A associé au vecteur propre $P_k=(1+X)^k(1-X)^{n-k}\in\mathbb{R}_n[X]$. A est bien diagonalisable.

6.78 Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}(M)$, alors $\chi_M(\lambda)=0$ donc distinguons deux cas :

- si $|\lambda|<1$, alors comme $a_n=1$ car χ_M est unitaire, on a clairement $|\lambda|\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n}|a_k|$.
- si $|\lambda|\geqslant1$, on a $\lambda^n=-\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k\lambda^k$ donc, par inégalité triangulaire, il vient $|\lambda|^n\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n-1}|a_k||\lambda|^k$ or $|\lambda|^k\leqslant|\lambda|^{n-1}$

donc $|\lambda|^n\leqslant|\lambda|^{n-1}\sum\limits_{k=0}^{n-1}|a_k|$ et il suffit de diviser par $|\lambda|>0$ pour avoir l'inégalité $|\lambda|\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n-1}|a_k|$ dont découle l'inégalité $|\lambda|\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n}|a_k|$ souhaitée. Pas sûr que ce soit l'énoncé intégral car c'est loin d'être optimal.

6.79 **a.** Soit un polynôme $P=\sum\limits_{n=0}^{m}a_nX^n\in\mathbb{R}[X]$, alors $P(u)=\sum\limits_{n=0}^{m}a_nu^n$ par définition donc, en intervertissant les sommes doubles, on obtient $P(u)=\sum\limits_{n=0}^{m}\Big(a_n\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k^n v_k\Big)=\sum\limits_{k=1}^{p}\Big(\sum\limits_{n=0}^{m}a_n\lambda_k^n\Big)v_k=\sum\limits_{k=1}^{p}P(\lambda_k)v_k$.

Soit $P=\prod\limits_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)$. On a clairement $\forall k\in[\![1;p]\!],\ P(\lambda_k)=0$ donc $P(u)=0$ d'après ce qui précède. Comme P est un polynôme annulateur scindé à racines simples de u, on en déduit que u est diagonalisable.

b. Ce sont les fameux polynômes d'interpolation de LAGRANGE. Pour $j\in[\![1;p]\!]$, soit $L_j=\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p}\Big(\dfrac{X-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k}\Big)$.

On a $\forall j\in[\![1;p]\!],\ L_j\in\mathbb{R}_{p-1}[X]$, et plus précisément $\deg(L_j)=p-1$. De plus, $\forall(i,j)\in[\![1;p]\!]^2,\ L_j(\lambda_i)=\delta_{i,j}$. Or si $\sum\limits_{k=1}^{p}\alpha_kL_k=0$ avec $(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)\in\mathbb{R}^p$, en évaluant ceci en λ_j pour $j\in[\![1;p]\!]$, on trouve $\alpha_j=0$ ce qui prouve que $(L_1,\cdots,L_p)$ est libre. Comme $\dim(\mathbb{R}_{p-1}[X])=p$, $(L_1,\cdots,L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c. Comme $P=\prod\limits_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)$ est annulateur de u, on sait d'après le cours que $\mathrm{Sp}(u)\subset\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p\}$.

Si, pour $j\in[\![1;p]\!]$, on avait $\lambda_j\notin\mathrm{Sp}(u)$, alors le spectre de u serait inclus dans l'ensemble des racines de L_j donc $\prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}(X-\lambda)$ diviserait L_j. Mais puisque u est diagonalisable, $\prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}(X-\lambda)$ est annulateur de u donc on aurait $L_j(u)=0$. Or, avec **a.** et **b.**, on a $L_j(u)=\sum\limits_{k=1}^{n}L_j(\lambda_k)v_k=v_j\neq0$ (par hypothèse) ce qui clôt le raisonnement par l'absurde. Par conséquent, par double inclusion, on conclut $\mathrm{Sp}(u)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p\}$.

6.80 **a.** D'après CAYLEY-HAMILTON, une matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\chi_M=X^n$. En effet, si M est nilpotente, sa seule valeur propre est 0 donc, comme χ_M est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, on a $\chi_M=X^n$. On a même l'équivalence : M nilpotente $\Longleftrightarrow\mathrm{Sp}(M)=\{0\}\Longleftrightarrow\chi_M=X^n$.

Puisque M est non nilpotente, elle possède une valeur propre non nulle a. De plus $M \neq 0$ donc M et $0.M$ ne sont pas semblables. Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}^*$ vérifie M et λM semblables, alors comme $a\lambda$ est une valeur propre de λM (car $MX = aX \Longrightarrow \lambda MX = (a\lambda)X$ avec $X \neq 0$), on a $a\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ aussi. Mais $\mathrm{Sp}(M)$ est de cardinal inférieur ou égal à n donc ceci n'autorise que n valeurs de λ.
On peut dire en général que $\mathrm{Sp}(\lambda M) = \lambda\,\mathrm{Sp}(M)$ avec la relation $\chi_{\lambda M}(\alpha) = \lambda^n \chi_M\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)$ facile à établir si $\lambda \neq 0$.

Pour information, si on prend la matrice circulante $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $m_{i,j} = 1$ si $i - j \equiv 1\ [n]$ et $m_{i,j} = 0$ sinon, alors on calcule et on trouve $\chi_M = X^n - 1$ qui est scindé à racines simples donc M est diagonalisable avec $M = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale contenant sur sa diagonale toutes les racines n-ièmes de l'unité. En notant $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, la matrice $\omega^j M$ a le même polynôme caractéristique donc est aussi semblable à D. Ainsi les λ tels que M et λM sont semblables sont les éléments de $\mathbb{U}_n$ au nombre de n.
b. D'abord, si $M = 0$, bien sûr, M et $\lambda M = 0$ sont égales donc semblables pour tout complexe λ.
Si M nilpotente d'indice n et $\lambda \neq 0$. Classiquement, il existe une base $\mathcal{B} = (X_0, \cdots, M^{n-1}X_0)$ (si $M^{n-1}X_0 \neq 0$) de $\mathbb{C}^n$. La matrice de M dans cette base est $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $t_{i,j} = 1$ si $j = i - 1$ et $t_{i,j} = 0$ sinon. Mais si on prend la base $\mathcal{B}_\lambda = (X_0, \lambda M X_0, \ldots, \lambda^{n-1}M^{n-1}X_0)$, alors la matrice de λM dans $\mathcal{B}_\lambda$ est aussi T ce qui prouve que les deux matrices M et λM sont semblables pour tout $\lambda \neq 0$.

6.81 • Si $b = 0$, $A = aI_n$ et l'exercice perd de son "charme".

• Si $b \neq 0$, soit $n \geqslant 3$, en développant le déterminant $\chi_{A_n}(\lambda)$ par rapport à la dernière colonne, on obtient $\chi_{A_n}(\lambda) = (\lambda - a)\chi_{A_{n-1}}(\lambda) - b^2\chi_{A_{n-2}}(\lambda)$ en développant le deuxième déterminant par rapport à la dernière ligne. On pose $u_n = \chi_{A_n}(\lambda)$ et on a la récurrence linéaire de rang 2 : $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} - (\lambda - a)u_{n+1} + b^2 u_n = 0$ en posant $u_0 = 1$ car $u_1 = \lambda - a$ et $u_2 = (\lambda - a)^2 + b^2$.
Par analogie avec les polynômes de TCHEBYCHEV, on pose $\lambda = a + 2b\cos\theta$ et $v_n = \dfrac{\chi_{A_n}(a + 2b\cos\theta)}{b^n}$ qui vérifie $\forall n \geqslant 0,\ v_{n+2} = 2\cos\theta v_{n+1} - v_n$ en simplifiant par b^{n+2} et en posant $v_0 = 1$.
Comme $v_0 = 1 = \dfrac{\sin(1.\theta)}{\sin\theta}$ et $v_1 = 2\cos\theta = \dfrac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}$, par une récurrence double avec des formules de trigonométrie : $\forall n \geqslant 0,\ v_n = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$ si $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$ (polynômes de TCHEBYCHEV de seconde espèce).
Ainsi, $\mathrm{Sp}(A_n) = \{\lambda_k = a + 2b\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\}_{k \in [\![1;n]\!]}$ est de cardinal n : A_n est diagonalisable.

6.82 **a.** Le point de départ, c'est que $M^2 = \mathrm{diag}(a_1a_n, a_2a_{n-1}, \ldots, a_2a_{n-1}, a_1a_n)$.

• Si M est diagonalisable, les matrices M et M^2 ont le même rang (car une matrice diagonale D et son carré D^2 ont le même rang). Or rang (M^2) est le nombre de a_ka_{n+1-k} non nuls et rang (M) est le nombre de a_k non nuls. Ainsi, si M est diagonalisable, on a card $(k \in [\![1;n]\!] \mid a_k = 0) =$ card $(k \in [\![1;n]\!] \mid a_ka_{n+1-k} = 0)$ donc $\forall k \in [\![1;n]\!],\ a_k = 0 \Longleftrightarrow a_{n+1-k} = 0$ ce qui signifie que soit $(a_k, a_{n+1-k}) = (0,0)$, soit $(a_k, a_{n+1-k}) \in (\mathbb{C}^*)^2$.
• Réciproquement, supposons $\forall k \in [\![1;n]\!],\ a_k = 0 \Longleftrightarrow a_{n+1-k} = 0$. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à M. Chacun des sous-espaces $P_k = \mathrm{Vect}(e_k, e_{n+1-k})$ est stable par u car $u(e_k) = a_ke_{n+1-k}$ ($P_k = \mathrm{Vect}(e_k)$ avec e_k vecteur propre si n est impair et $k = \dfrac{n+1}{2}$).

• Si $a_k = a_{n+1-k} = 0$, alors $u_{P_k} = 0$ et il est clair que u_{P_k} est donc diagonalisable.
• Si $(a_k, a_{n+1-k}) \in (\mathbb{C}^*)^2$, alors le polynôme caractéristique de u_{P_k} vaut $X^2 - a_ka_{n+1-k}$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ donc u_{P_k} est diagonalisable. En regroupant les bases de vecteurs propres de chacun des P_k, comme $\mathbb{C}^n = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{(n+1)/2} P_k$, on obtient une base de vecteurs propres de u donc M est diagonalisable.
• Une autre méthode est de dire que, puisque M^2 est diagonale (donc diagonalisable !), il existe un polynôme

scindé à racines simples P tel que $P(M^2)=0$.
- si M est inversible, on peut choisir $P=\prod\limits_{j=1}^{r}(X-\lambda_j)$ avec $P(0)\neq 0$ donc les λ_j sont non nuls. En notant δ_j une racine carrée de λ_j, on a $\prod\limits_{j=1}^{r}(M^2-\lambda_j I_n)=0=\prod\limits_{j=1}^{r}(M-\delta_j I_n)(M+\delta_j I_n)$ donc $\prod\limits_{j=1}^{r}(X-\delta_j)(X+\delta_j)$ est scindé à racines simples et annulateur de M qui est donc diagonalisable.
- sinon, $P=X\prod\limits_{j=1}^{r}(X-\lambda_r)$ annule M^2 ($\lambda_j\neq 0$) : $M^2\prod\limits_{j=1}^{r}(M^2-\lambda_j I_n)=M^2\prod\limits_{j=1}^{r}(M-\delta_j I_n)(M+\delta_j I_n)=0$. Mais comme rang $(M)=$ rang (M^2) par hypothèse et que $\mathrm{Ker}(M)\subset\mathrm{Ker}(M^2)$, on a par la formule du rang $\mathrm{Ker}(M)=\mathrm{Ker}(M^2)$. Or $M^2\prod\limits_{j=1}^{r}(M-\delta_j I_n)(M+\delta_j I_n)=0\Longleftrightarrow \mathrm{Im}\Big(\prod\limits_{j=1}^{r}(M-\delta_j I_n)(M+\delta_j I_n)\Big)\subset\mathrm{Ker}(M^2)$ qui se transforme en $\mathrm{Im}\Big(\prod\limits_{j=1}^{r}(M-\delta_j I_n)(M+\delta_j I_n)\Big)\subset\mathrm{Ker}(M)\Longleftrightarrow M\prod\limits_{j=1}^{r}(M-\delta_j I_n)(M+\delta_j I_n)=0$ et $X\prod\limits_{j=1}^{r}(X-\delta_j)(X+\delta_j)$ est scindé à racines simples et annulateur de M qui est donc diagonalisable.
b. Il faut regrouper les sous-espaces propres dans chacun des sous-espaces stables P_k. À faire !

6.83 **a.** Un petit calcul donne $A^2=4I_4$. On en déduit que $A^{2n}=4^n I_4$ et $A^{2n+1}=4^n A$ pour tout entier n.
b. Grâce à $A^2=4I_4$, la matrice A est inversible et $A^{-1}=\frac{1}{4}A$.
c. Le polynôme X^2-4 est annulateur de A donc $\mathrm{Sp}(A)\subset\{-2,2\}$. Déterminons les deux sous-espaces propres. Après calculs $E_2(A)=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ avec $v_1=(1,0,0,1)$ et $v_2=(2,1,1,0)$ et $E_{-2}(A)=\mathrm{Vect}(v_3,v_4)$ avec $v_3=(0,1,-1,0)$ et $v_4=(-1,2,0,1)$. On a trouvé une base de vecteurs propres (car $E_2(A)$ et $E_{-2}(A)$ sont en somme directe et que $2+2=4$) donc A est diagonalisable. On pouvait aussi dire que ce polynôme X^2-4 est scindé à racines simples donc que A est diagonalisable.
d. On calcule $\det(A)$ pour trouver $16\neq 0$ donc A est inversible.
De plus, la matrice A est symétrique réelle donc A est diagonalisable d'après le théorème spectral ; il existe même une matrice orthogonale P telle que $A=PD{}^tP$ avec D diagonale.

6.84 **a.** Par définition, ce reste R a un degré majoré par 3 donc f est déjà bien définie. Pour $(P,Q)\in\mathbb{R}_3[X]^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, on a $X^2(\lambda P+\mu Q)=\lambda(X^2P)+\mu(X^2Q)=\lambda(UD+f(P))+\mu(VD+f(Q))=(\lambda U+\mu V)D+(\lambda f(P)+\mu f(Q))$ et le polynôme $\lambda f(P)+\mu f(Q)$ est de degré inférieur ou égal à 3 donc il est le reste de la division euclidienne de $X^2(\lambda P+\mu Q)$ par D. Ainsi $f(\lambda P+\mu Q)=\lambda f(P)+\mu f(Q)$ et f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
b. Clairement $f(1)=X^2$ et $f(X)=X^3$. De plus, comme $X^2X^2=X^4=D+1$, on a $f(X^2)=1$. Enfin $X^2X^3=XD+X$ donc $f(X^3)=X$. Ainsi, la matrice f dans la base canonique est $A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$. Ainsi, $\chi_f=\chi_A=(X-1)^2(X+1)^2$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(f)=\{-1,1\}$. f est diagonalisable si et seulement si A l'est, c'est-à-dire si et seulement $(X-1)(X+1)=X^2-1$ est annulateur de A. Or $A^2=I_4$ par calculs donc f est diagonalisable.
c. $A^2=I_4$ donc A est inversible donc f est injective.

6.85 $\chi_M=\begin{vmatrix}X-1-a&-1&1\\a-2&X-2&2\\1&1&X-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}X-1-a&-1&0\\a-2&X-2&X\\1&1&X\end{vmatrix}$ après l'opération $C_3\longleftarrow C_3+C_2$ puis, après $L_2\longleftarrow L_2-L_3$, on obtient $\chi_M=\begin{vmatrix}X-1-a&-1&0\\a-3&X-3&0\\1&1&X\end{vmatrix}$. On développe par rapport à la troisième colonne et $\chi_M=X\begin{vmatrix}X-1-a&-1\\a-3&X-3\end{vmatrix}=X\big((X-1-a)(X-3)+a-3\big)=X(X^2-(a+4)X+4a)=X(X-a)(X-4)$.
Traitons trois cas :

- Si $a\notin\{0,4\}$, alors χ_M est scindé à racines simples donc M est diagonalisable.

• Si $a = 0$, $\chi_M = X^2(X-4)$, rang $(M) = 1$ car $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc, avec la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = 2$ et M est diagonalisable car les ordres algébrique et géométrique de 0 sont égaux.

• Si $a = 4$, $\chi_M = X(X-4)^2$, $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $M - 4I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc $\dim(E_4(M)) = 1$ toujours d'après la formule du rang et l'ordre de multiplicité géométrique de 4 est strictement inférieur à son ordre algébrique donc M n'est alors pas diagonalisable.

En conclusion : la condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable est $a \neq 4$.

• Plus précisément si $a = 0$: $E_0(M) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (0,1,1)$ et $v_2 = (1,-1,0)$ et $E_4(M) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (1,2,-1)$ donc $M = PDP^{-1}$ avec $D = 4E_{3,3}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

• Plus précisément si $a = 4$: comme χ_M est scindé dans $\mathbb{R}$, la matrice M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Après calculs, on trouve $E_0(M) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (0,1,1)$ et $E_4(M) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (1,-1,0)$. On espère prouver que M est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (réduction de Jordan) ce qui nous pousse à chercher un vecteur v_3 tel que $Mv_3 = 4v_3 + v_2$ ou encore $(M - 4I_3)v_3 = v_2$. On trouve par exemple $v_3 = \left(\frac{3}{4}, 0, -\frac{1}{4}\right)$ et (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ donc $M = QTQ^{-1}$ avec $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$.

6.86 **a.** <u>Analyse</u> : soit un hyperplan H supposé stable par u.

<u>Méthode 1</u> : soit φ une forme linéaire non nulle sur E telle que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Pour $x \in H$, on a $u(x) \in H$ donc $\varphi(u(x)) = 0$, ainsi $\psi = \varphi \circ u$ est une forme linéaire sur E telle que $H \subset \mathrm{Ker}(\psi)$. Soit $\psi = 0$ et alors $\psi = 0.\varphi = \lambda\varphi$ avec $\lambda = 0$, soit $\psi \neq 0$ et alors $H = \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$ donc, d'après le cours, φ et ψ sont proportionnelles et $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi = \varphi \circ u$. Que λ soit nul ou pas, il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\psi = \varphi \circ u = \lambda\varphi$ ce qui s'écrit aussi $\varphi \circ (u - \lambda \mathrm{id}_E) = 0$ donc $\mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(\varphi) = H$.

<u>Méthode 2</u> : Soit $\mathcal{B}' = (v_1, \cdots, v_{n-1})$ une base de H qu'on complète en une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n)$ de E. Alors la stabilité de H par u montre que la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} A' & C \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_H)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Ainsi $A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} A' - \lambda I_{n-1} & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ possède une dernière ligne de 0 ce qui montre que $\mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_{n-1}) = H$.

<u>Synthèse</u> : s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset H$, alors soit $x \in H$, on a alors $u(x) = u(x) - \lambda x + \lambda x$ donc $u(x) = (u - \lambda \mathrm{id}_E)(x) + \lambda x \in H$ car $(u - \lambda \mathrm{id}_E)(x) \in \mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset H$. Ainsi H est stable par u.

On a bien établi l'équivalence : H stable par $u \iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset H$.

b. Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ stable par A. Distinguons selon la dimension de F :

• si $\dim(F) = 0$, alors $F = \{0\}$ qui est bien stable par A.

• si $\dim(F) = 1$, alors $F = \mathrm{Vect}(e)$ et on sait que F est stable par u si et seulement si e est un vecteur propre de A. On calcule donc $\chi_A = X^3 - 3X^2 + 12X$ donc 0 est la seule valeur propre réelle car le discriminant de $X^2 - 3X + 12$ vaut $\Delta = 9 - 48 < 0$. Comme $\mathrm{rang}(u) = 2$, $\mathrm{Ker}(A) = E_0(A)$ est une droite, c'est $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(e)$ avec $e = (1,1,1)$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(e)$ est la seule droite stable par A.

• si $\dim(F) = 2$, F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et la question précédente montre l'existence d'un scalaire λ tel que $\mathrm{Im}(A - \lambda I_3) \subset F$ ce qui prouve que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ car $A - \lambda I_3$ ne peut pas être inversible. Ainsi, $\lambda = 0$ et $\mathrm{Im}(A) \subset F$ donc $\mathrm{Im}(A) = F$ car ils ont même dimension. Comme $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(a,b)$ avec $a = f(e_2) = (-6,-10,4)$ et $b = f(e_3) = (-4,-8,3)$ par exemple, $\mathrm{Vect}(a,b)$ est le seul plan stable par A.

• si $\dim(F) = 3$, alors $F = \mathbb{R}^3$ qui est bien stable par A.

Au final, les seuls sous-espaces propres stables par A sont $\{0\}$, la droite $\mathrm{Ker}(A)$, le plan $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathbb{R}^3$.

6.87 **a.** Une matrice de taille n est diagonalisable si elle possède n valeurs propres distinctes ou si elle est symétrique réelle (théorème spectral).

b. $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = -1$ donc $\chi_A = X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ est scindé à racines simples. Comme $v_1 = (1,1) \in E_1(A)$ et $v_2 = (1,2) \in E_{-1}(A)$, une base de vecteurs propres est (v_1, v_2) de sorte que $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ par la formule de changement de bases.

c. Par Cayley-Hamilton ou par calcul direct : $A^2 = I_2$. Ainsi, par un calcul par blocs, $B^2 = \begin{pmatrix} 4I_2 & 0 \\ 0 & 9I_2 \end{pmatrix}$. Par conséquent $B^2 - 4I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5I_2 \end{pmatrix}$ et $B^2 - 9I_4 = \begin{pmatrix} -5I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $(B^2 - 4I_4)(B^2 - 9I_4) = 0$. Le polynôme $(X^2 - 4)(X^2 - 9)$ est scindé à racines simples et annule B donc B est diagonalisable.

Autre méthode : clairement, d'après la question **a.** et des calculs par blocs, $Bw_1 = 2w_1$ si $w_1 = (1,1,0,0)$; $Bw_2 = -2w_2$ avec $w_2 = (1,2,0,0)$; $Bw_3 = 3w_3$ avec $w_3 = (0,0,1,1)$ et $Bw_4 = -3w_4$ avec $w_4 = (0,0,1,2)$ et on a trouvé une base ($\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ base de $\mathbb{R}^4$) de vecteurs propres de B.

Autre méthode : $\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_2 - 2A & 0 \\ 0 & \lambda I_2 - 3A \end{vmatrix} = 36 \begin{vmatrix} (\lambda/2)I_2 - A & 0 \\ 0 & (\lambda/3)I_2 - A \end{vmatrix} = 36\chi_A\left(\frac{\lambda}{2}\right)\chi_A\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ donc $\chi_B(\lambda) = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 9)$ donc $\chi_B = (X-2)(X+2)(X-3)(X+3)$ est scindé à racines simples. Ok !

On pouvait aussi poser la matrice inversible $Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ (puisque $\det(Q) = \det(P)^2 > 0$) d'inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ et calculer par blocs $Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 2D & 0 \\ 0 & 3D \end{pmatrix}$ de sorte que B est diagonalisable.

6.88 **a.** Soit $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E)$, on a donc $u(x) = 0_E$ (donc $u^2(x) = 0_E$) et $u^2(x) + u(x) + x = 0_E$. On en déduit que $x = (u^2(x) + u(x) + x) - u^2(x) - u(x) = 0_E$. Par conséquent $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.

b. Comme par hypothèse $u^3 + u^2 + u = (u^2 + u + \mathrm{id}_E) \circ u = 0$, on a $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E)$. Par la formule du rang, on a $n = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u))$. Or, d'après la question **a.**, on a l'inégalité $\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E)) \leqslant n$ car ces deux sous-espaces sont en somme directe. On en déduit donc que $\dim(\mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(u))$. Si on relie ceci au renseignement $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E)$, on conclut que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E)$. Toujours d'après la question **a.**, on en déduit que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont en somme directe, et la formule du rang nous permet d'affirmer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

c. On sait que $\deg(\chi_v)$ est la dimension de l'espace de départ de v d'où $\deg(\chi_v) = \dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rang}(u)$.

d. D'après le théorème du rang, comme $\mathrm{Im}(u)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$, on sait que u induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}(u)$ dans $\mathrm{Im}(u)$, ainsi v est un automorphisme de $\mathrm{Im}(u)$ donc $\det(v) \neq 0$ et $0 \notin \mathrm{Sp}(v)$. Comme v est un automorphisme et que, en tant que restriction de u, on a $v^3 + v^2 + v = 0$, en composant par v^{-1}, il vient $v^2+v+\mathrm{id}_E=0$. On met ceci sous forme canonique : $\left(v+\frac{1}{2}\mathrm{id}_E\right)^2=-\frac{3}{4}\mathrm{id}_E$. On prend le déterminant de cette dernière relation et on obtient $\det\left(\left(v+\frac{1}{2}\mathrm{id}_E\right)^2\right)=\left(-\frac{3}{4}\right)^r$ où $r=\mathrm{rang}\,(u)$.

Or $\det\left(\left(v+\frac{1}{2}\mathrm{id}_E\right)^2\right)=\det\left(v+\frac{1}{2}\mathrm{id}_E\right)^2\geqslant 0$ donc $\left(-\frac{3}{4}\right)^r\geqslant 0$ ce qui implique la parité de $r=\mathrm{rang}\,(u)$.

6.89 **a.** D'abord $t\mapsto e^{-t}P(t)$ sont continues sur $[x;+\infty[$ pour tout $P\in E$ et tout $x\in\mathbb{R}$. De plus, $e^{-t}P(t)\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée donc $\int_x^{+\infty}e^{-t}P(t)dt$ converge par comparaison avec les intégrales de RIEMANN.

Pour $x\in\mathbb{R}$, $U(1)(x)=e^x\int_x^{+\infty}e^{-t}dt=e^x[-e^{-t}]_x^{+\infty}=1$ donc $U(1)=1$ est bien un polynôme de E.

Soit $k\in[\![0;n-1]\!]$ tel que $U(X^k)$ est un polynôme de degré k. Alors par IPP (facile à justifier) et par croissance comparée, $U(X^{k+1})(x)=e^x\int_x^{+\infty}e^{-t}t^{k+1}dt=e^x[-e^{-t}t^{k+1}]_x^{+\infty}+(k+1)e^x\int_x^{+\infty}e^{-t}t^kdt$ de sorte que $U(X^{k+1})=X^{k+1}+(k+1)U(X^k)$. Comme la linéarité de U découle de celle de l'intégrale, la récurrence précédente montre que U est un endomorphisme de E. De plus, $U(1)=1$ et $U(X^{k+1})=X^{k+1}+(k+1)U(X^k)$ montre que $U(X^k)$ est un polynôme de degré k exactement et unitaire.

b. La matrice A de U dans la base canonique $(1,X,\cdots,X^n)$ est donc triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Par conséquent $\chi_U=\chi_A=(X-1)^{n+1}$ et 1 est la seule valeur propre de U. Si U était diagonalisable, alors A serait semblable à la matrice I_{n+1} donc serait égale à I_{n+1}, ce qui est faux car $U(X)=X+1\neq X$: U n'est pas diagonalisable. Comme $\det(U)=\det(A)=1$, U (et A) sont inversibles.

Continuons : $U(X^2)=X^2+2X+2$, $U(X^3)=X^3+3X^2+6X+6$, $U(X^4)=X^4+4X^3+12X^2+24X+24$. Par récurrence simple : $\forall k\in[\![0;n]\!],\ U(X^k)=k!\sum\limits_{i=0}^{k}\frac{X^i}{i!}$. Ainsi $A=(a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{i,j}=0$ si $i>j$ et $a_{i,j}=\frac{j!}{i!}$.

On applique U^{-1} à $U(X^{k+1})=X^{k+1}+(k+1)U(X^k)$ ce qui donne $X^{k+1}=U^{-1}(X^{k+1})+(k+1)X^k$. Ainsi $\forall k\in[\![1;n]\!],\ U^{-1}(X^k)=X^k-kX^{k-1}$ et $U^{-1}(1)=1$. Alors $U^{-1}:P\mapsto P-P'$ (coïncidence sur une base).

On aurait aussi pu dériver la relation $U(P)(x)=e^x\int_x^{+\infty}e^{-t}P(t)dt$. Ainsi $U(P)'(x)=e^x(-e^{-x}P(x))+U(P)(x)$ donc $U(P)-U(P)'=P$; en notant $V:P\mapsto P'$, on a $V\circ U=\mathrm{id}$ donc U est inversible et $U^{-1}=V$.

6.90 Les colonnes C_1, C_2, C_3 et C_4 forment une famille libre et $C_1=C_5$. Ainsi $\mathrm{rang}\,(N)=4$, le réel 0 est valeur propre de N et $E_0(N)=\mathrm{Vect}(E_1-E_5)$. De plus, $N-I_5$ est clairement de rang 2 donc 1 est valeur propre de N et $E_1(N)=\mathrm{Vect}(E_2,E_3,E_4)$. Enfin, comme $\mathrm{Tr}\,(N)=5$ est la somme des valeurs propres, la dernière valeur propre est 2 et $E_2(N)=\mathrm{Vect}(E_1+2E_2+2E_3+2E_4+E_5)$ car $E_0(N)$, $E_1(N)$ et $E_2(N)$ sont en somme directe.

On a donc trouvé une base de vecteurs propres pour l'endomorphisme canoniquement associé à N (donc diagonalisable) et, par changement de bases, $N=PDP^{-1}$ avec $D=\mathrm{diag}(0,1,1,1,2)$ et $P=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&2\\-1&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

6.91 **a.** Pour $k\in\mathbb{N}$, on a la relation $x^{(k+1)}=x^{(k)}-\alpha(Ax^{(k)}-b)=(I_n-\alpha A)x^{(k)}+\alpha b$ donc $x^{(k+1)}=B_\alpha x^{(k)}+c$ si on pose la matrice $B_\alpha=I_n-\alpha A$ et le vecteur $c=\alpha b$.

b. Tout d'abord, il existe bien une unique solution de $Au=b$ qui est $u=A^{-1}b$ car A est inversible.

Classiquement, on va faire intervenir le vecteur fixe v de l'application $g:x\mapsto B_\alpha x+c$ qui vérifie donc $v=B_\alpha v+c\iff v=\frac{1}{\alpha}A^{-1}c\iff v=A^{-1}b$ et v est bien l'unique vecteur qui vérifie $Av=b$ car A est inversible. En définissant $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par $y^{(k)}=x^{(k)}-v$, on a $y^{(0)}=x^{(0)}-v$ et $\forall k\in\mathbb{N},\ y^{(k+1)}=B_\alpha y^{(k)}$.

Comme $\chi_A=\prod\limits_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$ est scindé (mais pas forcément à racines simples), A est trigonalisable donc il existe P inversible et T triangulaire supérieure (avec $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ sur la diagonale) telles que $A=PTP^{-1}$. Ainsi, on

a aussi $B_\alpha = P(I_n - \alpha T)P^{-1}$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N},\ y^{(k)} = B_\alpha^k y^{(0)}$ et B_α^k est triangulaire supérieure avec $(1-\alpha\lambda_1)^k, \cdots, (1-\alpha\lambda_n)^k$ sur la diagonale.
Montrons que la condition nécessaire et suffisante cherchée est $H =$ "$\forall i \in [\![1;n]\!],\ |1-\alpha\lambda_i| < 1$".
• Supposons H réalisée. Notons $a = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} |1-\alpha\lambda_i| < 1$ et $b = \underset{1\leqslant j<i\leqslant n}{\mathrm{Max}} |\alpha t_{i,j}| \geqslant 0$. En notant M la matrice triangulaire supérieure avec des a sur la diagonale et des b au dessus, on a $M = aI_n + bN$ avec N nilpotente d'indice n. Par une récurrence simple, comme $|B_\alpha| \leqslant M$ (ce qui signifie que toutes les cases de la matrice B_α sont inférieures en valeur absolue aux même cases dans la matrice M : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ |B_\alpha[i,j]| \leqslant M[i,j]$), on montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ |B_\alpha^k| \leqslant M^k$. Or $M^k = (aI_n + bN)^k = \sum\limits_{m=0}^{n-1} a^{k-m}b^m \binom{k}{m} N^m$. Par croissances comparées, comme $\binom{k}{m}$ est un polynôme en k et que $|a| < 1$, on a $\forall m \in [\![0;n-1]\!],\ \lim\limits_{n\to+\infty} a^{k-m}b^m\binom{k}{m} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k = 0$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{k\to+\infty} B_\alpha^k = 0$. Par conséquent, $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, la suite $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 donc $(x^{(k)})_{k\geqslant 0}$ converge vers v et la méthode (I) converge.
• S'il existe $i \in [\![1;n]\!]$ tel que $|1-\alpha\lambda_i| \geqslant 1$, alors soit un vecteur propre $v_i \neq 0_E$ de A associé à λ_i. Considérons la suite $(x^{(k)})_{k\geqslant 0}$ définie par $x^{(0)} = v + v_i$ et $\forall k \geqslant 0,\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha r_k = B_\alpha x^{(k)} + c$ (suite arithmético-géométrique matricielle). Alors en posant $y^{(k)} = x^{(k)} - v$, on a $y^{(0)} = v_i$ et on montre (classique) que $y^{(k+1)} = B_\alpha y^{(k)}$. Or $B_\alpha v_i = v_i - \alpha\lambda_i v_i = (1-\alpha\lambda_i)v_i$ donc, par récurrence, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ y^{(k)} = (1-\alpha\lambda_i)^k v_i$. Or $|1-\alpha\lambda_i| > 1$ ou $|1-\alpha\lambda_i| = 1$ mais $1-\alpha\lambda_i \neq 1$ donc la suite numérique $((1-\alpha\lambda_i)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ diverge dans $\mathbb{C}$. Ainsi, comme $v_i \neq 0_E$, la suite vectorielle $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ diverge aussi comme le fait $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ce qui prouve que la méthode (I) ne converge pas sous ces hypothèses.
c. Si les λ_k ne sont pas tous de même signe, il existe un $k \in [\![1;n]\!]$ tel que $\alpha\lambda_k < 0$ et on aura donc $|1-\alpha\lambda_k| = 1-\alpha\lambda_k > 1$ et H n'est donc pas réalisée. Ainsi la méthode (I) ne converge pas d'après **b.**.
d. Puisque (I) converge, alors $\forall i \in [\![1;n]\!],\ -1 < 1-\alpha\lambda_i < 1$ donc $0 < \alpha < \dfrac{2}{\lambda_i}$. On a donc $0 < \alpha < C$ où $C = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Min}}\left(\dfrac{2}{\lambda_i}\right) = \dfrac{2}{\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}}\ \lambda_i}$. Le graphe de la fonction $f_i : \alpha \mapsto |1-\lambda_i\alpha|$ est composé de deux demi-droites de pente $\pm\lambda_i$ et qui passent toutes deux par le point $\left(\dfrac{1}{\lambda_i}, 0\right)$ (l'une passant aussi par le point $(0,1)$). Plus $|\beta|$ est petit, plus la suite (β^n) tend vite vers 0. On aura donc intérêt à trouver α tel que $\alpha \in]0;C[$ et $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} |1-\alpha\lambda_i|$ est minimal. En regardant les graphes respectifs des fonctions f_i, on constate que ceci intervient quand les graphes de f_1 et de f_n se rencontrent (en supposant que $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ alors $C = \dfrac{2}{\lambda_n}$) donc quand $\lambda_n\alpha - 1 = 1 - \lambda_1\alpha \iff \alpha = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$. Ainsi, dans le cas général : $\alpha_{opt} = \dfrac{2}{\underset{\lambda\in Sp(A)}{\mathrm{Min}}\ \lambda + \underset{\lambda\in Sp(A)}{\mathrm{Max}}\ \lambda}$.

6.92 **a.** $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ donc rang $(A) \leqslant 2$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ donc rang $(B) \leqslant 2$. Ainsi, rang $(AB) \leqslant$ rang $(A) \leqslant 2$ car Im $(AB) \subset$ Im (A). Comme rang $(AB) \neq 3$, AB n'est pas inversible. Ainsi $\det(AB) = 0$ donc $x = 1$.
b. On calcule et on trouve $\chi_{AB} = X(X-1)(X-2)$ donc $(AB)^3 - 3(AB)^2 + 2(AB) = 0$ (1).
<u>Méthode 1</u> : L'équation précédente s'écrit aussi $A((BA)^2 - 3(BA) + 2I_2)B = 0$. On constate que rang $(AB) = 2$. Or on a toujours rang $(AB) \leqslant$ rang (A) donc rang $(A) \geqslant 2$. Mais comme $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, on a forcément rang $(A) = 2$. Ainsi A est "injective" (son application linéaire canoniquement associée l'est). De même rang $(AB) \leqslant$ rang (B) car $\mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(AB)$ et on utilise le théorème du rang. Mais comme $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, on a forcément rang $(B) = 2$. Ainsi B est "surjective" (son application linéaire canoniquement associée l'est).
Par conséquent, en notant $C = (BA)^2 - 3(BA) + 2I_2$, on a $ACB = 0$ donc Im $(BC) \subset \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ donc $CB = 0$. Comme Im $(B) \subset \mathrm{Ker}(C)$ et que Im $(B) = \mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{Ker}(C) = \mathbb{R}^2$ donc $C = (BA)^2 - 3(BA) + 2I_2 = 0$. Le polynôme $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ annule BA et est scindé à racines simples. Ainsi BA est diagonalisable.

Méthode 2 : L'équation (1) multipliée à gauche par B et à droite par A donne $(BA)^4 - 3(BA)^3 + 2(BA)^2 = 0$ donc $P = X^2(X-1)(X-2)$ annule A. P étant scindé dans $\mathbb{R}[X]$, BA est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de plus $\mathrm{Sp}(BA) \subset \{0,1,2\}$ et $\mathrm{Tr}\,(BA)$ est la somme de ses deux valeurs propres réelles. $\mathrm{Tr}\,(BA) = \mathrm{Tr}\,(AB) = 3$ donc on ne peut avoir que $\mathrm{Sp}(BA) = \{1,2\}$ donc BA admet deux valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.

c. Soit $Y \in \mathrm{Ker}(B) \cap \mathrm{Im}\,(A)$, alors il existe $X \in \mathbb{R}^2$ tel que $Y = AX$ et $BY = 0$ donc $(BA)X = 0$. Mais BA est inversible (car $0 \notin \mathrm{Sp}(BA)$) donc $Y = 0$ d'où $X = 0$ et on a $\mathrm{Ker}(B)$ et $\mathrm{Im}\,(A)$ sont en somme directe.
Or $\dim(\mathrm{Ker}(B)) = 1$ par le théorème du rang car $\mathrm{rang}\,(B) = 2$ et $\dim(\mathrm{Im}\,(A)) = 2$ car $\mathrm{rang}\,(A) = 2$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(B)) + \dim(\mathrm{Im}\,(A) = 3$ et au final : $\mathrm{Ker}(B) \oplus \mathrm{Im}\,(A) = \mathbb{R}^3$.

6.93 **a.** Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $0 \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \leqslant n$ et toutes les valeurs sont possibles ca la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (définie par blocs) vérifie bien $J_r^2 = J_r$ et $\mathrm{rang}\,(J_r) = r$ pour tout entier $r \in [\![0;n]\!]$.

b. Soit $U \in P$ et p la projection canoniquement associée à U. Ainsi $\mathrm{rang}\,(p) = \mathrm{rang}\,(U)$ qu'on note $r \in [\![0;n]\!]$. Il existe une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; il suffit de prendre une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n)$ telle que $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_r)$ et $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \cdots, e_n)$. Ainsi, toute matrice $U \in P$ de rang r est semblable à J_r.
Il existe donc $n+1$ classes de similitude dans P dont des représentants sont les matrices $0 = J_0, \cdots, J_n = I_n$.

c. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = 0$, alors $\mathrm{Im}\,(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$ donc $n = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rang}\,(A) \geqslant 2\,\mathrm{rang}\,(A)$ donc $\mathrm{rang}\,(A) \leqslant m = \frac{n}{2}$. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie alors que l'endomorphisme u vérifie bien $u^2 = 0$ et $\mathrm{rang}\,(u) = m$.

6.94 **a.** Soit X_0 le vecteur colonne ne contenant que des 1, alors $A^T X_0 = X_0$ par hypothèse sur les colonnes de A (donc les lignes de A^T). Ainsi, 1 est valeur propre de A^T donc aussi valeur propre de A car $\chi_A = \chi_{A^T}$.

b. Soit A et B deux matrices de E et $C = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = AB$. Comme $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$, la somme des termes de la j-ième colonne de C vaut $\sum\limits_{i=1}^{n} c_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,j} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,k} \right) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,j} = 1$ car la somme des termes de chaque colonne k de A vaut 1 et que la somme de chaque colonne j de la matrice B vaut aussi 1. Par conséquent $C \in E$ et E est bien stable par produit.

c. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^T)$ de sorte qu'il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A^T X = \lambda X$. Notons j l'un des indices tels que $|x_j| = ||X||_\infty = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k| > 0$. Alors, en regardant à la ligne j de $A^T X = \lambda X$, on trouve $\lambda x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i$ donc, par inégalité triangulaire, $|\lambda|\,|x_j| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}||x_i| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}||x_j| \leqslant |x_j|$. Ainsi, $|\lambda| \leqslant 1$.

6.95 Soit $C = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice circulante définie par $c_{1,2} = \cdots = c_{n-1,n} = c_{n,1} = 1$ et $c_{i,j} = 0$ sinon. En tant qu'application linéaire, C envoie la base $(e_1, \cdots, e_n)$ sur la base $(e_n, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1})$ donc C est inversible et $C^{-1} = C^T$ (également circulante) car C^{-1} envoie la base $(e_1, \cdots, e_n)$ sur $(e_2, e_3, \cdots, e_n, e_1)$.
La matrice M de taille n de l'énoncé vaut $M = aI_n + bC + bC^T$.

$\chi_C = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}$ donc, après développement par rapport à la première colonne, $\chi_C = X^n - 1$

donc $\mathrm{Sp}(C) = \mathbb{U}_n$. La matrice C admet n valeurs propres complexes distinctes et est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'après le cours. Il existe donc une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $C = PDP^{-1}$ avec la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(1, \omega, \cdots, \omega^{n-1})$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est un générateur du groupe $\mathbb{U}_n$. On vérifie, en résolvant un système par exemple, qu'un vecteur propre de C associé à la valeur propre ω^k est le vecteur colonne X_k qui vérifie $X_k^T = (1\ \omega^k\ \omega^{2k}\ \cdots\ \omega^{(n-1)k})$. La matrice $P = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est donc la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et la base $\mathcal{B} = (X_0, \cdots, X_{n-1})$ formée de vecteurs propres de C. On a donc $C = PDP^{-1}$ par formule de changement de base et $C^{-1} = C^T = PD^{-1}P^{-1}$ d'où $M = aI_n + bC + bC^{-1} = P\Delta P^{-1}$ en ayant posé $\Delta = aI_n + bD + bD^T = \mathrm{diag}(a + 2b, a + b\omega + b\omega^{-1}, \cdots, a + b\omega^{n-1} + b\omega^{-(n-1)})$. Comme $\omega^k + \omega^{-k} = 2\mathrm{Re}\,(\omega^k) = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on en déduit que M est inversible si et seulement si Δ l'est, c'est-à-dire si $\forall k \in [\![0; n-1]\!],\ a + 2b\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \neq 0$.

6.96 **a.** Le caractère continu est linéaire et admettre une limite finie en $+\infty$ l'est aussi donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car il contient la fonction nulle. E est donc lui-même un espace vectoriel. Par ailleurs, si $f \in E$, il est clair que $g = T(f) \in E$ aussi car g est continue et tend vers la même limite que f en $+\infty$ par composition. Soit $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$ car on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $T(\lambda f + g)(x) = (\lambda f + g)(x + 1) = \lambda f(x + 1) + g(x + 1) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x) = (\lambda T(f) + T(g))(x)$ ce qui prouve la linéarité de T : T est bien un endomorphisme de E.

b. Analyse : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ non nulle telle que $T(f) = \lambda f$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x + 1) = \lambda f(x)$, alors en notant $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, on a $\ell = \lambda\ell$ en passant à la limite dans la relation $f(x + 1) = \lambda f(x)$ quand $x \to +\infty$.

- Si $\ell \neq 0$ alors $\lambda = 1$.
- Si $\ell = 0$, soit $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) \neq 0$, par une récurrence simple, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(a + n) = \lambda^n f(a)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} f(a + n) = 0$ par composition, la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 ce qui impose $\lambda \in]-1; 1[$.
- Si $\lambda = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + 1) = 0.f(x) = 0$ ce qui contredit f non nulle.

Ce qui précède montre que le spectre de T est inclus dans $]-1; 0[\cup]0; 1]$.

Synthèse :

- Si $\lambda = 1$, la fonction 1 constante égale à 1 vérifie $T(1) = 1$ donc 1 est valeur propre de T. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x+n) = f(x)$ par une récurrence simple donc, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $f(x) = \ell$ donc f est constante. On vient de montrer que $E_1(T) = \mathrm{Vect}(1)$.
- si $\lambda \in]0; 1[$, soit $p_\lambda : x \mapsto \lambda^x$. La fonction p_λ est non nulle, continue et tend vers 0 en $+\infty$ donc $p_\lambda \in E$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $p_\lambda(x + 1) = \lambda^{x+1} = \lambda p_\lambda(x)$ donc $T(p_\lambda) = \lambda p_\lambda$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$.
- si $\lambda \in]-1; 0[$, la fonction $q_\lambda : x \mapsto \sin(\pi x)|\lambda|^x$ est non nulle, continue et tend vers 0 en $+\infty$ donc $q_\lambda \in E$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $q_\lambda(x+1) = \sin(\pi x+\pi)|\lambda|^{x+1} = (-|\lambda|)q_\lambda(x) = \lambda q_\lambda(x)$ donc $T(q_\lambda) = \lambda q_\lambda$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$.

Par conséquent : $\mathrm{Sp}(T) =]-1; 0[\cup]0; 1]$.

6.97 **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, dans le calcul de $\chi_A(\lambda)$, on développe par rapport à la ligne 1 et on obtient la relation

$$\begin{vmatrix} \lambda & \cdots & \cdots & 0 & -a_n \\ -a_1 & \lambda & & & 0 \\ 0 & -a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ (0) & & -a_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(-a_n) \begin{vmatrix} -a_1 & \lambda & & (0) \\ 0 & -a_2 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ainsi, comme il ne reste que les déterminants de matrices triangulaires, $\chi_A(\lambda) = \lambda^n - (-1)^{n+1}(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n} a_k$.
En notant $p = \prod_{k=1}^{n} a_k$, on a donc $\chi_A = X^n - p$. Traitons trois cas :

- Si $a_1 = \cdots = a_n = 0$, alors $A = 0$ donc A est diagonalisable.
- Si $p = 0$ et $(a_1, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$, alors $A \neq 0$ alors que d'après CAYLEY-HAMILTON on a $A^n = 0$ car $\chi_A = X^n$ donc A est nilpotente alors que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) < n$ car $A \neq 0$. Les ordres algébrique et géométrique de 0 n'étant pas égaux, A n'est pas diagonalisable.
- Si $p \neq 0$, $\chi_A = X^n - p$ étant scindé à racines simples et annulateur de A, A est diagonalisable.

On conclut que A est diagonalisable si et seulement $(a_1 = \cdots = a_n = 0$ ou $a_1 \times \cdots \times a_n \neq 0)$.
b. • Si $a_1 = \cdots = a_n = 0$, toute base de $\mathbb{C}^n$ est une base de vecteurs propres de $A = 0$.
• Si $p = \rho e^{i\theta} \neq 0$, les racines de $\chi_A = X^n - p$, donc les valeurs propres de A, sont toutes les racines n-ièmes de p, qui sont les complexes $z_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$ (pour $k \in [\![0; n-1]\!]$). Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$, on sait qu'en résolvant le système $AX = z_k X$ on va trouver une droite (car z_k est une valeur propre simple de A) et on trouve $E_{z_k}(A) = \mathrm{Vect}(v_k)$ avec $v_k = \left(a_n z_k^{n-1}, a_1 a_n z_k^{n-2}, a_1 a_2 a_n z_k^{n-3}, \cdots, p\right)$. Ainsi, $\mathcal{B} = (v_0, \cdots, v_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de A.

6.98 **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on effectue dans $\chi_A(\lambda)$ l'opération de GAUSS $C_n \longleftarrow C_n + \lambda C_{n-1} + \lambda^2 C_{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1} C_1$ et on développe par rapport à la colonne n, $\chi_A(\lambda) = (-1)^{n+1}\left(\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}\lambda^k\right) \times (-1)^{n-1} = \lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}\lambda^k$ donc $\chi_A = X^n - a_1 X^{n-1} - \cdots - a_n$ (en fait A est une matrice compagnon).
Pour tout complexe λ, le rang de $A - \lambda I_n$ est au moins égal à $n-1$ grâce à la sous-diagonale de 1 échelonnés. Par la formule du rang, la multiplicité géométrique de toute valeur propre de A est au plus égale à 1.
• Si χ_A est scindé à racines simples, on a directement la diagonalisabilité de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
• Réciproquement, s'il existe une racine complexe de χ_A ayant un ordre de multiplicité au moins égal à 2, A sera non diagonalisable car les ordres géométrique et algébrique de cette valeur propre seront différents.
La condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable est que χ_A soit scindé à racines simples.
b. Supposons donc A diagonalisable, elle admet donc d'après la question **a.** n valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ et une base de vecteurs propres $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_n)$ associés à ces valeurs propres.
• Si $\lim_{p\to+\infty} A^p = 0$, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $A^p V_k = \lambda_k^p V_k$ donc, comme $\lim_{p\to+\infty} A^p V_k = 0$ (car $M \mapsto MV_k$ est continue car linéaire en dimension finie) et que $V_k \neq 0$, on a $\lim_{p\to+\infty} \lambda_k^p = 0$ donc $|\lambda_k| < 1$ ou $\lambda_k = 1$.
• Réciproquement, supposons que $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $|\lambda_k| < 1$ ou $\lambda_k = 1$.

- <u>Méthode 1</u> : soit $X \in \mathbb{C}^n$ qu'on décompose $X = \sum_{k=1}^{n} x_k V_k$, alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $A^p X = \sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k^p V_k$ donc la suite $(A^p X)_{p\geqslant 0}$ converge (somme de suites vectorielles qui convergent). Il suffit alors de prendre les vecteurs $X = E_j$ de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ pour montrer que, en notant $A^p = (a_{i,j}^{(p)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, la suite $(a_{i,j}^{(p)})_{p\geqslant 0}$ converge c'est une suite coordonnée de la suite $(A^p E_j)_{p\geqslant 0}$ qui converge. On en déduit donc que $(A^p)_{p\geqslant 0}$ converge (les n^2 suites coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ convergent).
- <u>Méthode 2</u> : soit $p \in \mathbb{N}^*$, effectuons la division euclidienne de X^p par χ_A : $X^p = \chi_A Q + R$ (1) avec

$\deg(R) < n$. En posant $L_k = \prod\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \left(\dfrac{X - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} \right)$, on a bien $L_k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et si, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i L_i = 0$, en évaluant en λ_k, on trouve $\alpha_k = 0$ car $L_i(\lambda_k) = \delta_{i,k}$. La famille $(L_1, \cdots, L_n)$ est donc libre donc c'est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Ainsi, $R = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k L_k$. En évaluant en les λ_k dans (1) : $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $r_k = \lambda_k^p$. Ainsi, $A^p = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^p L_k(A)$ donc $(A^p)_{p \geqslant 0}$ est convergente comme somme de suites convergentes de matrices.

Ainsi, si A diagonalisable : $(\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ |\lambda| < 1 \text{ ou } \lambda = 1) \Longleftrightarrow (A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge.

6.99 **a.** On sait qu'il existe des polynômes annulateurs non nuls de A, par exemple χ_A d'après CAYLEY-HAMILTON. L'ensemble $\{\deg(P) \mid P \in \mathbb{C}[X],\ P \neq 0,\ P(A) = 0\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ qui admet donc un plus petit élément noté k. Soit P un tel polynôme de degré k annulateur de A qu'on choisit unitaire.

b. Considérons le reste de la division euclidienne de P par $X - \lambda$: $P = (X-\lambda)U_\lambda + P(\lambda)$. Comme $\deg(P) = k \geqslant 1$, on a $\deg(U_\lambda) = k - 1$. Alors $P(A) = (A - \lambda I_n)U_\lambda(A) + P(\lambda)I_n$. Or par hypothèse, $P(A) = 0$. De plus $P(\lambda) \neq 0$ car si on avait $P(\lambda) = 0$, on écrirait $P = (X - \lambda)Q$ donc $P(A) = (A - \lambda I_n)Q(A) = 0$ alors que $A - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ ce qui donnerait $Q(A) = 0$ ce qui contredit la minimalité du degré de P. Ainsi : $(A - \lambda I_n)\left(\dfrac{U_\lambda(A)}{P(\lambda)} \right) = I_n$ ce qui garantit que $(A - \lambda I_n)^{-1} = \dfrac{U_\lambda(A)}{P(\lambda)} = Q_\lambda(A)$ en notant $Q_\lambda = \dfrac{U_\lambda}{P(\lambda)} \in \mathbb{C}_{k-1}[X]$.

c. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ qui ne sont pas dans le spectre de A. Posons, pour $i \in [\![1;k]\!]$, le polynôme d'interpolation de LAGRANGE $P_i = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \left(\dfrac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right)$. Notons aussi $U = \prod\limits_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. Comme toutes les matrices $(A - \lambda_i I_n)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ sont inversibles car les $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ ne sont pas des valeurs propres de A : la matrice $U(A) = \prod\limits_{i=1}^{k} (A - \lambda_i I_n)$ est inversible et $\forall i \in [\![1;k]\!]$, $(A - \lambda_i I_n)P_i(A) = U(A)$ donc $(A - \lambda_i I_n)^{-1} = U(A)^{-1}P_i(A)$.

La famille $(P_1, \cdots, P_k)$ constitue une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ car si $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i P_i = 0$, en évaluant en λ_i, on trouve $\alpha_i = 0$.

Le polynôme $U - P$ est dans $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ car ces deux polynômes sont de degré k et unitaires. Ainsi il existe des constantes $(c_1, \cdots, c_k)$ telles que $U - P = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i P_i$. En évaluant en A, on a $U(A) - P(A) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i P_i(A) = U(A)$.

Il suffit de multiplier tout ceci par $U(A)^{-1}$ pour obtenir grâce à ce qui précède $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i (A - \lambda_i I_n)^{-1} = I_n$.

6.100 **a.** Si A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale donc $A^3 = PD^3P^{-1}$ avec D^3 diagonale donc A^3 est aussi diagonalisable (elles sont même codiagonalisable).

Soit A inversible telle que A^3 est diagonalisable, alors il existe un polynôme P scindé à racines simples (on le prend unitaire) tel que $P(A^3) = 0$. Si 0 est racine de P, alors $P = X^m Q$ où $Q(0) \neq 0$ et $P(A^3) = A^{3m}Q(A^3) = 0$ donc $Q(A^3) = 0$ car A^{3m} est inversible. Ainsi, il existe un polynôme scindé à racines simples annulateur de A^3 et avec un terme constant non nul. On scinde $Q = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$ (avec $\lambda_k \neq 0$ donc) et on appelle $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ les trois racines troisièmes de λ_k de sorte que, par exemple $\beta_k = j\alpha_k$ et $\gamma_k = j^2\alpha_k$ avec $\alpha_k^3 = \lambda_k$. On a alors $\prod\limits_{k=1}^{r} (A - \alpha_k I_n)(A - \beta_k I_n)(A - \gamma_k I_n) = 0$ donc $U = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)(X - \beta_k)(X - \gamma_k)$ est annulateur de A et il est scindé à racines simples car $\alpha_k \neq \beta_k$ ($j \neq 1$ et $\alpha_k \neq 0$) $\alpha_k \neq \gamma_k$, $\beta_k \neq \gamma_k$ et $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$ car $\lambda_i = \alpha_i^3 \neq a_j^3 = \lambda_j$, etc... Ainsi, A est diagonalisable.

b. $A = E_{1,2}$ est nilpotente, $\chi_A = X^n$ et $\dim(E_0(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A) = n - 1$ car $\mathrm{rang}\,(A) = 1$ donc A n'est pas diagonalisable alors que $A^3 = A^2 = 0$ est diagonalisable.

c. Soit $R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ (rotation plane d'angle $\frac{2\pi}{3}$), alors $\chi_R = X^2 + X + 1$ sans racine réelle donc R est inversible mais pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors que $R^3 = I_2$ est diagonalisable. Il suffit donc de considérer $A = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui a les mêmes propriétés.

6.101 **a.** Traitons trois cas selon la nature du projecteur p :

- Si $p = 0$ est le projecteur sur $\{0_E\}$ parallèlement à E, alors $\varphi = 0$ donc φ est un projecteur.
- Si $p = \mathrm{id}_E$ est le projecteur sur E parallèlement à $\{0_E\}$, alors $\varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}$ est aussi un projecteur.
- Si $p \notin \{0, \mathrm{id}_E\}$, notons $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ de sorte que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $r = \mathrm{rang}(p) \in [\![1; n-1]\!]$. Pour $g \in \mathcal{L}(E)$, si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$ (mêmes tailles de blocs que p) et on a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(g)) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -B_1 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix}$ par calcul. On recommence, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^2(g)) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^2(g) - \varphi(g)) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3B_1 \\ -C_1 & 0 \end{pmatrix}$. Il suffit donc de prendre $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $B_1 \neq 0$ ou $C_1 \neq 0$ pour que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^2(g) - \varphi(g)) \neq 0$ donc $\varphi^2(g) \neq \varphi(g)$ et φ n'est alors pas un projecteur.

En conclusion, φ est un projecteur si et seulement si $p = 0$ ou $p = \mathrm{id}_E$.

b. Ces quatre ensembles sont inclus dans $\mathcal{L}(E)$ et ils contiennent 0 puisque $\mathrm{Ker}(0) = E$ et $\mathrm{Im}(0) = \{0\}$.

- Si $(f, g) \in A^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\mathrm{Im}(\lambda f + g) \subset \mathrm{Im}(\lambda f) + \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(p)$.
  De même, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(\lambda f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(\lambda f + g)$.
  Ainsi, $\lambda f + g \in A$ et A est bien un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$.
- Si $(f, g) \in B^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\mathrm{Im}(\lambda f + g) \subset \mathrm{Im}(\lambda f) + \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(p)$.
  De même, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(\lambda f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(\lambda f + g)$.
  Ainsi, $\lambda f + g \in B$ et B est bien un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$.
- Si $(f, g) \in C^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\mathrm{Im}(\lambda f + g) \subset \mathrm{Im}(\lambda f) + \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(p)$.
  De même, $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(\lambda f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(\lambda f + g)$.
  Ainsi, $\lambda f + g \in C$ et C est bien un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$.
- Si $(f, g) \in D^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\mathrm{Im}(\lambda f + g) \subset \mathrm{Im}(\lambda f) + \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(p)$.
  De même, $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(\lambda f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(\lambda f + g)$.
  Ainsi, $\lambda f + g \in D$ et D est bien un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$.

c. Il existe comme à la question **a.** une base $\mathcal{B}$ (adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$) de E dans laquelle la matrice de p soit $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $g \in \mathcal{L}(E)$, on notera $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} D' & B' \\ C' & A' \end{pmatrix}$ (on a changé les noms des blocs pour correspondre, on le verra, au nom des quatre sous-espaces A, B, C, D).

- Pour $g \in \mathcal{L}(E)$, on a $g \in A \iff (\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(g)) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$. Soit M_A l'ensemble des matrices de la forme précédente, c'est-à-dire $M_A = \underset{r+1 \leqslant i,j \leqslant n}{\mathrm{Vect}}(E_{i,j})$, alors l'application $\varphi_A : A \to M_A$ définie par $\varphi(g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ est clairement linéaire, injective car seul l'endomorphisme nul a une matrice nulle dans la base $\mathcal{B}$ et surjective d'après l'équivalence précédente. Par conséquent, comme φ_A est un isomorphisme, il conserve les dimensions et $\dim(A) = \dim(M_A) = (n - r)^2$.

• $g \in B \iff \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}(g) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & B' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. De même, $\dim(B) = (n-r)r$.

• $g \in C \iff (\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}(g)) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C' & 0 \end{pmatrix}$. De même, $\dim(C) = r(n-r)$.

• $g \in D \iff (\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}(g)) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$. De même, $\dim(D) = r^2$.

On a clairement $M_A \oplus M_B \oplus M_C \oplus M_D = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car toute matrice $M = \begin{pmatrix} D' & B' \\ C' & A' \end{pmatrix}$ se décompose de manière unique sous la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C' & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Au niveau des endomorphismes, cela revient à A, B, C, D supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$: $A \oplus B \oplus C \oplus D = \mathcal{L}(E)$.

• Pour $g \in A$, $g \circ p = 0$ car $\mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et $p \circ g = 0$ car $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}(p)$ donc $\varphi(g) = 0$.

• Pour $g \in B$, $g \circ p = 0$ car $\mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et $p \circ g = g$ car $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ d'où $\varphi(g) = \frac{g}{2}$.

• Pour $g \in C$, $g \circ p = p$ car $\mathrm{Im}\,(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et $p \circ g = 0$ car $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}(p)$ et $\varphi(g) = \frac{g}{2}$.

• Pour $g \in D$, $p \circ g = g$ car $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(p)$ et $g \circ p = p$ car $\mathrm{Im}\,(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(g)$ donc $\varphi(g) = g$.

Ainsi $A \subset E_1(\varphi)$, $B \subset E_{1/2}(\varphi)$, $C \subset E_{1/2}(\varphi)$ et $D \subset E_1(\varphi)$. Comme $A \oplus B \oplus C \oplus D = \mathcal{L}(E)$, ces inclusions donnent $E_0(\varphi) = A$, $E_{1/2}(\varphi) = B \oplus C$ et $E_1(\varphi) = D$ et φ est donc diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(\varphi) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

On pouvait aussi calculer φ^3 et montrer que $X(X-1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$ est annulateur de φ, ce qui permet seulement d'affirmer que φ est diagonalisable mais pas d'avoir les ordres de multiplicité des valeurs propres et encore moins les sous-espaces propres.

6.102 **a.** Comme $AB = BA$, les sous-espaces propres de A sont stables par B. Les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de A étant distinctes deux à deux, les sous-espaces propres associés sont des droites $E_{\lambda_k}(A) = \mathrm{Vect}(V_k)$.

Mais $BV_k \in \mathrm{Vect}(V_k)$ car $E_{\lambda_k}(A)$ est stable par B donc il existe $\alpha_k \in \mathbb{C}$ tel que $BV_k = \alpha_k V_k$ pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$. Ainsi, $\mathcal{B}$ est à la fois une base de vecteurs propres pour A et pour B.

Par conséquent, si P est la matrice de passage entre la base canonique et $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_n)$, on a $B = PD'P^{-1}$ avec $D' = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et on avait déjà $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec ce qui précède.

b. f va bien de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{C}^n$ et sa linéarité se montre classiquement. De plus, si $P \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(P) = 0 \iff P(d_1) = \cdots = P(d_n) = 0$ donc P admet au moins n racines alors que $\deg(P) \leqslant n-1$. Ainsi, on conclut que $P = 0$. Comme $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, f est bien injective.

c. Comme f est injective, l'égalité des dimensions de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et de $\mathbb{C}^n$ prouve alors que f est un isomorphisme. Comme $(d'_1, \cdots, d'_n) \in \mathbb{C}^n$ il existe un unique antécédent de ce n-uplet par f, qu'on note L.

Ainsi, il existe $L \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ (qui est même unique) tel que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ L(d_k) = d'_k$.

d. Avec le polynôme $L = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$ de **c.**, par calcul sur les matrices diagonales, il vient $L(D) = \mathrm{diag}(L(d_1), \cdots, L(d_n)) = \mathrm{diag}(d'_1, \cdots, d'_n) = D'$ donc $L(A) = PL(D)P^{-1} = PD'P^{-1} = B$. On vient d'établir que $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\} \subset \mathrm{Vect}(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$. Or l'inclusion réciproque, à savoir $\mathrm{Vect}(I_n, A, \cdots, A^{n-1}) \subset \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$ est toujours vraie : tout polynôme en A commute avec A. Soit $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\alpha_0 I_n + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1} = 0$, alors $\alpha_0 I_n + \cdots + \alpha_{n-1}D^{n-1} = 0$ donc $Q(\lambda_1) = \cdots = Q(\lambda_n)$ en posant $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Q admet n racines distinctes donc $Q = 0$ et $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. La famille $(I_n, \cdots, A^{n-1})$ est donc libre et comme elle est déjà génératrice $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$, c'en est une base ! Ainsi $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$ est de dimension n.

e. Bien sûr que non, la matrice I_n admet une seule valeur propre (qui est 1) de multiplicité n et elle commute avec toutes les autres, donc $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid I_nB = BI_n\} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension n^2. Et surtout les matrices commutant avec I_n ne sont pas toutes (loin s'en faut) des polynômes en I_n (seules les matrices λI_n le sont).

6.103 **a.** Pour $k=0$, on a $A^0+A^0=2I_n$. Pour $k=1$, on a $A^1+A^{-1}=I_n$ par hypothèse.

- On développe $A^2+A^{-2}=(A^1+A^{-1})^2-2I_n$ (car A et A^{-1} commutent) donc $A^2+A^{-2}=-I_n$.
- On continue $A^3+A^{-3}=(A+A^{-1})^3-3(A+A^{-1})=-2I_n$.
- À nouveau $A^4+A^{-4}=(A+A^{-1})^4-4(A^2+A^{-2})-6I_n=-I_n$.
- Encore, $A^5+A^{-5}=(A+A^{-1})^5-5(A^3+A^{-3})-10(A+A^{-1})=I_n$.
- Poursuivons, $A^6+A^{-6}=(A+A^{-1})^6-6(A^4+A^{-4})-15(A^2+A^{-2})-20I_n=2I_n$.
- Enfin, $A^7+A^{-7}=(A+A^{-1})^7-7(A^5+A^{-5})-21(A^3+A^{-3})-35(A+A^{-1})=I_n$.

Il semble qu'on ait une certaine périodicité.

Méthode 1 : pour l'établir, il suffit de remarquer que $A^2+I_n=A$ donc $X^2-X+1=(X+j)(X+j^2)$ est annulateur de A. Comme ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, A est diagonalisable et semblable à $D=\mathrm{diag}(-j,\cdots,-j,-j^2,\cdots,-j^2)$. Comme A est réelle et $-j^2=\overline{-j}$, on sait que les ordres de multiplicité de $-j$ et $-j^2$ sont égaux donc on a déjà n pair. Comme $-j$ et $-j^2$ sont des racines sixièmes de l'unité, la suite $(D^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est 6-périodique, la suite $(A^k+A^{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ l'est donc aussi.

Méthode 2 : puisque $A^{k+2}+A^{-k-2}=(A^{k+1}+A^{-k-1})(A+A^{-1})-(A^k+A^{-k})$, on effectue une récurrence sur deux rangs et on arrive à la même conclusion parce que la formule donne le rang $k+2$ en fonction des rangs $k+1$ et k et que les couples (A^0+A^{-0},A^1+A^{-1}) et (A^6+A^{-6},A^7+A^{-7}) sont les mêmes.

A^k+A^{-k} vaut $2I_n$ si $k\equiv 0[6]$, I_n si $k\equiv 1[6]$, $-I_n$ si $k\equiv 2[6]$, $-2I_n$ si $k\equiv 3[6]$, $-I_n$ si $k\equiv 4[6]$, I_n si $k\equiv 5[6]$.

b. $A+A^{-1}=I_n$ donc $A^2+I_n=A$. Mais $A^2+A^{-2}=-I_n$ donc $A^2+I_n=A=-A^{-2}$ donc $A^3=-I_n$. Au passage, on retrouve que $A^6=I_n$ donc que la suite $(A^k+A^{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ est 6-périodique. Comme $A^3=-I_n$, on a $\det(A^3)=(\det A)^3=(-1)^n=((-1)^n)^3$. Comme $t\mapsto t^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a $\det(A)=(-1)^n$. Par ailleurs, $A=A^2+I_n=(A+iI_n)(A-iI_n)=B\overline{B}$ en notant $B=A+iI_n$ donc, en passant au déterminant : $\det(A)=\det(B)\det(\overline{B})=|\det(B)|^2>0$. Ainsi n est pair.

On avait déjà vu que n était pair, et on a d'autres arguments pour l'établir :

- si n était impair, on aurait χ_A de degré impair donc il existerait au moins une valeur propre réelle de A (par le TVI) ce qui contredit le polynôme annulateur X^2-X+1 sans racine réelle.
- $A+A^{-1}=I_n \Longrightarrow A^2-A+I_n=\Big(A-\dfrac{I_n}{2}\Big)^2+\dfrac{3I_n}{4}=0 \Longrightarrow \det\Big(A-\dfrac{I_n}{2}\Big)^2=\Big(-\dfrac{3}{4}\Big)^n\geqslant 0\Longrightarrow n$ est pair.

6.104 **a.** On trouve par un simple calcul (développement par rapport à une rangée ou formule de SARRUS) que $\chi_A=X^3-X-1$. Comme $\chi_A'(x)=3x^2-1$ s'annule en $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, la fonction polynomiale χ_A est croissante sur $\Big]-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big]$ et $\Big[\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\Big[$ et décroissante sur $\Big[-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big]$. Comme $\chi_A\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)=-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-1<0$, χ_A ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $\Big[\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\Big[$ et plus précisément en $\alpha\in]1;2[$ car $\chi_A(1)=-1<0$ et $\chi_A(2)=5>0$. Comme $\chi_A\in\mathbb{R}[X]$, χ_A admet deux autres racines complexes conjuguées notées β et $\overline{\beta}$ telles que $\alpha\beta\overline{\beta}=\alpha|\beta|^2=1$ (relation coefficients/racines) donc $|\beta|=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}<1$. Ainsi $\lambda=\alpha$.

b. Comme A est une matrice à coefficients entiers, ses puissances le sont aussi (récurrence simple) donc $\mathrm{Tr}\,(A^n)\in\mathbb{N}$ et $u_n=0$ pour $n\geqslant 1$. Ainsi la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge.

Comme A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, les deux matrices A et $D=\mathrm{diag}(\lambda,\beta,\overline{\beta})$ sont semblables d'où l'existence de $P\in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $A=PDP^{-1}$. Ensuite, classiquement, par récurrence, on obtient $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=PD^nP^{-1}$. Comme $D^n=\mathrm{diag}(\alpha^n,\beta^n,\overline{\beta}^n)$, on obtient par similitude $\mathrm{Tr}\,(A^n)=\lambda^n+\beta^n+\overline{\beta}^n$. Ainsi $v_n=\sin\big(2\pi(\mathrm{Tr}\,(A^n)-\beta^n-\overline{\beta}^n)\big)=-\sin\big(2\pi(\beta^n+\overline{\beta}^n)\big)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(\beta^n+\overline{\beta}^n)=0$ donc $v_n\underset{+\infty}{\sim}-2\pi(\beta^n+\overline{\beta}^n)\underset{+\infty}{=}O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ car $|\beta|<1$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}v_n$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN.

6.105 **a.** Soit $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Si P est annulateur A, comme $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a $a_0I_3 + a_1A + a_2A^2 = \begin{pmatrix} a_0+a_1 & a_1+a_2 & 0 \\ -a_1-a_2 & a_0-a_2 & 0 \\ 2a_1 & 2a_2 & a_0-a_1+a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $a_1 = 0$ (case $(3,1)$) et $a_2 = 0$ (case $(3,2)$) puis $a_0 = 0$ (case $(1,1)$).

Ainsi, le seul polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$ est $P = 0$.

b. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1) = \lambda^3+1 = (\lambda+1)(\lambda+j)(\lambda+j^2)$ après développement par rapport à la colonne 3 et $\chi_A = X^3+1$. D'après Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = A^3+I_3 = 0$.
On écrit alors $(-A^2)A = A(-A^2) = I_3$ donc la matrice A est inversible et $A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

c. Méthode 1 : si P est un multiple de χ_A, $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $P = \chi_A Q$, alors $P(A) = \chi_A(A)Q(A) = 0.Q(A) = 0$. Réciproquement, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$. Écrivons $P = Q\chi_A.Q + R$ la division euclidienne de P par χ_A avec $\deg(R) \leqslant 2$. Ainsi, $P(A) = \chi_A(A)Q(A) + R(A)$ donc $R(A) = 0$. D'après la question **a.**, on a donc $R = 0$ donc $P = \chi_A\, Q$ est un multiple de χ_A.

Méthode 2 : on sait que tous les polynômes annulateurs de A ont en particulier pour racines les valeurs propres de A. Si P annule A, alors $P(-1) = P(-j) = P(-j^2) = 0$ donc $P = (X+1)(X+j)(X+j^2)Q = (X^3+1)Q = \chi_A Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$. Réciproquement, si $P = \chi_A Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(A) = \chi_A(A)Q(A) = 0.Q(A) = 0$.

Conclusion : les polynômes annulateurs de A sont donc tous les polynômes multiples de χ_A, c'est-à-dire ceux de la forme $P = (X^3+1)Q = \chi_A Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

χ_A est donc le polynôme minimal de A (HP) ce qui est équivalent au fait que A est cyclique (HP) : il existe un vecteur non nul X de $\mathbb{R}^3$ tel que (X, AX, A^2X) soit une base de $\mathbb{R}^3$ et il suffit de prendre $X = (0,1,0)$ pour s'en convaincre car $AX = (1,0,0)$ et $A^2X = (1,-1,2)$.

6.106 **a.** La linéarité de f est classique et provient de celle de la fonction Tr . Ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f^2(M) = f(2\text{Tr}\,(M)A) = 2\text{Tr}\,(M)f(A) = 4\text{Tr}\,(A)\text{Tr}\,(M)A = 2\text{Tr}\,(A)f(M)$. Ainsi, $f^2 = 2\text{Tr}\,(A)f$ ce qui se traduit par le fait que $P = X^2 - 2\text{Tr}\,(A)X = X(X - 2\text{Tr}\,(A)$ est annulateur de f.

• Si $\text{Tr}\,(A) \neq 0$, f est diagonalisable car P est scindé à racines simples. De plus, même si ce n'est pas demandé, $E_0(f) = \text{Ker}(\text{Tr}\,)$ est un hyperplan (car Tr est une forme linéaire non nulle) et $E_{2\text{Tr}\,(A)}(f) = \text{Vect}(A)$ car $f(A) = 2\text{Tr}\,(A)A$, que $A \neq 0$ et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = E_0(f) \oplus E_{2\text{Tr}\,(A)}(f)$.

• Si $\text{Tr}\,(A) = 0$, on a $f^2 = 0$ et $f \neq 0$ car $A \neq 0$ ($f(I_n) \neq 0$ par exemple). On sait qu'alors $\chi_f = X^{n^2}$ donc 0 est la seule valeur propre de f. Si f était diagonalisable, elle aurait pour matrice dans une certaine base de vecteurs propres une matrice avec des 0 sur la diagonale (les valeurs propres). Ainsi on aurait $f = 0$, ce qui est faux ! Par conséquent, f n'est pas diagonalisable.

6.107 **a.** Si A est diagonalisable, il existe D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Alors, classiquement, $A^2 = PD^2P^{-1}$ avec D^2 diagonale ce qui prouve que la matrice A^2 est diagonalisable.

b. • Si $n = 1$, toute matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ étant diagonale, on a bien A^2 diagonalisable $\Longrightarrow$ A diagonalisable.

• Si $n \geqslant 2$ et $A = E_{1,2}$, alors $A^2 = 0$ et A^2 est donc diagonalisable alors que $\chi_A = X^n$ puisque A est nilpotente. Si A était diagonalisable, comme 0 est d'ordre algébrique n, on aurait aussi $\dim(E_0(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n$ et on aurait $A = 0$ ce qui est faux. Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

c. Si A^2 est diagonalisable et A inversible, alors $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A^2 (non nulles car A^2 est aussi inversible). On sait que $P = \prod\limits_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)$ est annulateur de A^2 d'où $P(A^2) = \prod\limits_{k=1}^{r}(A^2 - \lambda_k I_n) = 0$. Notons, pour $k \in [\![1;r]\!]$, δ_k une racine carrée (complexe) de λ_k, alors $\prod\limits_{k=1}^{r}(A^2 - \lambda_k I_n) = \prod\limits_{k=1}^{r}(A - \delta_k I_n)(A + \delta_k I_n) = 0$ donc le polynôme $Q = \prod\limits_{k=1}^{r}(X - \delta_k)(X + \delta_k)$ est annulateur de A. De plus, $\forall k \in [\![1;r]\!]$, $\delta_k \neq -\delta_k$ car $\lambda_k = \delta_k^2 \neq 0$ et $\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\pm\delta_i \neq \pm\delta_j$ car $\lambda_i = \delta_i^2 \neq \delta_j^2 = \lambda_j$. Ainsi, Q annule A et est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

$\boxed{\textbf{6.108}}$ Le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + 3X$ est annulateur de A. Si A est inversible, on multiplie par A^{-1} et on a même $Q = X^2 - 2X + 3$ annulateur de A. Si λ est une valeur propre (éventuellement complexe) de A, alors λ est une racine de Q. Ainsi, comme Q n'admet pas de racine réelle, on n'aurait pas de valeur propre réelle pour A, ce qui est impossible car χ_A est une polynôme réel de degré 3 donc il admet au moins une racine réelle par le TVI. Conclusion, si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $A^3 = 2A^2 - 3A$, elle n'est pas inversible.

$\boxed{\textbf{6.109}}$ On calcule $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -a & -a \\ 1 & X-1 & 1 \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 1 & X-1 & 2-X \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 1 & X-1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ en utilisant la linéarité par rapport à la troisième colonne. Ainsi, $\chi_A = (X-2) \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ donc, en développant par rapport à la troisième colonne, on obtient $\chi_A = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & -a \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X-2)$. Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et que $1 \leqslant \dim(E_2(A)) \leqslant 1 = m_2(A)$ implique $\dim(E_2(A)) = 1 = m_2(A)$, on sait d'après un théorème du cours que A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(A)) = 2 = m_1(A)$. Comme $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_3)$, ceci est équivalent à rang $(A - I_3) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = 1$ par la formule du rang. Or $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 si et seulement si $a = 0$ (regarder les lignes de A).

Ainsi A est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

Même si ce n'est pas demandé, si $a = 0$, $E_2(A) = \mathrm{Vect}((0,-1,1))$ et $E_1(A) = \mathrm{Vect}((0,1,0),(1,0,-1))$ (en résolvant par exemple $AX = X$ et $AX = 2X$) donc $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même, si $a \neq 0$, χ_A étant scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable et on peut montrer, théorie de la réduction de JORDAN (Camille JORDAN : français !) hors programme, que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Après calculs, on trouve $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a+1 & 1 \\ -a & -a & -1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{6.110}$ **a.** La matrice A est diagonalisable car elle est symétrique réelle d'après le théorème spectral.

b. Si $P(A) = 0$ et si λ est une valeur propre de A, il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Si on pose $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a d'abord $A^k X = \lambda^k X$ par récurrence ce qui donne $0 = 0X = P(A)X = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k X = \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k\Big) X = P(\lambda)X$ et comme $X \neq 0$, on a $P(\lambda) = 0$ donc λ est une racine de P.

c. Après un simple calcul, on trouve que $(A + I_n)^2 = n(A + I_n)$ donc $A^2 - (n-2)A + (n-1)I_n = 0$ d'où $P = X^2 - (n-2)X - (n-1) = (X+1)(X-(n-1))$ est annulateur de A. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, n-1\}$.

d. En résolvant $AX = -X$, on trouve que $E_{-1}(A)$ est l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Ceci impose que $\dim(E_{n-1}(A)) \leqslant 1$, or le vecteur $v = (1, \cdots, 1)$ vérifie $Av = (n-1)v$ donc $E_{n-1}(A)$ est la droite engendrée par le vecteur $(1, \cdots, 1)$ qui est normal à l'hyperplan $E_{-1}(A)$. On a au final $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, n-1\}$.

$\boxed{6.111}$ **a.** f va de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans E et elle est linéaire par linéarité de la trace : f est un endomorphisme de E.

Si $f(M) = 0$, alors $M = -\mathrm{Tr}\,(M)I_n$ or $f(I_n) = (n+1)I_n$ donc $f(M) = -(n+1)\mathrm{Tr}\,(M)I_n = 0$ implique $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$ d'où $M = 0$. Par conséquent $\mathrm{Ker}(M) = \{0\}$ ce qui fait de f un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ainsi $\mathrm{Im}\,(f) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ et $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = n^2$.

b. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f^2(M) = f(M + \mathrm{Tr}\,(M)I_n) = f(M) + \mathrm{Tr}\,(M)f(I_n) = f(M) + (n+1)\mathrm{Tr}\,(M)I_n$ ainsi $f^2(M) = (n+2)f(M) - (n+1)M$ donc $P = X^2 - (n+2)X + (n+1)$ est annulateur de f.

c. Comme $P = (X-1)(X-(n+1))$ est scindé à racines simples, f est diagonalisable et les sous-espaces propres sont $E_1(f) = \{M \mid \mathrm{Tr}\,(M) = 0\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\,)$ qui est un hyperplan (car Tr est une forme linéaire non nulle) et $E_{n+1}(f) = \mathrm{Vect}(I_n)$ qui est une droite. Ainsi $\mathrm{Tr}\,(f) = n^2 - 1 + n + 1 = n(n+1)$ alors que $\det(f) = n + 1$.

$P(0) \neq 0$ donc f est bijective (on le savait déjà) et $f \circ \big(f - (n+2)\mathrm{id}_E\big) = \big(f - (n+2)\mathrm{id}_E\big) \circ f = -(n+1)\mathrm{id}_E$ donc l'inverse de f est donné par $f^{-1} = -\dfrac{1}{n+1}\big(f - (n+2)\mathrm{id}_E\big)$.

Ainsi, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f^{-1}(M) = \dfrac{1}{n+1}\big((n+2)M - f(M)\big) = \dfrac{1}{n+1}\big((n+2)M - M - \mathrm{Tr}\,(M)I_n\big) = M - \dfrac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n+1} I_n$.

$\boxed{6.112}$ On considère A comme une matrice complexe, alors A est trigonalisable car d'après D'ALEMBERT-GAUSS, χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$: $A = UTU^{-1}$ avec U inversible et T triangulaire supérieure. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les termes diagonaux de T de sorte que $\chi_T = \chi_A = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$. On obtient $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PT^kP^{-1}$ par une récurrence classique donc, par combinaison linéaire, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A) = UP(T)U^{-1}$. Comme $P(T)$ est aussi triangulaire avec $P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n)$ sur la diagonale, le spectre de $P(T)$, qui est aussi celui de $P(A)$ car ces deux matrices sont semblables, vaut $\mathrm{Sp}(P(A)) = \{P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n)\}$. Mais on sait par hypothèse que $P(A)$ est triangulaire avec des coefficients diagonaux distincts deux à deux, disons $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Le spectre de $P(A)$ contient donc n valeurs propres distinctes, ce qui signifie que $P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n)$ sont distincts deux à deux. Ceci impose donc que les $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont eux-mêmes distincts deux à deux.

Par conséquent, A admet n valeurs propres distinctes deux à deux et est donc diagonalisable.

$\boxed{6.113}$ **a.** On calcule et $\chi_A = X(X-1)^2$ qui est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, A est au moins trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et elle est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(A)) = 2 \iff \mathrm{rang}\,(A - I_3) = 1$ par le théorème du rang. Or $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Il est visible que $E_0(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, -2, 0)$ et que $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = e_2 = (0, 1, 0)$.

Méthode 1 : on sait avec la réduction de Jordan que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc il ne reste plus qu'à trouver un vecteur v_3 tel que $Av_3 = v_2 + v_3$ et on trouve sans peine en résolvant le système que $v_3 = \frac{1}{2}(1,0,1)$ convient. Ainsi $A = PTP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Méthode 2 : n'importe quel vecteur convient pour compléter (v_1, v_2), par exemple $v_3' = (0,0,1) \notin \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et on a une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3')$ de $\mathbb{R}^3$. On calcule $Av_3' = (1,0,1) = (0,0,1) + (1,-2,0) + 2(0,1,0)$ donc $Av_3' = v_1 + 2v_2 + v_3'$ et $A = PT'P^{-1}$ où $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Si M vérifie $M^2 = A$ et si $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, alors il existe $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$ donc $M^2X = AX = \lambda^2 X$ donc $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}(A) = \{0,1\}$ ainsi $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm 1$ et on a $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1,0,1\}$. On vient de prouver au passage que $E_\lambda(M) \subset E_{\lambda^2}(A)$ donc, comme $E_0(A)$ et $E_1(A)$ sont des droites, les sous-espaces $E_0(M)$, $E_1(M)$, $E_{-1}(M)$ sont égaux à $\{0\}$ ou forment une droite. De plus, comme $E_1(M)$ et $E_{-1}(M)$ sont en somme directe, on a aussi $E_1(M) \oplus E_{-1}(M) \subset E_1(A)$ ce qui montre que 1 et -1 ne peuvent pas être valeurs propres de M simultanément (un plan ne peut pas être inclus dans une droite).

d. Si $M^2 = A$, alors $\det(M^2) = \det(M)^2 = \det(A) = 0$ donc $\det(M) = 0$ et 0 est valeur propre de M. Si 0 était la seule valeur propre de M, alors on aurait $\chi_M = X^3$ et $M^3 = 0$ avec Cayley-Hamilton ce qui est impossible car $M^4 = M^3M = A^2 \neq 0$. Ainsi, avec la question précédente, on ne peut avoir que $\mathrm{Sp}(M) = \{0,1\}$ ou $\mathrm{Sp}(M) = \{0,-1\}$.

e. Si $M^2 = A$, alors $E_0(M) = \mathrm{Ker}(M)$ est une droite d'après **c.** et **d.**. En notant $N = P^{-1}MP$, on a $M^2 = A \iff PN^2P^{-1} = PTP^{-1} \iff N^2 = T$. Ainsi, si $M^2 = A$, on a $NT = N^3 = TN$ (même chose avec T').

Méthode 1 : en posant le calcul, on trouve que $NT = TN \iff N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. Ainsi, pour avoir $N^2 = T$, il faut maintenant $N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 2bc \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = T$ d'où $a = 0$ et $\big((b = 1 \text{ et } c = \frac{1}{2}) \text{ ou } (b = -1 \text{ et } c = -\frac{1}{2})\big)$.

Réciproquement, $M_1 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ et $M_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = -M_1$ vérifient la relation $M^2 = A$ et sont donc les deux seules solutions. Comme $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 2 : en posant le calcul, on trouve que $NT = TN \iff N = \begin{pmatrix} a & 0 & b-a \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. Ainsi, pour avoir $N^2 = T$, il faut $N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & b^2 - a^2 \\ 0 & b^2 & 2bc \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = T$ d'où $a = 0$ et $\big((b = 1 \text{ et } c = 1) \text{ ou } (b = -1 \text{ et } c = -1)\big)$.

Réciproquement, $M_1 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ et $M_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = -M_1$ vérifient bien $M^2 = A$ et sont donc les deux seules solutions. Comme $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 3 : on traite les deux cas vus à la question **d.**:

$\mathrm{Sp}(M) = \{0, 1\}$ Alors $E_0(M) = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $E_1(M) = \mathrm{Vect}(v_2)$ donc, par formule de changement de base, $M = PNP^{-1}$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (par exemple) car les traces de deux matrices semblables sont égales. Comme $M^2 = A$, $N^2 = T$ donc $a = 0$ et $2b = 1$.

$\mathrm{Sp}(M) = \{0, -1\}$ Alors $E_0(M) = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $E_{-1}(M) = \mathrm{Vect}(v_2)$ donc, par formule de changement de base, $M = PNP^{-1}$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ car les traces de deux matrices semblables sont égales. Comme $M^2 = A$, $N^2 = T$ donc $a = 0$ et $2b = -1$.

On retrouve donc, avec les calculs précédents de P^{-1}, les matrices M_1 et $-M_1$ comme uniques solutions.

6.114 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}$ euclidien canoniquement associé à $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

a. Par un calcul direct : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = \frac{1}{125}\big((5\lambda + 5)(25\lambda^2 - 49 + 24)\big) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$. Comme $A + I_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, on a $\dim(E_{-1}(A)) = 2$ donc A est diagonalisable. Ainsi, $(X-1)(X+1)$ annule A qui est donc une symétrie. f est donc aussi une symétrie. Comme A n'est pas symétrique et que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée, f n'est pas une symétrie orthogonale.

Or $A - I_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$ donc $E_1(A)$ est la droite engendrée par $v_1 = (2, -1, 0)$. De plus, on a $A + I_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $E_{-1}(A)$ est le plan engendré par (v_2, v_3) avec $v_2 = (1, -3, 0)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$.

b. Le point $A = (2, -2, -1)$ appartient à P. Comme le plan vectoriel d'équation $x - y - z = 0$ est engendré par $v_4 = (1, 1, 0)$ et $v_5 = (1, 0, 1)$, les points du plan P s'écrivent $M = A + \alpha_4 v_4 + \alpha_5 v_5$. Leurs images par f sont donc les points $f(M) = f(A) + \alpha_4 f(v_4) + \alpha_5 f(v_5)$ donc l'image du plan $x - y - z = 0$ est celui qui passe par le point $f(A) = \left(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$ et qui a pour direction le sous-espace $\mathrm{Vect}(f(v_4), f(v_5)) = \mathrm{Vect}((11, -13, 0), (7, -6, -5))$. Par conséquent, un point $M = (x, y, z)$ appartient à ce plan image si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{f(A)M}, f(v_4), f(v_5)$ forment une famille liée donc si et seulement si $\begin{vmatrix} x - 6/5 & 11 & 7 \\ y - 2/5 & -13 & -6 \\ z - 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$. Après calculs, on trouve qu'une équation du plan image est $13x + 11y + 3z = 23$.

6.115 Le polynôme $P = 3X^3 - X^2 - X - 1$ est annulateur de A et $P = 3(X - 1)(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3})$. Les racines de $X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}$ sont les complexes $-\frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{2}i}{3}$ (notées λ et $\overline{\lambda}$) de module strictement inférieur à 1. Soit un entier naturel k, alors la division euclidienne de X^k par P s'écrit $X^k = QP + R_k$ où $R_k \in \mathbb{R}_2[X]$ et vérifie $R_k(1) = 1$, $R_k(\lambda) = \lambda^k$ et $R_k(\overline{\lambda}) = \overline{\lambda}^k$. On en déduit par les polynômes d'interpolation de Lagrange que $R_k = \frac{(X - \lambda)(X - \overline{\lambda})}{(1 - \lambda)(1 - \overline{\lambda})} + \lambda^k \frac{(X - 1)(X - \overline{\lambda})}{(\lambda - 1)(\lambda - \overline{\lambda})} + \overline{\lambda}^k \frac{(X - 1)(X - \lambda)}{(\overline{\lambda} - 1)(\overline{\lambda} - \lambda)}$. Par conséquent, $A^k = R_k(A)$ car $P(A) = 0$ ce qui donne $A^k = \frac{1}{2}\left(A^2 + \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}I_3\right) + \lambda^k U + \overline{\lambda}^k V$. Comme $|\lambda| < 1$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = \frac{1}{2}\left(A^2 + \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}I_3\right) = B$ qui est bien une matrice de projecteur pour deux raisons différentes :

• $B^2 = \frac{1}{4}\left(A^2 + \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}I_3\right)^2 = \frac{1}{4}\Big(A^4 + \frac{4}{3}A^3 + \frac{10}{9}A^2 + \frac{4}{9}A + \frac{1}{9}I_3\Big)$. Or $A^3 = \frac{1}{3}\Big(A^2 + A + I_3\Big)$ donc $A^4 = \frac{1}{3}\Big(A^3+A^2+A\Big) = \frac{1}{9}\Big(4A^2+4A+I_3\Big)$ donc $B^2 = \frac{1}{36}\Big(4A^2+4A+I_3+4A^2+4A+4I_3+10A^2+4A+I_3\Big) = B$.

• $A^{2k} = A^k A^k$ donc, en passant à la limite : $B = B^2$. De la même manière, $B = AB$ car $A^{k+1} = AA^k$.

6.116 **a.** Il vient $X_1 = AX_0 + BU_0$, puis $X_2 = AX_1 + BU_1 = A^2X_0 + ABU_0 + BU_1$. Soit $k \in [\![1; N-1]\!]$, si on suppose que $X_k = A^kX_0 + \sum\limits_{i=0}^{k-1} A^iBU_{k-i-1}$, alors $X_{k+1} = AX_k + BU_k = A^{k+1}X_0 + \Big(\sum\limits_{i=0}^{k-1} A^{i+1}BU_{k-i-1}\Big) + BU_k$ donc on a $X_{k+1} = A^{k+1}X_0 + \sum\limits_{i=0}^{k} A^iBU_{k-i}$. Par principe de récurrence, $\forall k \in [\![0; N]\!],\ X_k = A^kX_0 + \sum\limits_{i=0}^{k-1} A^iBU_{k-i-1}$.

b. Si rang $(C) < n$, comme ${}^tC$ et C ont même rang, on a rang $({}^tC) < n$. Or ${}^tC \in \mathcal{M}_{n^2,n}(\mathbb{R})$ donc ${}^tC$ est canoniquement associée à une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$, et rang $({}^tC) < n = \dim(\mathbb{R}^n)$ montre que ${}^tC$ "n'est pas injective". Il existe donc un vecteur colonne non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tCX = 0$. On transpose et on a bien ${}^tXC = 0$ ce qui se traduit par $\forall j \in [\![0; n-1]\!],\ {}^tXA^jB = 0$ pour cette colonne $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Or le polynôme caractéristique est annulateur de A donc $\chi_A(A) = 0 = A^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_kA^k$. Si on suppose, pour un entier $k \geqslant n-1$, que $\forall j \in [\![0; k]\!],\ {}^tXA^jB = 0$, alors ${}^tXA^{k+1}B = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_k{}^tXA^{k+1+i-n}B = 0$. Par principe de récurrence, on a donc $\forall j \in \mathbb{N},\ {}^tXA^jB = 0$.

c. Pour $X \neq 0$ de la question précédente, ${}^tX$ est la matrice dans la base canonique d'une forme linéaire non nulle $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Alors $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $(U_0, \cdots, U_N) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{N+1}$, on aura $\forall k \in \varphi(X^k - A^kX_0) = {}^tX(X^k - A^kX_0) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} {}^tXA^{k-i-1}BU_i = 0$ donc $X^k - A^kX_0 \in H$. Par conséquent, si on prend $(\widetilde{X_0}, \cdots, \widetilde{X_N}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{N+1}$ tel que $\widetilde{X_k} - A^k\widetilde{X_0} \notin H$ pour au moins un entier $k \in [\![0; N]\!]$ (et il existe de tels choix), on ne pourra pas avoir de choix de $(U_0, \cdots, U_N) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{N+1}$ pour lesquels la suite définie par $X_0 = \widetilde{X_0}$ et $\forall k \in [\![1; n-1]\!],\ X_{k+1} = AX_k + BU_k$ vérifie $\forall k \in [\![0; n]\!],\ X_k = \widetilde{X_k}$.
Le système n'est donc pas contrôlable pour cet entier N.

d. Si le système n'est pas contrôlable pour l'entier N, c'est qu'il existe $(\widetilde{X_0}, \cdots, \widetilde{X_N}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{N+1}$ tel que pour tout choix de $(U_0, \cdots, U_N) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{N+1}$, si on définit $X_0 = \widetilde{X_0}$ et $\forall k \in [\![1; N-1]\!],\ X_{k+1} = AX_k + BU_k$, alors $\exists k \in [\![0; N]\!],\ X_k \neq \widetilde{X_k}$. Ceci signifie, d'après la question **a.**, $\exists k \in [\![0; N]\!],\ A^kX_0 + \sum\limits_{i=0}^{k-1} A^iBU_{k-i-1} \neq \widetilde{X_k}$ ou encore $\exists k \in [\![0; N]\!],\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} A^iBU_{k-i-1} \neq \widetilde{X_k} - A^k\widetilde{X_0}$ ou enfin $F(U_0, \cdots, U_{N-1}) \neq (0, \widetilde{X_1} - A\widetilde{X_0}, \cdots, \widetilde{X_N} - A^N\widetilde{X_0})$.
L'application F n'est donc pas surjective. Comme l'espace d'arrivée de F est $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que rang $(F) < n$ donc il existe un hyperplan H de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Im}\,(F) \subset H$. Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $\varphi \circ F = 0$ car $\mathrm{Im}\,(F) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Si on note ${}^tX$ (matrice ligne) la matrice canoniquement associée à φ, l'information $\forall (U_0, \cdots, U_{N-1}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^N,\ (\varphi \circ F)(U_0, \cdots, U_{N-1}) = 0$ se traduit par $\forall (U_0, \cdots, U_{N-1}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^N,\ {}^tX\Big(\sum\limits_{k=0}^{N-1} A^kBU_{N-k-1}\Big) = 0$.

6.117 **a.** La matrice nulle $N = 0$ est dans E_X car $NX = 0 = 0.X$. Ainsi $E_X \neq \emptyset$. Si $(A, B) \in E_X^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe par définition des réels a et b tels que $AX = aX$ et $BX = bX$, ainsi $(A + \lambda B)X = AX + \lambda BX = aX + \lambda bX = (a + \lambda b)X$ donc X est aussi valeur propre de $A + \lambda B$ d'où $A + \lambda B \in E_X$. Par conséquent, E_X est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc est lui-même un espace vectoriel.

b. Méthode 1 : traduisons l'appartenance à E_X, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans E_X si et seulement si MX est colinéaire à X, c'est-à-dire que $MX \in \mathrm{Vect}(X)$, ce qui se traduit par le fait que le projeté de MX sur l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(X)^\perp$ est le vecteur nul. En notant p_H cette projection, on sait que son expression vectorielle est $p_H : Y \mapsto Y - \dfrac{(Y|X)}{||X||^2}X$. Ainsi, $M \in E_X \iff MX = \dfrac{(MX|X)}{||X||^2}X$. Définissons donc $\theta : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ par $\theta(M) = MX - \dfrac{(MX|X)}{||X||^2}X$. θ est clairement linéaire et $E_X = \mathrm{Ker}(\theta)$. Par la formule du rang, on a $\dim(E_X) = n^2 - \mathrm{rang}\,(\theta)$. Or, comme $\theta(M) = p_H(MX)$ par construction, on a $\mathrm{Im}\,(\theta) \subset H$. Soit Z un vecteur non nul de H, il existe un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ qui envoie X sur Z (car en construisant une base $\mathcal{B} = (X, X_2, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ qui envoie $\mathcal{B}$ sur $(Z, \cdots, Z)$ par exemple), ainsi en notant M la matrice de u, on a $MX = Z$ donc $\theta(M) = Z \in \mathrm{Im}\,(\theta)$. Par double inclusion, on a montré que $\mathrm{Im}\,(\theta)$ est l'hyperplan H donc $\mathrm{rang}\,(\theta) = n-1$ et $\dim(E_X) = n^2 - (n-1) = n^2 - n + 1$.

Méthode 2 : comme (X) est libre, en posant $X_1 = X$, on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = (X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$, alors en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à M, et en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, on a $M = PAP^{-1}$ par formule de changement de base. Or, $M \in E_X$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ MX_1 = \lambda X_1$, c'est-à-dire si et seulement si la première colonne de la matrice A contient des 0 à partir de la deuxième ligne car l'image de X_1 par u est proportionnelle à X_1. En notant F le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant les matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telle que $\forall i \in [\![2; n]\!],\ a_{i,1} = 0$, on vient de montrer que $\varphi : F \mapsto E_X$ définie par $\varphi(A) = PAP^{-1}$ est un isomorphisme (sa linéarité est claire). Comme il est clair que $\dim(F) = n^2 - (n-1)$. On a, par l'isomorphisme φ : $\dim(E_X) = n^2 - n + 1$.

Question de cours : si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on a l'équivalence $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \exists x \in E \setminus \{0_E\},\ u(x) = \lambda x \iff \exists x \in E \setminus \{0_E\},\ (\lambda \mathrm{id}_E - u)(x) = 0_E$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\} \iff \lambda \mathrm{id}_E - u \notin GL(E) \iff \det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0 \iff \chi_u(\lambda) = 0$.

6.118 **a.** Il suffit de prendre la matrice une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de l'espace qui ne soit pas l'identité, par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ vérifient bien $A \neq I_3$ et $A^3 = I_3$.

b. Comme $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$, on a $A^3 - I_n = (A - I_n)(A^2 + A + I_n) = 0$. Mais comme 1 n'est pas valeur propre de A, la matrice $A - I_n$ est inversible donc $A^2 + A + I_n = 0$.

Méthode 1 : comme on sait que les valeurs propres sont des racines de $X^2 + X + 1$ puisque ce polynôme annule A, les seules valeurs propres complexes possibles de A sont j et $j^2 = \bar{j}$. Comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$ car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos et que A est une matrice réelle, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{j, j^2\}$ et $E_j(A)$ et $E_{j^2}(A)$ ont même dimension. Comme A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car elle admet un polynôme annulateur $X^3 - 1$ scindé à racines simples, on sait que $\mathbb{C}^n = E_j(A) \oplus E_{j^2}(A)$. Ainsi, $n = \dim(E_j(A)) + \dim(E_{j^2}(A)) = 2\dim(E_j(A))$ est pair.

Méthode 2 : $A^2 + A + I_n = 0$ équivaut à $\left(A + \frac{I_3}{2}\right)^2 = -\frac{3I_3}{4}$. Si on prend les déterminant, on obtient $\left(\det\left(A + \frac{I_3}{2}\right)\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^n \geqslant 0$ donc n est pair.

Comme $A^2+A+I_n=0$, on a $(A-I_n)(A+2I_n)=-3I_n$ donc $(A-I_n)^{-1}=-\frac{1}{3}(A+2I_n)$. Si $(B,X)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, $AX=X-B\iff(A-I_n)X=-B\iff X=-(A-I_n)^{-1}B=\frac{1}{3}(A+2I_n)B=\dfrac{AB+2B}{3}$. Ainsi, l'équation proposée possède une unique solution pour $B\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et c'est $X=\dfrac{AB+2B}{3}$.

c. Puisque $1\in\mathrm{Sp}(A)$, $A-I_n$ n'est pas inversible. Considérons deux cas :

• si $B\notin\mathrm{Im}\,(A-I_n)$, alors l'équation $AX=X-B$ n'a aucune solution.

• si $B\in\mathrm{Im}\,(A-I_n)$, il existe $C\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $B=(A-I_n)C$ ainsi $-C$ est solution de l'équation $AX=X-B$ et $AX=X-B\iff AX-X=A(-C)+C\iff(A-I_n)(X+C)=0$. Ainsi, $AX=X-B\iff X+C\in\mathrm{Ker}(A-I_n)$. Or $A^3-I_n=(A-I_n)(A^2+A+I_n)$ donc $\mathrm{Im}\,(A^2+A+I_n)\subset\mathrm{Ker}(A-I_n)$. Le lemme des noyaux montre que $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(A-I_n)\oplus\mathrm{Ker}(A^2+A+I_n)$ mais il est hors programme. Montrons-le donc. Soit $X\in\mathrm{Ker}(A-I_n)\cap\mathrm{Ker}(A^2+A+I_n)$, alors $AX=X$ et $(A^2+A+I_n)X=0$ or $(A^2+A+I_n)X=X+X+X=3X$ donc $X=0$ et $\mathrm{Ker}(A-I_n)$ et $\mathrm{Ker}(A^2+A+I_n)$ sont déjà en somme directe. Soit $X\in\mathbb{R}^n$, en raisonnant par analyse/synthèse, on montre que $X=\dfrac{A^2+A+I_n}{3}X+\dfrac{2I_n-A^2-A}{3}X$ avec $\dfrac{A^2+A+I_n}{3}X\in\mathrm{Ker}(A-I_n)$ et $\dfrac{2I_n-A^2-A}{3}X=\dfrac{(I_n-A)(2I_n+A)}{3}X\in\mathrm{Ker}(A^2+A+I_n)$. Ainsi, $\ker(A-I_n)$ et $\mathrm{Ker}(A^2+A+I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(A-I_n))=n-\dim(\mathrm{Ker}(A^2+A+I_n))=\dim(\mathrm{Im}\,(A^2+A+I_n))$ et on conclut par inclusion et égalité des dimensions que $\mathrm{Im}\,(A^2+A+I_n)=\mathrm{Ker}(A-I_n)$.

Par conséquent, $AX=X-B\iff X+C\in\mathrm{Im}\,(A^2+A+I_n)\iff(\exists Y\in\mathbb{R}^n,\ X=(A^2+A+I_n)Y-C$.

6.119 **a.** Posons $A_1=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}$ et $A_2=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}$, alors $A_1A_2=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1c_2&a_1b_2+b_1d_2\\c_1a_2+d_1c_2&c_1b_2+d_1d_2\end{pmatrix}$ de sorte que, par définition du produit de KRONECKER, $F(A_1A_2,B_1B_2)=\begin{pmatrix}(a_1a_2+b_1c_2)B_1B_2&(a_1b_2+b_1d_2)B_1B_2\\(c_1a_2+d_1c_2)B_1B_2&(c_1b_2+d_1d_2)B_1B_2\end{pmatrix}$. Or $F(A_1,B_1)F(A_2,B_2)=\begin{pmatrix}a_1B_1&b_1B_1\\c_1B_1&d_1B_1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_2B_2&b_2B_2\\c_2B_2&d_2B_2\end{pmatrix}$ donc, par propriété du produit par blocs, on a $F(A_1,B_1)F(A_2,B_2)=\begin{pmatrix}a_1a_2B_1B_2+b_1c_2B_1B_2&a_1b_2B_1B_2+b_1d_2B_1B_2\\c_1a_2B_1B_2+d_1c_2B_1B_2&c_1b_2B_1B_2+d_1d_2B_1B_2\end{pmatrix}$ et, en factorisant par B_1B_2 dans chaque case, on a $\forall(A_1,A_2,B_1,B_2)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})^4,\ F(A_1A_2,B_1B_2)=F(A_1,B_1)F(A_2,B_2)$.

b. $\mathrm{Tr}\,(F(A,B))=\mathrm{Tr}\,(aB)+\mathrm{Tr}\,(dB)$ donc, par linéarité de la trace, $\mathrm{Tr}\,(F(A,B))=(a+d)\mathrm{Tr}\,(B)=\mathrm{Tr}\,(A)\mathrm{Tr}\,(B)$. Si $c=0$, par propriété des déterminants des matrices triangulaires par blocs et puisque $\det(A)=ad$, on a $\det(F(A,B))=\det(aB)\det(dB)=a^2\det(B)d^2\det(B)=(ad)^2(\det(B))^2=\det(A)^2\det(B)^2$.

Si $c\neq0$, on effectue l'opération de GAUSS par blocs $C_2\leftarrow C_2-(d/c)C_1$ et $\det(F(A,B))=\begin{vmatrix}aB&(b-(da/c))B\\cB&0\end{vmatrix}$. En inversant les colonnes 1 et 3 et les colonnes 2 et 4, on ne change pas le signe du déterminant et on a $\det(F(A,B))=\begin{vmatrix}(b-(da/c))B&aB\\0&cB\end{vmatrix}$ donc $\det(F(A,B))=\det((b-(da/c))B)\det(cB)$ ce qui donne comme avant $\det(F(A,B))=\left(b-\dfrac{da}{c}\right)^2c^2\det(B)^2(ad-bc)^2\det(B)^2=\det(A)^2\det(B)^2$.

Dans tous les cas, on a la relation $\det(F(A,B))=\det(A)^2\det(B)^2$.

Si $\mathrm{rang}\,(A)=\mathrm{rang}\,(B)=2$, $F(A,B)$ est inversible puisque $\det(F(A,B))=\det(A)^2\det(B)^2$: $\mathrm{rang}\,(F(A,B))=4$.

Si $\mathrm{rang}\,(A)=0$ ou $\mathrm{rang}\,(B)=0$, alors $A=0$ ou $B=0$ et, par définition, $F(A,B)=0$ donc $\mathrm{rang}\,(F(A,B))=0$.

Si $\mathrm{rang}\,(A)=1$ et $\mathrm{rang}\,(B)=1$, les deux colonnes de B sont colinéaires, celles de A aussi, ainsi les quatre colonnes de $F(A,B)$ sont colinéaires et au moins l'une de ces quatre colonnes n'est pas nulle car l'une des colonnes de A et l'une de B n'est pas nulle, ainsi rang $(F(A,B) = 1$.

Si rang $(A) = 1$ et rang $(B) = 2$, les deux colonnes de A sont colinéaires donc, par exemple, les colonnes 3 et 4 de $F(A,B)$ s'écrivent en fonction des colonnes 1 et 2. Comme ces colonnes 3 et 4 sont indépendantes car B est inversible, on a rang $(F(A,B) = 2$.

Si rang $(A) = 2$ et rang $(B) = 1$, les deux colonnes de B sont colinéaires donc, par exemple, les colonnes 2 et 4 de $F(A,B)$ s'écrivent en fonction des colonnes 1 et 3. Comme ces colonnes 1 et 3 sont indépendantes car A est inversible, on a rang $(F(A,B) = 2$.

Dans tous les cas, on a donc rang $(F(A,B)) =$ rang (A)rang (B).

c. Si A et B sont diagonalisables, il existe $(P,Q) \in GL_2(\mathbb{C})^2$ tel que $P^{-1}AP = D$ et $Q^{-1}BQ = D'$ soient diagonales. Alors, avec la relation de **a.**, on a $F(A,B) = F(PDP^{-1}, QBQ^{-1}) = F(P,Q)F(D,D')F(P^{-1},Q^{-1})$. Or $F(P,Q)F(P^{-1},Q^{-1}) = F(PP^{-1},QQ^{-1}) = F(I_2,I_2) = I_4$ donc $F(P,Q)$ est inversible et, si $D = \mathrm{diag}(a,d)$, on a par définition $F(D,D') = \begin{pmatrix} aD' & 0 \\ 0 & dD' \end{pmatrix}$ est diagonale. Ainsi, $F(A,B)$ diagonalisable si A et B le sont.

$\boxed{\textbf{6.120}}$ Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique ! On va donc faire une disjonction des cas selon le type de χ_A. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

Cas 1 : Si $\chi_A = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ avec $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ distincts deux à deux, χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable et semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ car $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$.

Cas 2 : Si $\chi_A = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$ avec λ_1,λ_2 distincts, alors on sait que A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = 2$. Il y a donc à nouveau deux cas.

Cas 2.1 : Si $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = 2$, la matrice A est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ car A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1,\lambda_2\}$ avec λ_1 valeur propre double et λ_2 valeur propre simple.

Cas 2.2 : Si $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = 1$, il existe $v_1 \neq 0_E$ dans $E_{\lambda_1}(u)$ et $v_3 \neq 0_E$ dans $E_{\lambda_2}(u)$; il nous manque un vecteur. Comme $(u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2 \circ (u-\lambda_2 \mathrm{id}_E) = 0$, on a $\mathrm{Im}\,(u-\lambda_2 \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}((u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2)$ or, d'après la formule du rang, rang $(u-\lambda_2 \mathrm{id}_E) = 2$ car λ_2 est une valeur propre simple de u donc $\mathrm{Ker}((u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2)$ est un plan (ça ne peut pas être l'espace en entier car on aurait alors $(u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2 = 0$ et λ_2 ne serait pas valeur propre de u). Soit donc un vecteur w_2 tel que $w_2 \in \mathrm{Ker}((u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2) \setminus \mathrm{Ker}(u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)$. Comme $w_2 \in \mathrm{Ker}((u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2)$, on a $u(w_2) - w_2 \in \mathrm{Ker}(u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ (car $w_2 \notin E_{\lambda_1}(u)$) tel que $u(w_2) = w_2 + \alpha v_1$. En posant $v_2 = \dfrac{w_2}{\alpha}$, on a $u(v_2) = v_2 + v_1$. Comme (v_1,v_2) est une base de $\mathrm{Ker}((u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2)$ et que $v_3 \notin \mathrm{Ker}((u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2)$ car $(u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^2(v_3) = (\lambda_2-\lambda_1)^2 v_3 \neq 0_E$, la famille $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Cas 3 : Si $\chi_A = (X-\lambda_1)^3$, posons $v = u - \lambda_1 \mathrm{id}_E$, alors, par Cayley-Hamilton, v est nilpotent d'indice inférieur ou égal à 3 (normal car on est en dimension 3). Il y a à nouveau quelques cas.

Cas 3.1 : Si $v^2 \neq 0$, classiquement il existe une base $\mathcal{B} = (v^2(x), v(x), x)$ (en prenant x tel que $v^2(x) \neq 0$).

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc la matrice de $u = v + \lambda_1 \mathrm{id}_E$ dans $\mathcal{B}$ vaut $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Cas 3.2 : Si $v^2 = 0$ et $v \neq 0$, $\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Ker}(v)$ donc $\mathrm{rang}\,(v) = 1$. Soit (x_2) une base de $\mathrm{Im}\,(v)$, complétée en une base (x_1, x_2) de $\mathrm{Ker}(v)$; $\exists x_3 \in E,\ x_2 = v(x_3) \neq 0_E$ donc $x_3 \notin \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$, ainsi $\mathcal{B} = (x_1, x_2, x_3)$ est une base de E. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

Cas 3.3 : Si $v = 0$ alors $u = \lambda_1 \mathrm{id}_E$ et la matrice de u dans toute base est $\lambda_1 I_3$.

Toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ sont donc semblables à une et à une seule des matrices triangulaires supérieures (on savait déjà que toute matrice complexe est trigonalisable) suivantes :
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distincts deux à deux ; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec λ_1, λ_2 distincts ; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec λ_1, λ_2 distincts ; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{C}$.

6.121 **a.** Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. On va considérer différents cas :

- Si χ_A admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2, on sait d'après le cours qu'alors A est diagonalisable et il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Posons $D' = P^{-1}BP$, on a l'équivalence $AB = BA \iff PDD'P^{-1} = PD'DP^{-1} \iff DD' = D'D$. Or, par un calcul matriciel direct, on montre que $DD' = D'D$ équivaut à $D' = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2)$ diagonale. En posant Q l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que $Q(\lambda_1) = \mu_1$ et $Q(\lambda_2) = \mu_2$, on a $Q(D) = D'$ donc $Q(A) = PQ(D)P^{-1} = PD'P^{-1} = B$ et B est bien un polynôme en A.
- Si χ_B admet deux racines distinctes, on conclut par symétrie que A est un polynôme en B.
- Si χ_A admet une racine double λ mais que A est diagonalisable, alors $\dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda(A) = 2$ donc $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_2) = \mathbb{C}^2$ et $A = \lambda I_2$ de sorte que $A = Q(B)$ avec $Q = \lambda$.
- Si χ_B admet une racine double μ mais que B est diagonalisable, $B = \mu I_2$ et $B = Q(A)$ avec $Q = \mu$.
- Si χ_A, χ_B admettent respectivement pour racine double λ, μ et que ni A ni B ne sont diagonalisables, on sait néanmoins que A et B sont trigonalisables car χ_A et χ_B sont scindés sur $\mathbb{C}$ et il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$. En notant $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ la base de $\mathbb{C}^2$ telle que P est la matrice de passage entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$, on a donc $Av_1 = \lambda v_1$ donc, comme $AB = BA$, $ABv_1 = BAv_1 = \lambda Bv_1$ donc $Bv_1 \in E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ ce qui prouve qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Bv_1 = \alpha v_1$. Mais comme μ est la seule valeur propre de B, on a forcément $\alpha = \mu$. Comme $\mathrm{Tr}\,(B) = 2\mu$, on a forcément, par la formule de changement de base, $B = PT'P^{-1}$ avec $T' = \begin{pmatrix} \mu & b \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$. Par exemple, comme $T' = \frac{b}{a}T + \left(\mu - \frac{b\lambda}{a}\right)I_2$, on a aussi en multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite, $B = \frac{b}{a}A + \left(\mu - \frac{b\lambda}{a}\right)I_2 = Q(A)$ avec $Q = T' = \frac{b}{a}X\mu - \frac{b\lambda}{a}$ donc B est un polynôme en A (mais A est aussi dans ce cas un polynôme en B).

Dans tous les cas, si $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$, B est un polynôme en A ou A un polynôme en B.

b. Prenons $A = E_{1,2}$ et $B = E_{1,3}$, alors $AB = BA = 0$. Comme $A^2 = 0$, si $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $Q(A) = q_0 I_3 + q_1 A \in \mathsf{Vect}(I_3, A)$ donc l'ensemble des polynômes en A, noté $\mathbb{C}[A]$, vérifie $\mathbb{C}[A] = \mathsf{Vect}(I_3, A)$ car il est clair que $\mathsf{Vect}(I_3, A) \subset \mathbb{C}[A]$. De même, comme $B^2 = 0$, on a $\mathbb{C}[B] = \mathsf{Vect}(I_3, B)$. Par conséquent, $A \notin \mathbb{C}[B]$ et $B \notin \mathbb{C}[A]$ donc A n'est pas un polynôme en B et B n'est pas un polynôme en A.

c. Prenons à nouveau $A = E_{1,2}$ et $B = E_{1,3}$, alors $AB = BA = 0$, $\mathbb{R}[A] = \mathsf{Vect}(I_3, A)$ et $\mathbb{R}[B] = \mathsf{Vect}(I_3, B)$ donc, puisque $A \notin \mathsf{Vect}(I_3, B)$ et $B \notin \mathsf{Vect}(I_3, A)$, donc A (resp. B) n'est pas un polynôme en B (resp. A).

6.122 **a.** Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors, par définition, on a $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ ce qui devient, par hypothèse, $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k v_i \Big)$. On obtient $P(u) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k \lambda_i^k v_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_i^k \Big) v_i = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) v_i$ en inversant cette somme double. Si on prend $P = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k) \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P(u) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) v_i = 0$ car les λ_i sont des racines de P. Ainsi, u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples donc u est diagonalisable.

b. Généralisons, soit $k \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^k par P, ce qui donne $X^k = QP + R$ avec $\deg(R) < \deg(P) = n$. Ainsi, $u^k = Q(u) \circ P(u) + R(u) = R(u)$ car $P(u) = 0$. Or, d'après ce qui précède, $R(u) = \sum_{i=1}^{n} R(\lambda_i) v_i$. Mais, pour $i \in [\![1;n]\!]$, on a $\lambda_i^k = Q(\lambda_i)P(\lambda_i) + R(\lambda_i) = R(\lambda_i)$ donc $u^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k v_i$.

c. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, le polynôme L_i souhaité admet les λ_k (sauf λ_i) pour racines donc $L_i = Q_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (X - \lambda_k)$. Comme on veut que $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, Q_i doit être une constante et on veut aussi $L_i(\lambda_i) = 1$ ce qui impose la condition $Q_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (\lambda_i - \lambda_k) = 1$. Il existe donc un unique polynôme L_i possédant ces caractéristiques et c'est $L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \left(\dfrac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} \right)$ (polynômes de Lagrange). Par construction : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $L_i(\lambda_k) = \delta_{i,k}$.

d. Soit $i \in [\![1;n]\!]$, par construction on a $(X - \lambda_i)L_i = Q_i P$ donc $(u - \lambda_i \mathrm{id}_E) \circ L_i(u) = Q_i P(u) = 0$ ce qui équivaut au fait que $\mathrm{Im}\,(L_i(u)) \subset \mathsf{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id}_E) = E_{\lambda_i}(u)$. Or, puisque $\deg(L_i) = n - 1$ donc $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$, on a d'après les questions **a.** et **c.** la relation $L_i(u) = \sum_{k=1}^{n} L_i(\lambda_k) v_k = v_i$. Comme $v_i \neq 0$ par hypothèse, on a $\mathrm{Im}\,(L_i(u)) = \mathrm{Im}\,(v_i) \neq \{0_E\}$ donc il existe au moins un vecteur $x \neq 0_E$ dans $\mathrm{Im}\,(v_i)$ qui est donc aussi dans $E_{\lambda_i}(u)$, ce qui prouve que x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_i. Ainsi, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des valeurs propres de u. De plus, comme P est annulateur de u, les valeurs propres de u font partie des racines de P. Par double inclusion, $\mathsf{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.

e. D'après la question précédente, u admet n valeurs propres distinctes et $\dim(E) = n$ donc les n sous-espaces propres sont de dimension 1 car ils sont en somme directe.

6.123 On calcule $f^3 - (\lambda + \mu)f^2 = \lambda^3 u + \mu^3 v - (\lambda + \mu)(\lambda^2 u + \mu^2 v) = -\mu\lambda^2 u - \lambda\mu^2 v = -\lambda\mu f$ donc le polynôme $P = X^3 - (\lambda + \mu)X^2 + \lambda\mu X = X(X - \lambda)(X - \mu)$ est annulateur de f.

Si E est de dimension finie, on considère plusieurs cas :

- si $0, \lambda, \mu$ sont distincts, alors P est un polynôme annulateur de f scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc f est diagonalisable d'après le cours.
- si $\lambda = \mu = 0$, alors $f = 0u + 0v = 0$ est clairement diagonalisable.
- si $\lambda = \mu \neq 0$, alors en posant $w = u + v$, on a $f = \lambda w$, $f^2 = \lambda^2 w$ donc $f^2 - \lambda f = 0$ et $X(X - \lambda)$ est annulateur de f et scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc f est encore diagonalisable.

- si $\mu = 0$ et $\lambda \neq 0$ (par exemple mais on fait de même si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$), alors $f = \lambda u$ et $f^2 = \lambda^2 u$ donc, à nouveau, $f^2 - \lambda f = 0$ donc $X(X-\lambda)$ est annulateur de f et scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc, à nouveau, f diagonalisable.

Si E est de dimension infinie (hors programme), f est diagonalisable si et seulement si (par définition) E est la somme de sous-espaces propres de f. On sait déjà que les sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes sont en somme directe. On reprend les cas précédents et on décompose un vecteur x quelconque de E dans les deux ou trois sous-espaces propres.

- si $0, \lambda, \mu$ sont distincts, $X(X-\lambda)(X-\mu)$ est annulateur de f et, si $x \in E$ s'écrit $x = a + b + c$ avec $a \in E_0(f)$, $b \in E_\lambda(f)$ et $c \in E_\mu(f)$ alors $f(x) = \lambda b + \mu c$ et $f^2(x) = \lambda^2 b + \mu^2 c$ donc, en résolvant le système, on a $a = \dfrac{f^2(x) - (\lambda+\mu)f(x) + \lambda\mu x}{\lambda\mu}$, $b = \dfrac{f^2(x) - \mu f(x)}{\lambda(\lambda-\mu)}$ et $c = \dfrac{f^2(x) - \lambda f(x)}{\mu(\mu-\lambda)}$. Réciproquement, on vérifie par le calcul que ces vecteurs vérifient bien $x = a+b+c$ et $a \in E_0(f)$, $b \in E_\lambda(f)$ et $c \in E_\mu(f)$. On a bien la décomposition voulue de l'espace $E = E_0(f) \oplus E_\lambda(f) \oplus E_\mu(f)$. On aurait pu aussi reprendre la démonstration du cours en écrivant que $1 = L_0 + L_\lambda + L_\mu$ avec les polynômes de LAGRANGE $L_0 = \dfrac{(X-\lambda)(X-\mu)}{(0-\lambda)(0-\mu)}$, $L_\lambda = \dfrac{X(X-\mu)}{\lambda(\lambda-\mu)}$ et $L_\mu = \dfrac{X(X-\lambda)}{\mu(\mu-\lambda)}$ donc $\mathrm{id}_E = L_0(f) + L_\lambda(f) + L_\mu(f)$ ce qui montre que $E = \mathrm{Im}\,(L_0(f)) + \mathrm{Im}\,(L_\lambda(f)) + \mathrm{Im}\,(L_\mu(f))$ et il suffit de montrer que $\mathrm{Im}\,(L_0(f)) \subset E_0(f)$,... ce qui se fait en écrivant que $f \circ L_0(f) = \dfrac{1}{\lambda\mu} f \circ (f - \lambda \mathrm{id}_E) \circ (f - \mu \mathrm{id}_E) = 0$ car P est annulateur de f.
- si $\lambda = \mu = 0$, alors $f = 0$ est diagonalisable car $E = E_0(f)$.
- si $\lambda = \mu \neq 0$, alors $X(X-\lambda)$ est annulateur de f donc $E = E_0(f) \oplus E_\lambda(f)$ comme ci-dessus.
- si $\mu = 0$ et $\lambda \neq 0$ (par exemple), $X(X-\lambda)$ est annulateur de f et on conclut de même.

6.124 **a.** u^2 est un endomorphisme de E et $(u^2)^2 = u^4 = u^3 \circ u = u \circ u = u^2$ donc u^2 est un projecteur de E.

b. Comme $P = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de u, l'endomorphisme u est diagonalisable et $E = E_0(u) \oplus E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$ (il est possible que 0 ou 1 ou -1 ne soit pas valeur propre de u). En notant, car u est diagonalisable, $a = m_0(u) = \dim(E_0(u))$, $b = m_1(u) = \dim(E_1(u))$, $c = m_{-1}(u) = \dim(E_{-1}(u))$, on sait que $\dim(E) = a + b + c$, $\mathrm{Tr}\,(u) = b - c$. De plus, on a clairement $\mathrm{Im}\,(u) = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$ donc $\mathrm{rang}\,(u) = \dim(\mathrm{Im}\,(u)) = b + c$. La condition $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rang}\,(u)$ se traduit donc par $b - c = b + c$ donc $c = 0$. Par conséquent, -1 n'est pas une valeur propre de u et $u + \mathrm{id}_E \in GL(E)$ donc $(u^2 - u) \circ (u + \mathrm{id}_E) = 0$ implique $u^2 - u = 0$. Ainsi, si $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rang}\,(u)$ et $u^3 = u$, u est un projecteur.

6.125 **a.** Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, on sait que $\omega^5 - 1 = (\omega - 1)(\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1) = 0$ donc $\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$ (la somme des cinq racines cinquièmes de l'unité est nulle). En prenant les parties réelles, puisque $\omega^4 = \overline{\omega}$ et $\omega^3 = \overline{\omega^2}$, on obtient la relation $2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1 = 0$. Or $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$ donc $2(2a^2 - 1) + 2a + 1 = 0$ ce qui se simplifie en $4a^2 + 2a - 1 = 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (2\sqrt{5})^2$ donc $a = \dfrac{-2 + \pm 2\sqrt{5}}{8}$. Mais comme $a > 0$ car $0 < \dfrac{2\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2}$, on a donc $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. De plus, $b = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2a^2 - 1 = \dfrac{(5 + 1 - 2\sqrt{5}) - 8}{8} = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

b. Le polynôme $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ annule A et il est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ car on a $P = (X-\omega)(X-\omega^2)(X-\omega^3)(X-\omega^4)$. Ainsi, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais comme A est réelle, l'ordre de multiplicité p de ω et le même que celui de $\omega^4 = \overline{\omega}$, et l'ordre q de ω^2 est le même que celui de

$\omega^3 = \overline{\omega^2}$. Puisque χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$, on a $\text{Tr}\,(A) = p(\omega+\omega^4)+q(\omega^2+\omega^3) = 2p\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2q\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ d'où $\text{Tr}\,(A) = \frac{p-q}{2}\sqrt{5} - \frac{p+q}{2}$. Si $\text{Tr}\,(A) \in \mathbb{Q}$, comme $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, on a nécessairement (par l'absurde) $\frac{p-q}{2} = 0$ donc $p = q$. Ainsi, $n = p+p+q+q = 4p$ est un multiple de 4.

c. Pour $n = 4$, en posant $c = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $d = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, on peut utiliser les matrices de rotations (d'angle $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$ respectivement) du plan pour construire $A_4 = \begin{pmatrix} a & -c & 0 & 0 \\ c & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -d \\ 0 & 0 & d & b \end{pmatrix}$ pour avoir le résultat. On a bien $A_4^5 = I_4$ (si on fait 5 fois des rotations d'angle $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$ on obtient bien l'identité), puis en factorisant $A_4^5 - I_4 = (A_4^4 + A_4^3 + A_4^2 + A_4 + I_n)(A_4 - I_4)$ et $A_4 - I_4$ est inversible car 1 n'est pas valeur propre de ces rotations d'où $A_4^4 + A_4^3 + A_4^2 + A_4 + I_n = 0$. De plus, $\text{Tr}\,(A) = 2a + 2b = -1 \in \mathbb{Q}$ d'après la question **a.**.
Pour $n = 4p$ avec $p \geqslant 2$, $A = \text{diag}(A_4, \cdots, A_4)$ (avec p blocs) convient puisque $\text{Tr}\,(A) = -p \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

6.126 **a.** Pour une matrice $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de déterminant 1, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On s'inspire de ce résultat, puisque le déterminant de $P = \begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ est 1 pour d'abord conjecturer, et vérifier par un calcul par blocs direct, que $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

b. On définit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(M) = AM - MB$. L'énoncé nous propose de démontrer que φ est surjective. Or, comme φ est visiblement linéaire et qu'on est en dimension finie, φ est un automorphisme si et seulement si elle est injective. Soit $M \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $AM = MB$. Comme B est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de B. Par définition, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\lambda_k \in \mathbb{C}, BX_k = \lambda_k X_k$ et on a $AMX_k = MBX_k = \lambda_k MX_k$. Si on avait $MX_k \neq 0$, alors λ_k serait une valeur propre de A, ce qui est impossible par hypothèse car λ_k est une valeur propre de B et que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$. Ainsi, M s'annule sur tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, ce qui prouve que $M = 0$. Comme φ est injective, alors elle est surjective et on a bien : $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $C = DB - AD = \varphi(D)$.
Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Pour toute matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si on pose $P = \begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} I_n & -D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AD-DB \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Comme, d'après la question précédente, il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $C = \varphi(D) = AD - DB$, on a bien $N = P^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}P$ donc N est bien semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ pour toute $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Si A et B possèdent une valeur propre commune $\lambda \in \mathbb{C}$, comme $\chi_B = \chi_{{}^tB}$, λ est valeur propre de A et ${}^tB$ donc il existe deux vecteurs colonnes non nuls U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $AU = \lambda U$ et ${}^tBV = \lambda V$. En posant $X = U{}^tV \neq 0$, on a $AX = AU{}^tV = \lambda X$ et $XB = U{}^tVB = U{}^t({}^tBV) = \lambda X$ donc $X \in \text{Ker}(\varphi)$. On vient de montrer que si $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset \Longrightarrow \varphi$ n'est pas injective$\Longrightarrow \varphi$ non surjective. Par contre-apposée, on a bien établi que $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $C = DB - AD \Longrightarrow \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

6.127 Comme le polynôme $X^n - 1$ annule A par hypothèse et que $X^n - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ (ses racines sont les n racines n-ièmes de l'unité), la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ où z_1, z_2 sont des racines n-ièmes de l'unité car toute valeur propre de A est racine de tout polynôme annulateur de A, notamment $X^n - 1$. Par conséquent, $\text{Tr}\ (A) = \text{Tr}\ (D) = z_1 + z_2$ et $\det(A) = \det(D) = z_1 z_2$. Ainsi, $|\text{Tr}\ (A)| \leqslant |z_1| + |z_2| \leqslant 1 + 1 = 2$ donc $\text{Tr}\ (A) \in [\![-2; 2]\!]$ et $|\det(A)| = |z_1||z_2| = 1$ donc $\det(A) \in \{-1, 1\}$. De plus, puisque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $\text{Tr}\ (A) = a + d \in \mathbb{Z}$ et $\det(A) = ad - bc \in \mathbb{Z}$ et on sait d'après le cours que $\chi_A = X^2 - \text{Tr}\ (A)X + \det(A) \in \mathbb{Z}[X]$. Les valeurs possibles de $\text{Tr}\ (A)$ et $\det(A)$ montrent que $\chi_A = X^2 - \text{Tr}\ (A)X + \det(A)$ ne peut être que l'un des 10 polynômes suivants : $X^2 - 2X + 1$, $X^2 - X + 1$, $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$, $X^2 + 2X + 1$ ou $X^2 - 2X - 1$, $X^2 - X - 1$, $X^2 - 1$, $X^2 + X - 1$, $X^2 + 2X - 1$.

Éliminons quelques cas ! En effet, si $\det(A) = -1$, $z_1 z_2 = -1$ donc z_1 et z_2 ne peuvent pas être conjugués sinon $z_1 z_2 = z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = 1$. Par conséquent, z_1 et z_2 sont des racines réelles de $X^n - 1$ donc ne peuvent être que ± 1. Pour avoir $z_1 z_2 = -1$, forcément $z_1 = 1 = -z_2$ ou $z_1 = -1 = -z_2$ d'où $\text{Tr}\ (A) = 1 - 1 = 0$. Ainsi, χ_A est l'un des 6 polynômes $X^2 - 2X + 1$, $X^2 - X + 1$, $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$, $X^2 + 2X + 1$, $X^2 - 1$.

<u>Cas 1 : $\chi_A = X^2 - 2X + 1$</u> : comme $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, $\text{Sp}(A) = \{1\}$ donc, comme A est diagonalisable, A est donc semblable à la matrice I_2, c'est-à-dire $A = PI_2P^{-1} = I_2$ donc $A^{12} = I_2$.

<u>Cas 2 : $\chi_A = X^2 - X + 1$</u> : comme A est diagonalisable et que $X^2 - X + 1 = (X + j)(X + j^2)$, $\text{Sp}(A) = \{-j, -j^2\}$, on a $A = P\begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j^2 \end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^6 = I_2$ car $(-j, -j^2) \in \mathbb{U}_6^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Cas 3 : $\chi_A = X^2 + 1$</u> : comme A est diagonalisable et que $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$, $\text{Sp}(A) = \{-i, i\}$, on a $A = P\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ donc $A^4 = I_2$ car $(-i, i) \in \mathbb{U}_4^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Cas 4 : $\chi_A = X^2 + X + 1$</u> : comme A est diagonalisable et que $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$, $\text{Sp}(A) = \{j, j^2\}$, on a $A = P\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^3 = I_2$ car $(j, j^2) \in \mathbb{U}_3^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Cas 5 : $\chi_A = X^2 + 2X + 1$</u> : comme $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$, $\text{Sp}(A) = \{-1\}$ donc, comme A est diagonalisable, $A = P(-I_2)P^{-1} = -I_2$ donc $A^2 = I_2$ puis $A^{12} = I_2$.

<u>Cas 6 : $\chi_A = X^2 - 1$</u> : comme $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$, $\text{Sp}(A) = \{-1, 1\}$ donc, comme A est diagonalisable, $A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^2 = I_2$ car $(-1, 1) \in \mathbb{U}_2^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Fondamentalement, c'est parce les racines de ces 6 polynômes sont $1, -1, i, -i, j, j^2, -j, -j^2$, c'est-à-dire des racines seconde, troisième, quatrième, sixième de l'unité et que ppcm $(2, 3, 4, 6) = 12$, donc toutes ces valeurs $z \in \{1, -1, i, -i, j, j^2, -j, -j^2\}$ vérifient $z^{12} = 1$.

Réciproquement, soit une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que χ_A est l'un des polynômes $X^2 - X + 1$, $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$, $X^2 - 1$, alors comme $X^{12} - 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$, d'après Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A) = 0$ donc, comme χ_A divise $X^{12} - 1$, on a aussi $A^{12} = I_2$.

Par contre, si $\chi_A = (X + 1)^2$ ou $\chi_A = (X - 1)^2$, on ne peut pas être sûr que $A^{12} = I_2$ car A pourrait ne pas être diagonalisable, comme dans les cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6.128 **a.** Si $(g, h) \in C(f)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $(\lambda g + h) \circ f = \lambda g \circ f + h \circ f = \lambda f \circ g + f \circ h = f \circ (\lambda g + h)$ et $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. De plus, $\text{id}_E \in C(f)$ donc $C(f) \neq \emptyset$.

Ainsi $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par composition.

b. Si $Sp(f) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$, comme f est diagonalisable, $E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(f)$. On sait d'après le cours que si u et f commutent, tous les sous-espaces propres de f sont stables par u. Réciproquement, si $\forall k \in [\![1;r]\!]$, $F_k = E_{\lambda_k}(f)$ est stable par u, comme $f_{F_k} = \lambda_k \mathrm{id}_{F_k}$, u_{F_k} et f_{F_k} commutent. Ainsi, u et f commutent sur chaque sous-espace propre F_k donc u et f commutent sur E car E est la somme des sous-espaces propres F_k.
On a bien, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, l'équivalence $u \in C(f) \iff (\forall \lambda \in Sp(f),\ E_\lambda(f)$ est stable par $u)$.
Par conséquent, en notant $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_r)$ une base adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \cdots F_r$, on a $u \in C(f) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = diag(A_1 \ \cdots \ A_r)$ (diagonale par blocs). Ainsi, en notant D le sous-espace vectoriel des matrices de la forme précédente, l'application $\varphi : C(f) \to D$ définie par $\varphi(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme (sa linéarité est claire et l'équivalence fournit la bijectivité). Par conséquent, on en déduit que $\dim(C(f)) = \dim(D) = \sum_{k=1}^{r} \dim(F_k)^2$ car D est isomorphe aussi à $\mathcal{M}_{\dim(F_1)}(\mathbb{K}) \times \cdots \times \mathcal{M}_{\dim(F_r)}(\mathbb{K})$.
c. L'application $f : M \mapsto {}^tM$ est linéaire et c'est une symétrie car $f^2 = \mathrm{id}_E$ donc f est diagonalisable et $E_1(f) = S_n(\mathbb{K})$ (matrices symétriques) et $E_{-1}(f) = A_n(\mathbb{K})$ (matrices antisymétriques). Comme on sait que $\dim(S_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(A_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, on a $\dim(C(f)) = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^2$.

6.129 **a.** Comme $f \circ g = -g \circ f$, en passant aux déterminants et en notant $p = \dim(E)$, on obtient par multiplicativité du déterminant $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g) = (-1)^p \det(g)\det(f) = (-1)^p \det(g \circ f) = \det(-g \circ f)$.
Comme $\det(f)\det(g) \neq 0$, on a $1 = (-1)^p$ donc p est pair qu'on écrit $p = 2n = \dim(E)$.
b. Soit $x \in E_1(f)$, alors $f(x) = x$ et $f(g(x)) + g(f(x)) = 0_E$ donc $f(g(x)) = -g(x)$ donc $g(x) \in E_{-1}(f)$. On a donc $g(E_1(f)) \subset E_{-1}(f)$ et on montre de même que $g(E_{-1}(f)) \subset E_1(f)$. Comme f est une symétrie ou parce que le polynôme $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ annule f, on sait que $E = E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$. Comme g est un automorphisme, $\dim(g(E_1(f))) = \dim(E_1(f))$ et $\dim(g(E_{-1}(f))) = \dim(E_{-1}(f))$ ce qui donne avec les inclusions précédentes $\dim(E_1(f)) \leqslant \dim(E_{-1}(f))$ et $\dim(E_{-1}(f)) \leqslant \dim(E_1(f))$. Ainsi $\dim(E_1(f)) = \dim(E_{-1}(f)) = n$ car $\dim(E) = 2n$. Si on prend une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \cdots, e_n)$ de $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, alors la famille $\mathcal{B}_{-1} = (f_1 = g(e_1), \cdots, f_n = g(e_n))$ est une base de $E_{-1}(f) = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$ car g induit un isomorphisme entre $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$. Comme $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$, la famille $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n)$ est une base de E et, comme $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $g(f_k) = g^2(e_k) = e_k$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

6.130 On a par calculs $\det(A) = \det(B) = 4 \neq 0$ donc rang $(A) =$ rang $(B) = 3$, $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(B) = 5$ et même $\chi_A = \chi_B = X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-2)^2(X-1)$ mais ce ne sont que des conditions nécessaires de similitude. Cherchons si les matrices A et B sont diagonalisables ou pas. Par un théorème du cours, puisque χ_A et χ_B sont scindés sur $\mathbb{R}$ et que $\dim(E_1(A)) = \dim(E_1(B)) = 1$ puisque 1 est une valeur propre simple de A et de B, A (resp. B) est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_2(A)) = 2$ (resp. $\dim(E_2(B)) = 2$). Or $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ donc on a clairement rang $(A - 2I_3) = 2$ alors que rang $(B - 2I_3) = 1$. D'après le théorème du rang, comme $E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ et $E_2(B) = \mathrm{Ker}(B - 2I_3)$, on a donc les ordres de multiplicité géométriques de la valeur propre 2 : $\dim(E_2(A)) = 1$ et $\dim(E_2(B)) = 2$.

On peut répondre à la question posée. En effet, si A et B étaient semblables, $E_2(A)$ et $E_2(B)$ auraient la même dimension, ce qui n'est pas le cas ici : A et B ne sont donc pas semblables.

Ainsi, A n'est pas diagonalisable alors que B l'est. Ainsi, B est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on peut montrer, c'est la théorie hors programme de la réduction de JORDAN, que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Si on fait les calculs, on trouve $A = PTP^{-1}$ et $B = QDQ^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6.131 Si $f^3 + f^2 - \mathrm{id}_E = 0$, le polynôme $P = X^3 + X^2 - 1$ est annulateur de f. Or $P'(t) = 3t^2 + 2t = t(3t + 2)$ donc P est croissante sur $]-\infty; -2/3[$ et $\mathbb{R}_+^*$, décroissante sur $]-2/3; 0[$. Or $P\Big(-\dfrac{2}{3}\Big) = -\dfrac{8}{27} + \dfrac{4}{9} - 1 = -\dfrac{23}{27} < 0$ et $P(0) = -1 < 0$ donc P n'admet qu'une seule racine réelle $\alpha \in]0; 1[$ car $P(0) = -1 < 0 < P(1) = 1$. P admet aussi deux racines complexes conjuguées β et $\overline{\beta}$ et on a $\alpha + \beta + \overline{\beta} = -1$ et $\alpha\beta\overline{\beta} = 1 = \alpha|\beta|^2$. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans une base quelconque de E, alors P étant scindé à racines simples, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et A est semblable à une matrice diagonale D avec des α, β et $\overline{\beta}$ sur la diagonale (avec leurs ordres de multiplicité algébriques/géométriques). Ainsi, puisque $\chi_A = \chi_f$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\alpha, \beta, \overline{\beta}\}$, on a $n = m_\alpha(A) + m_\beta(A) + m_{\overline{\beta}}(A)$ et $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(f) = \alpha m_\alpha(A) + \beta m_\beta(A) + \overline{\beta} m_{\overline{\beta}}(A)$. Comme A est réelle, on sait que $m_\beta(A) = m_{\overline{\beta}}(A)$ donc $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(f) = \alpha m_\alpha(A) + (\beta + \overline{\beta}) m_\beta(A)$ qui devient $\mathrm{Tr}\,(f) = -m_\beta(A) + \alpha(m_\alpha(A) - m_\beta(A))$.
Si on avait α rationnel, alors on aurait $\alpha = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux. Alors $a^3 + a^2 - 1 = 0$ devient $p^3 + p^2 q - q^3 = 0$ donc $q(q^2 - p^2) = p^3$ d'où q divise p^3 ce qui implique que $q|1$ d'après le théorème de GAUSS ($(a|bc$ et $a \wedge b = 1) \Longrightarrow a|c$). De même, $p((p^2 + pq) = q^3$ donc p divise q^3 et, à nouveau $q|1$. Ainsi, $\alpha = \pm 1$ mais ni 1 ni -1 ne sont racine de P donc $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Si on avait $m_\alpha(A) - m_\beta(A) \neq 0$, alors $a = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(f) + m_\beta(A)}{m_\alpha(A) - m_\beta(A)} \in \mathbb{Q}$: absurde. Ainsi, $m_\alpha(A) - m_\beta(A) = 0$ donc $n = 3m_\alpha(A)$ est multiple de 3.

6.132 Traitons plusieurs cas :

• Si χ_A a deux racines simples, alors A est diagonalisable et semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ où $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ (avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Il existe donc P inversible telle $A = PDP^{-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en notant α_1 et α_2 des racines n-ièmes de λ_1 et λ_2 respectivement (il en existe dans $\mathbb{C}$), et en posant $B_n = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} P^{-1}$, $A = PB_n^n P^{-1}$.

• Si χ_A a une racine double λ et que A est diagonalisable, alors $\dim(E_\lambda(A)) = 2$ (l'ordre de λ dans χ_A) donc $A = \lambda I_2$. En notant α une racine n-ième de λ et $B_n = \alpha I_2$, on a $A = B_n^n$.

• Si χ_A a une racine double λ et que A est non diagonalisable, on constate d'abord que si on avait $\lambda = 0$, on aurait $\chi_A = X^2$ donc $A^2 = 0$ par CAYLEY-HAMILTON ce qui est contraire à l'énoncé. Ainsi $\lambda \neq 0$ et $\dim(E_\lambda(A)) = 1$, on prend donc un vecteur V_1 non nul tel que $AV_1 = \lambda V_1$. Soit V_2 tel que (V_1, V_2) soit une base de $\mathbb{C}^2$, comme $(A - \lambda I_2)^2 = 0$ d'après CAYLEY-HAMILTON, on a $\mathrm{Im}\,(A - \lambda I_2) \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda I_2)$ et on conclut à $\mathrm{Im}\,(A - \lambda I_2) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_2)$ par l'égalité des dimensions grâce à la formule du rang. Ainsi $AV_2 - \lambda V_2 \in \mathrm{Im}\,(A - \lambda I_2) = \mathrm{Vect}(V_1)$ donc il existe $\mu \in \mathbb{C}^*$ tel que $AV_2 - \lambda V_2 = \mu V_1$ ($\mu \neq 0$ car on aurait sinon $V_2 \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_2) = \mathrm{Vect}(V_1)$). En posant P la matrice passage de la base canonique de C^2 à la base $\mathcal{B} = (V_1, V_2)$, et puisque $AV_1 = \lambda V_1$ et $AV_2 = \lambda V_2 + \mu V_1$, on a $T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure. Soit α une racine n-ième de λ et $\beta = \dfrac{\mu}{n\alpha^{n-1}}$, alors en posant $T' = \alpha I_2 + \beta E_{1,2}$, on a par le binôme de NEWTON et car $E_{1,2}^2 = 0$ (I_2 et $E_{1,2}$ commutent), $T'^n = \alpha^n I_2 + n\alpha^{n-1}\beta E_{1,2} = \lambda I_2 + \mu E_{1,2}$. Il suffit donc de poser $B_n = PT'P^{-1}$ pour avoir $A = B_n^n$.

6.133 **a.** On vérifie que ni 0, ni 1, ni -2 ne sont racine de P mais que $P(-1) = -1-2+2+1-4+4 = 0$ et $P(2) = 32-32-16+4+8+4 = 0$ donc -1 et 2 sont des racines de P.

b. On a donc deux racines d'un polynôme de degré 5, ce qui n'est pas suffisant. Voyons si -1 ou 2 ne serait pas par hasard racine multiple de P. Comme $P' = 5X^4 - 8X^3 - 6X^2 + 2X + 4$, on a $P'(-1) = 9 \neq 0$ mais $P'(2) = 0$ donc 2 est racine au moins double de P. Par conséquent $(X-2)^2(X+1)$ divise P. Après calculs, on trouve $P = (X-2)^2(X+1)(X^2+X+1)$ qui devient classiquement $P = (X-2)^2(X+1)(X-j)(X-j^2)$.

c. Analyse : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$. Comme P est annulateur de M, les valeurs propres complexes de M sont des racines de P donc ne peuvent être $2, -1, j$ ou j^2. Comme χ_M est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, on sait d'après le cours que $\det(M) = 2^{m_2(M)}(-1)^{m_1(M)}j^{m_j(M)}j^{2m_{j^2}(M)}$. De plus, comme M est réelle et j et j^2 conjugués, on sait que $m_j(M) = m_{j^2}(M)$. Ainsi, $\det(M) = 2^{m_2(M)}(-1)^{m_1(M)}$ car $j \times j^2 = j^3 = 1$. Ainsi, si on impose $\det(M) = \pm 1$, on doit forcément avoir $m_2(M) = 0$ ce qui prouve que 2 n'est pas valeur propre de M. Ainsi $M - 2I_n$ est inversible donc, puisque $(M-2I_n)^2(M+I_n)(M-jI_n)(M-j^2I_n) = 0$, on peut simplifier ceci, en multipliant par $(M-2I_n)^{-2}$, en la relation $(M+I_n)(M-jI_n)(M-j^2I_n) = 0$. Par conséquent, le polynôme scindé à racines simples $Q = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ est annulateur de M ce qui montre que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ainsi, si $M = UDU^{-1}$ avec $U \in GL_n(\mathbb{C})$ et D diagonale, on a aussi $M^3 = UD^3U^{-1}$ et M^3 est aussi diagonalisable avec $-1 = (-1)^3$ de multiplicité $m_1(M)$ et $1 = j^3 = (j^2)^3$ de multiplicité $m_j(M) + m_{j^2}(M)$. Ainsi, $\text{Tr}\,(M^3) = (-1) \times m_1(M) + 1 \times (m_j(M) + m_{j^2}(M)) = -m_1(M) + 2m_j(M)$. La condition $\text{Tr}\,(M^3) = 0$ impose donc $m_1(M) = 2m_j(M)$. Mais comme on sait aussi que l'on a la relation $\dim(\mathbb{R}^n) = n = m_1(M) + m_j(M) + m_{j^2}(M) = 4m_j(M)$, on en déduit que n est un multiple de 4.

Synthèse : réciproquement, la matrice $M = M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ est réelle, de déterminant 1, vérifie $M^3 = \begin{pmatrix} (-I_2)^3 & 0 \\ 0 & R^3 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, -1, 1, 1)$ car R représente une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ dans le plan euclidien canonique, donc $\text{Tr}\,(M^3) = 0$ et $(X+1)(X^2+X+1)$ annule M (raisonner par blocs 2×2) donc a fortiori P (multiple de $(X+1)(X^2+X+1)$) annule M. Plus généralement, si $n = 4p$, si on pose $M = \text{diag}(M_4, \cdots, M_4)$, alors on a bien $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\text{Tr}\,(M^3) = 0$, $\det(M) = \pm 1$ et $P(M) = 0$.

Les entiers cherchés sont donc exactement les multiples de 4.

6.134 **a.** Le polynôme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$ et ses racines sont exactement les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ de A. Comme χ_A est unitaire, $\chi_A = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}(A)}$ donc $\chi_A(B) = \prod_{k=1}^{r} (B - \lambda_k I_n)^{m_{\lambda_k}(A)}$. Comme A et B n'ont pas de racine en commun, les matrices $B - \lambda_k I_n$ sont inversibles pour tout $k \in [\![1; r]\!]$ car λ_k n'est pas valeur propre de B. Ainsi, par produit de matrices inversibles, $\chi_A(B)$ est aussi inversible.

b. On définit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(X) = AX - XB$. Comme φ est visiblement linéaire et qu'on est en dimension finie, φ est un automorphisme si et seulement si elle est injective.

Soit $X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, $AX = XB$. Alors $A^2X = A(AX) = A(XB) = (AX)B = XB^2$. Par une récurrence facile, on montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^kX = XB^k$. Si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kX^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kA^kX = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kXB^k = XP(B)$. En prenant $P = \chi_A$, on obtient donc $\chi_A(A)X = X\chi_A(B)$ ce qui donne avec CAYLEY-HAMILTON, $X\chi_A(B) = 0$. Or on a vu en **a.** que $\chi_A(B)$ est inversible, donc $X = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ ce qui montre que φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. φ est donc surjectif ce qui s'écrit aussi $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = Y$.

6.135 **a.** Si on note $\mathcal{P}(k) =$ "$A^kB - BA^k = k\alpha A^k$" pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, l'énoncé se traduit par le fait que $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Or $\mathcal{P}(0)$ est aussi vraie car $A^0 = I_n$ et $I_nB - BI_n = 0 = 0\alpha I_n$.
Soit $k \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $A^{k+1}B - BA^{k+1} = A(A^kB) - BA^{k+1} = A(BA^k + k\alpha A^k) - BA^{k+1}$ donc $A^{k+1}B - BA^{k+1} = (AB - BA)A^k + k\alpha A^{k+1} = \alpha A^{k+1} + k\alpha A^{k+1} = (k+1)\alpha A^{k+1}$ et l'assertion $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. Par principe de récurrence, on a bien $\forall k \in \mathbb{N},\ A^kB - BA^k = k\alpha A^k$.

b. L'application $L : M \mapsto MB - BM$ est clairement un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si on suppose que A n'est pas nilpotente, alors $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k \neq 0$ et $L(A^k) = k\alpha A^k$ d'après la question précédente. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N},\ k\alpha \in \mathrm{Sp}(L)$. Ceci est impossible car cela ferait une infinité de valeurs propres pour un endomorphisme en dimension finie. Ainsi, la matrice A est bien nilpotente.

6.136 On calcule $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -a & -a \\ 1 & X-1 & 1 \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 1 & X-1 & 2-X \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 1 & X-1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ en utilisant la linéarité par rapport à la troisième colonne. Ainsi, $\chi_A = (X-2) \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ donc, en développant par rapport à la troisième colonne, on obtient $\chi_A = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & -a \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X-2)$.
Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et que $1 \leqslant \dim(E_2(A)) \leqslant 1 = m_2(A)$ implique $\dim(E_2(A)) = 1 = m_2(A)$, on sait d'après un théorème du cours que A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(A)) = 2 = m_1(A)$. Comme $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_3)$, ceci est équivalent à rang $(A - I_3) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = 1$ par la formule du rang.
Or $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 si et seulement si $a = 0$ (regarder les lignes de A).
Ainsi A est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.
Même si ce n'est pas demandé, si $a = 0$, $E_2(A) = \mathrm{Vect}((0,-1,1))$ et $E_1(A) = \mathrm{Vect}((0,1,0),(1,0,-1))$ (en résolvant par exemple $AX = X$ et $AX = 2X$) donc $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
De même, si $a \neq 0$, χ_A étant scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable et on peut montrer, théorie de la réduction de JORDAN (Camille JORDAN : français !) hors programme, que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Après calculs, on trouve $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a+1 & 1 \\ -a & -a & -1 \end{pmatrix}$.

6.137 **a.** f va de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans E et elle est linéaire par linéarité de la trace : f est un endomorphisme de E.

Si $f(M) = 0$, alors $M = -\mathrm{Tr}\,(M)A$ or $f(A) = (\mathrm{Tr}\,(A) + 1)A$ donc $f(M) = -(\mathrm{Tr}\,(A) + 1)\mathrm{Tr}\,(M)A = 0$ implique $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$ car $A \neq 0$ et $\mathrm{Tr}\,(A) + 1 \neq 0$. Ainsi, $M = 0$. Par conséquent $\mathrm{Ker}(M) = \{0\}$ ce qui fait de f un endomorphisme injectif donc un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (dimension finie).

b. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $f(M) = 0$, alors $M = -\text{Tr }(M)A \in \text{Vect}(A)$. Ainsi, $\text{Ker}(f) \subset \text{Vect}(A)$. Comme $f(A) = (\text{Tr }(A)+1)A = 0$, $A \in \text{Ker}(f)$ donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(A)$. Comme $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$, $\text{rang}\,(f) = n^2-1$ par la formule du rang. Or, si $N \in \text{Im}\,(f)$, il existe $M \in E$ telle que $N = f(M) = M + \text{Tr }(M)A$, par conséquent $\text{Tr }(N) = \text{Tr }(M) + \text{Tr }(M)\text{Tr }(A) = (1+\text{Tr }(A))\text{Tr }(M) = 0$: $\text{Im}\,(f) \subset \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr }(M) = 0\} = \text{Ker}(\text{Tr })$. Or Tr est une forme linéaire non nulle sur E, $\text{Ker}(\text{Tr })$ est un hyperplan de E : $\dim(\text{Im}\,(f)) = \dim(\text{Ker}(\text{Tr }))$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a bien $\text{Im}\,(f) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr }(M) = 0\}$.

c. On traite donc deux cas :

• Si $\text{Tr }(A) \neq -1$, $M + \text{Tr }(M)A = B \iff f(M) = B \iff M = f^{-1}(B)$ donc il existe une unique solution M de cette équation. Or $\text{Tr }(M) + \text{Tr }(M)\text{Tr }(A) = \text{Tr }(B)$ donc $\text{Tr }(M) = \dfrac{\text{Tr }(B)}{1+\text{Tr }(A)}$ et l'unique solution est donc la matrice $M = B - \text{Tr }(M)A = B - \dfrac{\text{Tr }(B)}{1+\text{Tr }(A)}A$. Au passage, on a montré que $f^{-1} : M \mapsto M - \dfrac{\text{Tr }(M)}{1+\text{Tr }(A)}A$.

• Si $\text{Tr }(A) = -1$, il y a à nouveau deux cas :

  • Si $\text{Tr }(B) \neq 0$, il n'y a aucune solution de $M + \text{Tr }(M)A = f(M) = B$ car $B \notin \text{Im}\,(f)$ d'après **b.**.

  • Si $\text{Tr }(B) = 0$, comme $M = B$ est clairement solution, $M+\text{Tr }(M)A = f(M) = B \iff f(M) = f(B)$ donc $f(M) = B \iff M - B \in \text{Ker}(f) \iff M - B \in \text{Vect}(A)$ d'après **b.** donc les solutions de $M+\text{Tr }(M)A = B$ sont les matrices de la forme $B + \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

6.138 **a.** Si f est diagonalisable, on sait qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$ est diagonale. Alors, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = D^2$ est aussi diagonale donc alors f^2 est aussi diagonalisable par définition. De même bien sûr, tous les endomorphismes f^k sont diagonalisables pour $k \in \mathbb{N}$.

Pour les deux questions suivantes, on ne se place plus en dimension finie sinon l'implication est évidente puisque qu'on sait que pour un endomorphisme en dimension finie, il est injectif si et seulement si il est surjectif si et seulement si il est bijectif.

b. Si $f^3 = f$ et f injective, soit $x \in E$, alors $f^3(x) = f(x)$ s'écrit aussi $f(f^2(x)) = f(x)$ donc $f^2(x) = x$ puisque f est injective. ainsi, $f^2 = \text{id}_E$ et f est une symétrie donc elle est bijective.

b. Si $f^3 = f$ et f surjective, soit $x \in E$, alors $\exists y \in E,\ f(y) = x$. Comme $f^3(y) = f(y)$, on en déduit que $f^2(x) = x$ donc que f est à nouveau une symétrie vectorielle donc un automorphisme de E.

Question de cours : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulateur de A ou si et seulement si χ_A est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et si pour toute valeur propre λ de A, on a $\dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda(A)$.

6.139 **a.** Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, M est diagonalisable car elle est symétrique réelle. Avec les hypothèses de l'énoncé, $\text{rang}\,(M) = 2$ donc $\dim(E_0(M)) = n-2$ et 0 est valeur propre (si $n \geqslant 3$ tout de même) de M d'ordre de multiplicité algébrique au moins égale à $n-2$. Il ne reste que 2 valeurs propres à trouver. Notons $0, \cdots, 0, \lambda_1, \lambda_2$ la liste des n valeurs propres de M comptées avec leurs ordres de multiplicité. Puisque M est diagonalisable, $\text{Tr }(M) = \lambda_1+\lambda_2 = a_n$ et $\text{Tr }(M^2) = \lambda_1^2+\lambda_2^2 = a_n^2 + 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2$. Ainsi, $\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^2 - (\lambda_1^2+\lambda_2^2)}{2} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2$. Ainsi, λ_1 et λ_2 sont les racines du polynôme $(X-\lambda_1)(X-\lambda_2) = X^2 - a_nX + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2$. Comme son discriminant vaut $\Delta = a_n^2 + 4\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 > 0$, on a $\lambda_1 = \dfrac{a_n+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{a_n-\sqrt{\Delta}}{2}$ (dans un ordre quelconque).

b. Prenons $M = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ pour avoir $a_2^2 + 4a_1^2 = 0$, alors on trouve $\chi_M = X(X-2)+1 = (X-1)^2$. M est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(M)) = 2$ c'est-dire si et seulement si $M = I_2$ ce qui n'est pas le cas ici. Ainsi, cette matrice M est de la forme de l'énoncé, complexe et non diagonalisable.

c. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, deux méthodes avec polynôme annulateur ou recherche des sous-espaces propres :

Méthode 1 : on résout le système $MX = \lambda X$ pour $\lambda \neq 0$ et ${}^tX = (x_1 \ \cdots \ x_n)$, $a_1x_n = \lambda x_1, \cdots, a_{n-1}x_n = \lambda x_{n-1}$ et $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \lambda x_n$. On multiplie cette dernière équation par λ et $(a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2)x_n + \lambda a_n x_n = \lambda^2 x_n$. Soit l'équation $(E)\ :\ z^2 - a_n z - \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$. Si λ n'est pas solution de cette équation, $x_n = 0$ et $X = 0$ ce qu'on ne veut pas. Traitons maintenant deux cas :

- Si $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$ et $\Delta = a_n^2 + 4\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$, il existe deux solutions non nulles λ_1 et λ_2 et distinctes de (E). Ainsi, en remontant les calculs en prenant par exemple $x_n = \lambda_1 \neq 0$ (pour la première solution λ_1) ou $x_n = \lambda_2 \neq 0$ (pour la seconde) on a λ_1 et λ_2 qui sont des valeurs propres associées aux vecteurs propres $(a_1, \cdots, a_{n-1}, \lambda_1)$ et $(a_1, \cdots, a_{n-1}, \lambda_2)$. Ainsi, M est diagonalisable car $\dim(E_0(M)) = n-2$, $\dim(E_{\lambda_1}(M)) = 1$, $\dim(E_{\lambda_2}(M)) = 1$ et $n-2+1+1 = n$.
- Si $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$ et $\Delta = a_n^2 + 4\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$, alors (E) admet une solution double $\lambda = \dfrac{a_n}{2} \neq 0$, mais en résolvant le système, $E_\lambda(M) = \mathrm{Vect}(v)$ avec $v = (a_1, \cdots, a_{n-1}, \lambda)$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(M) = \{0, \lambda\}$ mais $\dim(E_0(M)) + \dim(E_\lambda(M)) = n-2+1 = n-1 < n$ donc M n'est pas diagonalisable.
- Si $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$, a_n et 0 sont solutions de (E). Mais, $E_{a_n}(M) = \mathrm{Vect}(v)$ avec $v = (a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)$ comme avant. Ainsi, $\mathrm{Sp}(M) = \{0, a_n\}$ mais $\dim(E_0(M)) + \dim(E_{a_n}(M)) = n-2+1 = n-1 < n$.

Méthode 2 : $M^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & \cdots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_{n-1}a_n \\ a_na_1 & \cdots & a_{n-1}a_1 & S_2 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} a_1^2a_n & \cdots & a_1^2a_{n-1} & a_1S_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1a_n & \cdots & a_{n-1}^2a_1 & a_{n-1}S_2 \\ a_1S_2 & \cdots & a_{n-1}S_2 & S_3 \end{pmatrix}$ où $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$ et $S_3 = 2a_nS_2 - a_n^2$. Ainsi $M^3 - a_nM^2 - \Big(\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2\Big)M = 0$. Traitons deux cas :

- Si $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$, $X^2(X - a_n)$ est annulateur de M donc $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, a_n\}$ avec $a_n \neq 0$ par hypothèse. Si M était diagonalisable, qu'on ait $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$, $\{a_n\}$ ou $\{0, a_n\}$, on aurait $X(X - a_n)$ annulateur de M par théorème. Or $M^2 - a_nM \neq 0$ avec les hypothèses de l'énoncé donc M n'est pas diagonalisable.
- Si $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$ et $\Delta = a_n^2 + 4\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$, le polynôme $X^3 - a_nX^2 - \Big(\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2\Big)X = X\Big(X^2 - a_nX - \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2\Big)$ est scindé à racines simples et annulateur de M donc M est diagonalisable.
- Si $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$ et $\Delta = a_n^2 + 4\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$, le polynôme $X\Big(X - \dfrac{a_n}{2}\Big)^2$ annule M donc le spectre de M est inclus dans $\Big\{0, \dfrac{a_n}{2}\Big\}$. Si M était diagonalisable, qu'on ait $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$, $\Big\{\dfrac{a_n}{2}\Big\}$ ou $\mathrm{Sp}(M) = \Big\{0, \dfrac{a_n}{2}\Big\}$, on aurait $X\Big(X - \dfrac{a_n}{2}\Big)$ annulateur de M donc $M\Big(M - \dfrac{a_n}{2}I_n\Big) = 0$ dans tous les cas. Or on vérifie que $M^2 \neq \dfrac{a_n}{2}M$.

Quelle que soit la méthode : M diagonalisable si et seulement si $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$ et $a_n^2 + 4\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$.

$\boxed{\textbf{6.140}}$ **a.** Si P a n racines distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, sachant que P est de degré n et unitaire, $P = \chi_A = \chi_B = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$. On sait que dans ce cas, A et B sont diagonalisables car les sous-espaces propres associés aux λ_k sont tous des droites et que $\mathbb{K}^n = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} E_{\lambda_k}(A) = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} E_{\lambda_k}(B)$. Ainsi, les deux matrices A et B sont semblables à la

même matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, par conséquent A et B sont semblables par transitivité de la notion de matrices semblables.
b. Soit $A = 0$ et $B = E_{1,2}$ si $n \geqslant 2$, alors $P = \chi_A = \chi_B = X^n$ et pourtant A et B ne sont pas semblables car elles n'ont pas le même rang : $\text{rang}\,(A) = 0$ et $\text{rang}\,(B) = 1$.

6.141 **a.** A est diagonalisable car elle est symétrique réelle d'après le théorème spectral. Mais sans ça, on voit tout de suite que $v_1 = (1, 1)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 3$. Puisque $\mathrm{Tr}\ (A) = 2$, on en déduit que $\lambda_2 = -1$ est la seconde valeur propre de A et on vérifie que $v_2 = (1, -1)$ est un vecteur propre de A associé à λ_2. On aurait bien sûr pu calculer $\chi_A = (X-3)(X+1)$ et résoudre les systèmes $AX = 3X$ et $AX = -X$. Ainsi, comme (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, on a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Comme $\det(A) = -3$, A est inversible (il suffit de dire que 0 n'est pas valeur propre de A). D'après les calculs précédents, comme $E_3(A)$ et $E_{-1}(A)$ sont des droites car 3 et -1 sont valeurs propres simples de A, on a $E_3(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$.

b. B est aussi diagonalisable car symétrique réelle, toujours d'après le théorème spectral pas encore vu.
<u>Méthode 1</u> : comme on a clairement $\text{rang}\,(B) = 2$, le sous-espace $\mathrm{Ker}(B)$ est de dimension 2 par la formule du rang et on a $E_0(B) = \mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ avec $w_1 = (1, 0, -1, 0)$ et $w_2 = (0, 1, 0, -1)$. De plus, comme les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont 0 et 2, on espère $2 \times 3 = 6$ et $2 \times (-1) = -2$ comme valeurs propres de B. Or, en posant $w_3 = (1, 1, 1, 1)$, on a $Bw_3 = 6w_3$ donc 6 est valeur propre de B. De plus, en posant $w_4 = (1, -1, 1, -1)$, on trouve $Bw_4 = -2w_4$ donc -2 est valeur propre de B. Comme $E_0(B)$, $E_6(B)$ et $E_{-2}(B)$ sont en somme directe, on a $E_0(B) = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$, $E_6(B) = \mathrm{Vect}(w_3)$ et $E_{-2}(B) = \mathrm{Vect}(w_4)$ donc $\mathbb{R}^4 = E_0(B) \oplus E_6(B) \oplus E_{-2}(B)$; on retrouve que B est diagonalisable.

Enfin, $B = Q\Delta Q^{-1}$ avec les matrices $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Méthode 2</u> : on pouvait aussi trouver un polynôme annulateur de B en se servant du fait que $A^2 - 2A - 3I_2 = 0$ puisque $(X-3)(X+1)$ annule A. Ensuite, $B^2 = \begin{pmatrix} 2A^2 & 2A^2 \\ 2A^2 & 2A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4A + 6I_2 & 4A + 6I_2 \\ 4A + 6I_2 & 4A + 6I_2 \end{pmatrix}$ et on a aussi $B^3 = \begin{pmatrix} 8A^2 + 12A & 8A^2 + 12A \\ 8A^2 + 12A & 8A^2 + 12A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28A + 24I_2 & 28A + 24I_2 \\ 28A + 24I_2 & 28A + 24I_2 \end{pmatrix} = 4B^2 + 12B$ donc le polynôme scindé à racines simples $X^3 - 4X^2 - 12X = X(X+2)(X-6)$ annule bien B. Et on pouvait aussi bien sûr calculer le polynôme caractéristique de B, ce qui aurait conduit après calculs à $\chi_B = X^2(X+2)(X-6)$.

6.142 **a.** Par hypothèse, $A_0B_0C_0D_0$ est un parallélogramme. C'est l'initialisation.
Soit $n \geqslant 1$ tel que $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$ est un parallélogramme. Alors puisque A_n est le milieu de $[A_nB_n]$ et B_n le milieu de $[B_{n-1}C_{n-1}]$, on a $\overrightarrow{A_nB_n} = \overrightarrow{A_nB_{n-1}} + \overrightarrow{B_{n-1}B_n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_{n-1}B_{n-1}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_{n-1}C_{n-1}}$. Ensuite, puisque $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{A_nB_n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D_{n-1}C_{n-1}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_{n-1}D_{n-1}} = \overrightarrow{D_{n-1}C_n} + \overrightarrow{D_nD_{n-1}}$ car C_n est le milieu de $[D_{n-1}C_{n-1}]$ et D_n le milieu de $[A_{n-1}D_{n-1}]$. Enfin, on trouve par CHASLES la relation $\overrightarrow{A_nB_n} = \overrightarrow{D_nC_n}$ qui prouve que $A_nB_nC_nD_n$ est un parallélogramme. On conclut par le principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_nB_nC_nD_n$ est un parallélogramme.

b. Par construction et affixes des milieux des segments, si on note a_n, b_n, c_n et d_n les affixes de

A_n, B_n, C_n, D_n, alors il vient $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \dfrac{b_n + c_n}{2}$, $c_{n+1} = \dfrac{c_n + d_n}{2}$ et $d_{n+1} = \dfrac{d_n + a_n}{2}$.

c. Soit, pour tout entier n, $U_n \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tU_n = (a_n\ b_n\ c_n\ d_n)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par des calculs classiques mais longs, on trouve que $\chi_A = X(X-1)(X^2-X+1/2)$. Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \dfrac{1-i}{2}$ et $\lambda_4 = \overline{\lambda_3} = \dfrac{1+i}{2}$. Comme A admet 4 valeurs propres distinctes, A est diagonalisable et les 4 sous-espaces propres : on trouve $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$, $E_0(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$, $E_{\lambda_3}(A) = \mathrm{Vect}(v_3)$ et $E_{\lambda_4}(A) = \mathrm{Vect}(v_4)$ avec $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,1,-1)$, $v_3 = (-i,1,i,-1)$ et $v_4 = (i,1,-i,-1)$. On a par une récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^nU_0$. Si on décompose le vecteur ${}^tU_0 = (a_0, b_0, c_0, d_0) = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \lambda_3v_3 + \lambda_4v_4$, on a $A^nU_0 = \lambda_1^nv_1 + \lambda_2^nv_2 + \lambda_3^nv_3 + \lambda_4^nv_4$. Or, comme $|\lambda_2| < 1$, $|\lambda_3| < 1$ et $|\lambda_4| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_2^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_3^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_4^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = v_1$. Or comme la somme des quatre coefficients des vecteurs v_2, v_3, v_4 est nulle, on a $\lambda_1 = \dfrac{a_0 + b_0 + c_0 + d_0}{4}$.

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \dfrac{a_0 + b_0 + c_0 + d_0}{4}$. La limite du parallélogramme $A_nB_nC_nD_n$ est comme attendu le centre du parallélogramme initial.

6.143 **a.** Si $f \in E$ et $x \in [0;1]$, $t \mapsto \mathrm{Min}(x,t)f(t)$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc $T(f)(x)$ existe : T est bien définie. De plus, la linéarité de T provient de celle de l'intégrale des fonctions continues sur un segment.

On peut montrer la continuité de T par le théorème de continuité sous le signe somme car :

(H_1) $\forall t \in [0;1]$, $x \mapsto \mathrm{Min}(x,t)f(t)$ est continue sur $[0;1]$.

(H_2) $\forall x \in [0;1]$, $t \mapsto \mathrm{Min}(x,t)f(t)$ est continue sur $[0;1]$.

(H_3) Comme f est continue sur le segment $[0;1]$, elle y est bornée donc $||f||_{\infty,[0;1]} = \mathrm{Max}_{t\in[0;1]} |f(t)|$ existe.

Ainsi, $\forall (x,t) \in [0;1]^2$, $|\mathrm{Min}(x,t)f(t)| \leqslant ||f||_{\infty,[0;1]}$ et $t \mapsto ||f||_{\infty,[0;1]}$ est intégrable sur $[0;1]$.

Ainsi, $T(f)$ est continue sur $[0;1]$ par le théorème de continuité sous le signe somme. Mais le théorème de dérivation sous le signe somme ne peut pas s'appliquer car $x \mapsto \mathrm{Min}(x,t)f(t)$ n'est pas dérivable.

Néanmoins, on constate que $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{Min}(x,t)f(t)dt + \int_x^1 \mathrm{Min}(x,t)f(t)dt = \int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 f(t)dt$ et la dérivabilité de $T(f)$ découle du théorème fondamental de l'intégration car f et $t \mapsto tf(t)$ sont continues sur $[0;1]$. Ainsi, comme $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)dt - x\int_1^x f(t)dt$, on a $T(f)'(x) = xf(x) - \displaystyle\int_1^x f(t)dt - xf(x) = -\int_1^x f(t)dt$. On recommence et $T(f)$ est de classe C^2 sur $[0;1]$ avec $T(f)''(x) = -f(x)$ ((f) est même de classe C^4 car f est de classe C^2). Par conséquent, T est un endomorphisme de E.

On remarque que l'aspect C^2 de $T(f)$ a été démontré seulement avec l'hypothèse f continue !!!

b. Soit $f \in \mathrm{Ker}(T)$, alors $T(f) = 0$ donc $T(f)'' = -f = 0$ donc $f = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ donc T est injective et 0 n'est pas valeur propre de T. Soit f un vecteur propre de T, alors il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $T(f) = \lambda f$. On dérive deux fois pour avoir $T(f)'' = \lambda f''$ mais on sait que $T(f)'' = -f$ donc $f'' = -\dfrac{1}{\lambda}f = \beta f$ avec $\beta = -\dfrac{1}{\lambda}$.

c. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et f une solution non nulle de l'équation $y'' = \beta y$ sur $[0;1]$. D'après la question précédente, on a donc $f'' = -\beta T(f)''$. La fonction $f + \beta T(f)$ a ainsi une dérivée seconde nulle sur l'intervalle $[0;1]$ donc elle y est affine. Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in [0;1]$, $f(x) + \beta T(f)(x) = ax + b$. Or $T(f)(0) = 0$ donc $b = f(0)$. On a aussi $T(f)'(1) = 0$ donc $f'(1) = a$. Ainsi, $\forall x \in [0;1]$, $\beta T(f)(x) = -f(x) + f'(1)x + f(0)$ (A).

Analyse : supposons que f est un vecteur propre de T, $\exists\lambda \in \mathbb{R}$, $T(f) = \lambda f$ et, d'après **b.**, $\lambda \neq 0$ et $T(f)'' = \lambda f'' = \lambda\beta f = -f$ donc $\lambda\beta = -1$ car $f \neq 0$. Comme $\forall x \in [0;1]$, $(1+\beta\lambda)f(x) = 0 = f'(1)x + f(0)$ d'après (A), on a $\forall x \in [0;1]$, $f'(1)x + f(0) = 0$ ce qui impose $f(0) = f'(1) = 0$.

Synthèse : supposons que $f(0) = f'(1) = 0$ et $\beta \neq 0$, alors d'après ce qui précède, $\forall x \in [0;1]$, $\beta T(f)(x) = -f(x)$ donc $T(f) = -\dfrac{1}{\beta}f$. Comme f est non nulle, $\lambda = -\dfrac{1}{\beta}$ est valeur propre de T et f est un vecteur propre de T.

Au final, si $f \neq 0$ est solution de $y'' = \beta y$, on a : (f est un vecteur propre de T) $\iff$ ($\beta \neq 0$ et $f(0) = f'(1) = 0$).

d. • Si $\beta > 0$, les solutions de $y'' = \beta y$ sont les $f : x \mapsto Ae^{\sqrt{\beta}x} + Be^{-\sqrt{\beta}x}$ et la condition $f(0) = 0$ impose $A + B = 0$ donc $B = -A$, la condition $f'(1) = 0$ amène $2A\sqrt{\beta}\,\mathrm{ch}\,(\sqrt{\beta}) = 0$ ce qui est montre que $A = B = 0$ et $f = 0$ donc f n'est pas vecteur propre de T. Ainsi, $\mathrm{Sp}(T) \subset \mathbb{R}_+$.

• Si $\beta < 0$, les solutions de $y'' = \beta y$ sont les $f : x \mapsto A\cos(\sqrt{-\beta}x) + B\sin(\sqrt{-\beta}x)$ et la condition $f(0) = 0$ impose $A = 0$, la condition $f'(1) = 0$ amène $B\cos(\sqrt{-\beta}) = 0$. On a deux deux cas :

- • si $\sqrt{-\beta} \not\equiv \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$, alors $\cos(\sqrt{-\beta}) \neq 0$ donc $B = 0$ et f est nulle donc pas un vecteur propre pour T.
- • si $\sqrt{-\beta} \equiv \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$, alors B est quelconque. Posons $\sqrt{-\beta} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$ (car $\sqrt{-\beta} > 0$) de sorte que $\beta = \beta_k = -\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2$. En prenant $B = 1$, la fonction $f_k : x \mapsto \sin(\sqrt{-\beta}\,x) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x\right)$ est vecteur propre de T associée à la valeur propre $\lambda_k = -\dfrac{1}{\beta_k} = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-2}$.

Le spectre de T est $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-2} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}$ et les sous-espaces propres sont les droites $E_{\lambda_k}(T) = \mathrm{Vect}(f_k)$.

6.144 **a.** Comme B et C sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = PCP^{-1}$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{C}$, on a $xI_n - B = xPP^{-1} - PCP^{-1} = P(xI_n - C)P^{-1}$ donc $xI_n - B$ et $xI_n - C$ sont semblables. Si x n'est valeur propre ni de B ni de C, les matrices $xI_n - B$ et $xI_n - C$ sont inversibles par définition donc $(xI_n - B)^{-1}$ et $(xI_n - C)^{-1}$ existent. On prend l'inverse dans la relation $xI_n - B = P(xI_n - C)P^{-1}$ et on obtient $(xI_n - B)^{-1} = P(xI_n - C)^{-1}P^{-1}$ donc $(xI_n - B)^{-1}$ et $(xI_n - C)^{-1}$ sont aussi semblables.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$. On note $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$. Comme A est complexe, χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ donc A est trigonalisable, elle est donc semblable à une matrice triangulaire supérieure T. Comme $\chi_A = \chi_T = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}(A)}$ et que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux, il y a donc $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sur la diagonale de T comptées avec leurs ordres $m_{\lambda_1}(A), \cdots, m_{\lambda_r}(A)$. La matrice $xI_n - T$ étant triangulaire supérieure avec des termes non nuls sur la diagonale, $(xI_n - T)^{-1}$ est aussi triangulaire supérieure avec les inverses des termes diagonaux de $xI_n - T$ sur la diagonale. Ainsi, $(xI_n - A)^{-1}$ étant semblable à $(xI_n - T)^{-1}$, $\mathrm{Tr}\,((xI_n - A)^{-1}) = \mathrm{Tr}\,((xI_n - T)^{-1}) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{m_{\lambda_k}(A)}{x - \lambda_k}$. Or, par dérivée d'un produit de polynômes, on a $\chi_A' = \sum\limits_{k=1}^{r} m_{\lambda_k}(A)(X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}(A)-1} \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{r} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}(A)}$, il vient donc

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A),\ \frac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)} = \sum_{k=1}^{r} m_{\lambda_k}(A)\frac{(x - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}(A)-1}}{(x - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}(A)}} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_{\lambda_k}(A)}{x - \lambda_k} = \mathrm{Tr}\,((xI_n - A)^{-1}).$$

6.145 **a.** On constate que $M^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$. Comme M est diagonalisable, il existe deux matrices $U \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ diagonale telles que $M = UDU^{-1}$, alors $M^2 = UD^2U^{-1}$ donc M^2 est aussi diagonalisable car D^2 est aussi diagonale. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, on a clairement par blocs $P(M^2) = \begin{pmatrix} P(AB) & 0 \\ 0 & P(BA) \end{pmatrix}$. Comme M^2 est diagonalisable, il existe un polynôme annulateur P de M^2 scindé à racines simples, alors $P(AB) = 0$ donc AB est diagonalisable, comme BA d'ailleurs car on a aussi $P(BA) = 0$.

b. On suppose ici AB diagonalisable, il existe donc une matrice $V \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = V\Delta V^{-1}$. Puisque AB est inversible, comme $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$, A et B sont aussi inversibles, ainsi $BA = B(AB)B^{-1}$ donc, BA et AB étant semblables, BA est aussi diagonalisable avec $BA = (BV)\Delta(BV)^{-1}$ ($BV \in GL_n(\mathbb{C})$). Si $W = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & BV \end{pmatrix}$, $W \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ car $\det(W) = \det(V)^2\det(B) \neq 0$ et $W^{-1}M^2W = \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & (BV)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & BV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$ donc M^2 est diagonalisable.

En notant $Sp(M^2) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$, on sait d'après le cours que $P = \prod\limits_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$ est annulateur de M^2 et P est scindé à racines simples. Comme $\det(M^2) = \det(\Delta)^2 = \det(A)^2\det(B)^2 \neq 0$, M^2 est inversible donc $0 \notin Sp(M^2)$. Ainsi, en notant δ_i une racine carrée complexe de λ_i (il en existe), on a $\delta_i \neq 0$ et $P(M^2) = 0 = \prod\limits_{i=1}^{r}(M^2 - \lambda_i I_n) = \prod\limits_{i=1}^{r}(M - \delta_i I_n)(M + \delta_i I_n)$ donc le polynôme $Q = \prod\limits_{i=1}^{r}(X - \delta_i)(X + \delta_i)$ est annulateur de M et il est scindé à racines simples (car $\pm\delta_i = \pm\delta_j \Longrightarrow \delta_i^2 = \lambda_i = \lambda_j = \delta_j^2 \Longrightarrow i = j$) donc M est diagonalisable.

c. On vient de voir par les déterminants à la question **b.** que M est inversible. On peut aussi, pour un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, écrire que $MX = 0 \Longleftrightarrow (AX_2 = BX_1 = 0) \Longleftrightarrow (X_1 = X_2 = 0) \Longleftrightarrow X = 0$ car A et B sont inversibles. Ainsi, $Ker(M) = \{0\}$ ce qui prouve aussi que M est inversible.
On pouvait aussi calculer le rang ou le déterminant de M directement.

6.146 Comme le polynôme $X^n - 1$ annule A par hypothèse et que $X^n - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ (ses racines sont les n racines n-ièmes de l'unité), la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ où z_1, z_2 sont des racines n-ièmes de l'unité car toute valeur propre de A est racine de tout polynôme annulateur de A, notamment $X^n - 1$. Par conséquent, $\mathrm{Tr}\ (A) = \mathrm{Tr}\ (D) = z_1 + z_2$ et $\det(A) = \det(D) = z_1 z_2$. Ainsi, $|\mathrm{Tr}\ (A)| \leqslant |z_1| + |z_2| \leqslant 1 + 1 = 2$ donc $\mathrm{Tr}\ (A) \in [\![-2; 2]\!]$ et $|\det(A)| = |z_1||z_2| = 1$ donc $\det(A) \in \{-1, 1\}$. De plus, puisque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Tr}\ (A) = a + d \in \mathbb{Z}$ et $\det(A) = ad - bc \in \mathbb{Z}$ et on sait d'après le cours que $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\ (A)X + \det(A) \in \mathbb{Z}[X]$. Les valeurs possibles de $\mathrm{Tr}\ (A)$ et $\det(A)$ montrent que $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\ (A)X + \det(A)$ ne peut être que l'un des 10 polynômes suivants : $X^2 - 2X + 1$, $X^2 - X + 1$, $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$, $X^2 + 2X + 1$ ou $X^2 - 2X - 1$, $X^2 - X - 1$, $X^2 - 1$, $X^2 + X - 1$, $X^2 + 2X - 1$.

Éliminons quelques cas ! En effet, si $\det(A) = -1$, $z_1 z_2 = -1$ donc z_1 et z_2 ne peuvent pas être conjugués sinon $z_1 z_2 = z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = 1$. Par conséquent, z_1 et z_2 sont des racines réelles de $X^n - 1$ donc ne peuvent être que ± 1. Pour avoir $z_1 z_2 = -1$, forcément $z_1 = 1 = -z_2$ ou $z_1 = -1 = -z_2$ d'où $\mathrm{Tr}\ (A) = 1 - 1 = 0$. Ainsi, χ_A est l'un des 6 polynômes $X^2 - 2X + 1$, $X^2 - X + 1$, $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$, $X^2 + 2X + 1$, $X^2 - 1$.

<u>Cas 1 : $\chi_A = X^2 - 2X + 1$</u> : comme $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, $Sp(A) = \{1\}$ donc, comme A est diagonalisable, A est donc semblable à la matrice I_2, c'est-à-dire $A = PI_2P^{-1} = I_2$ donc $A^{12} = I_2$.

Cas 2 : $\chi_A = X^2 - X + 1$: comme A est diagonalisable et que $X^2-X+1 = (X+j)(X+j^2)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{-j, -j^2\}$, on a $A = P\begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j^2 \end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^6 = I_2$ car $(-j, -j^2) \in \mathbb{U}_6^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Cas 3 : $\chi_A = X^2 + 1$: comme A est diagonalisable et que $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{-i, i\}$, on a $A = P\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ donc $A^4 = I_2$ car $(-i, i) \in \mathbb{U}_4^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Cas 4 : $\chi_A = X^2 + X + 1$: comme A est diagonalisable et que $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{j, j^2\}$, on a $A = P\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^3 = I_2$ car $(j, j^2) \in \mathbb{U}_3^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Cas 5 : $\chi_A = X^2 + 2X + 1$: comme $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1\}$ donc, comme A est diagonalisable, $A = P(-I_2)P^{-1} = -I_2$ donc $A^2 = I_2$ puis $A^{12} = I_2$.

Cas 6 : $\chi_A = X^2 - 1$: comme $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$ donc, comme A est diagonalisable, $A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^2 = I_2$ car $(-1, 1) \in \mathbb{U}_2^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Fondamentalement, c'est parce les racines de ces 6 polynômes sont $1, -1, i, -i, j, j^2, -j, -j^2$, c'est-à-dire des racines seconde, troisième, quatrième, sixième de l'unité et que ppcm $(2, 3, 4, 6) = 12$, donc toutes ces valeurs $z \in \{1, -1, i, -i, j, j^2, -j, -j^2\}$ vérifient $z^{12} = 1$.

Réciproquement, soit une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que χ_A est l'un des polynômes X^2-X+1, X^2+1, X^2+X+1, $X^2 - 1$, alors comme $X^{12} - 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$, d'après Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A) = 0$ donc, comme χ_A divise $X^{12} - 1$, on a aussi $A^{12} = I_2$.

Par contre, si $\chi_A = (X + 1)^2$ ou $\chi_A = (X - 1)^2$, on ne peut pas être sûr que $A^{12} = I_2$ car A pourrait ne pas être diagonalisable, comme dans les cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6.147 **a.** D'abord, si $f \in E$, $T(f)$ est bien définie sur $[0; 1]$ car les fonctions $t \mapsto tf(t)$ et $t \mapsto (1 - t)f(t)$ sont continues sur le segment $[0; 1]$. D'après le théorème fondamental de l'intégration, $T(f)$ est C^1 sur $[0; 1]$ en tant que somme de produit de fonctions de classe C^1 sur $[0; 1]$. La linéarité de T provient de la linéarité de l'intégrale.

Ainsi, T est bien un endomorphisme de E.

Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $T(f)'(x) = -\int_0^x f(t)dt + (1 - x)xf(x) + \int_x^1 (1 - t)f(t)dt + x(1 - x)f(x)$ donc $T(f)'(x) = -\int_0^x tf(t)dt + \int_x^1 (1 - t)f(t)dt$. On constate que $T(f)$ est à nouveau de classe C^1 par le théorème fondamental de l'intégration et que $T(f)''(x) = -xf(x) - (1 - x)f(x) = -f(x)$.

Soit $f \in \mathrm{Ker}(T)$, alors $T(f) = 0$ donc $T(f)'' = 0$ ce qui montre que $f = 0$ avec le calcul précédent. Ainsi, $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ ce qui prouve l'injectivité de T.

b. Soit λ une valeur propre de T, alors il existe une fonction non nulle $f \in E$ telle que $T(f) = \lambda f$ et on sait que $\lambda \neq 0$ car T est injective. Avec le calcul précédent, en dérivant deux fois, on a $T(f)'' = \lambda f'' = -f$. Ainsi, f est solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E_λ) : $y'' + \frac{1}{\lambda}y = 0$.

Distinguons deux cas :

- Si $\lambda > 0$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in [0; 1]$, $f(x) = a\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) + b\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$. Or l'expression de $T(f)$ montre que $T(f)(0) = T(f)(1) = 0$ ce qui impose $a = 0$ et $b \neq 0$ (sinon f serait nulle) et $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \equiv 0\ [\pi]$

donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{n^2\pi^2}$ et $f(x) = b\sin(nx)$ donc $E_\lambda(T) \subset \text{Vect}(f_n : x \mapsto \sin(nx))$.

- Si $\lambda < 0$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in [0;1],\ f(x) = a\text{ch}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}\Big) + b\text{sh}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}\Big)$. Or les conditions $T(f)(0) = T(f)(1) = 0$ imposent $a = 0$ et $b \neq 0$ (sinon f serait nulle) et $\text{sh}\big(\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}\big) = 0$: absurde.

Réciproquement, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda = \dfrac{1}{n^2\pi^2}$ et $f_n : x \mapsto \sin(n\pi x)$, alors $f_n'' + n^2\pi^2 f_n = 0$ donc $T(f_n)'' = \dfrac{1}{n^2\pi^2}f_n''$. On intègre deux fois sur l'intervalle $[0;1]$ donc $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in [0;1],\ T(f_n)(x) = \dfrac{1}{n^2\pi^2}f_n(x) + \alpha x + \beta$. Mais en prenant $x = 0$ on a $\beta = 0$ car $T(f_n)(0) = \sin(0) = 0$, et en prenant $x = 1$ on a $\alpha = 0$ car $T(f_n)(1) = \sin(n\pi) = 0$. Ainsi, $T(f_n) = \dfrac{1}{n^2\pi^2}f_n$ et $\dfrac{1}{n^2\pi^2}$ est bien une valeur propre de T car $f_n \neq 0$.

Par double inclusion, $\text{Sp}(T) = \Big\{\dfrac{1}{n^2\pi^2}\ \Big|\ n \in \mathbb{N}^*\Big\}$ et $\forall n \geqslant 1,\ E_{1/n^2\pi^2}(T) = \text{Vect}(f_n)$.

6.148 **a.** La linéarité de f provient simplement de la linéarité de la dérivation polynomiale.

- Si $n = 0$, la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}_0[X]$ donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_0[X]$.
- Si $n \geqslant 1$ et si $P = a_nX^n + Q \in \mathbb{R}_n[X]$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $f(P) = f(Q) + na_nX^{n+1} - na_n(X^2-1)X^{n-1}$, $f(P) = f(Q) + na_nX^{n-1}$ et $\deg(f(Q)) \leqslant \text{Max}(\deg(nXQ), \deg((X^2-1)Q')) \leqslant \deg(Q) + 1 = n$: $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Dans tous les cas, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. L'équation s'écrit aussi $(x^2-1)y' + (\lambda - nx)y = 0$ or $\dfrac{\lambda - nX}{X^2-1} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+1}$ avec $a = -\dfrac{n-\lambda}{2}$ et $b = -\dfrac{n+\lambda}{2}$ qu'on obtient par exemple par identification. Comme une primitive de $x \mapsto \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$ est $x \mapsto a\ln(1-x) + b\ln(1+x)$ sur $]-1;1[$, les solutions de (E) : $nxy - (x^2-1)y' = \lambda y$ sur $]-1;1[$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda(1-x)^{-a}(1+x)^{-b} = \lambda(1-x)^{(n-\lambda)/2}(1+x)^{(n+\lambda)/2}$. Ces fonctions sont polynomiales si et seulement si $-a$ et $-b$ sont des entiers naturels ce qui impose $\lambda = n - 2k$ avec $k \in [\![0;n]\!]$ ou si $\lambda = 0$ bien sûr.

c. Ainsi, les polynômes $P_k = (1-X)^k(1+X)^{n-k}$ pour $k \in [\![0;n]\!]$ sont des vecteurs propres de f qui vérifient $f(P_k) = (n-2k)P_k$. Comme ils sont associés à des valeurs propres distinctes, la famille $\mathcal{B} = (P_0, \cdots, P_n)$ est libre donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car elle est composée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs. f est donc diagonalisable et son spectre est $-n, -n+2, \cdots, n-2, n$.

d. Ainsi, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est $D = \text{diag}(-n, -n+2, \cdots, n-2, n)$ donc $\text{Tr}\,(f) = 0$ (somme des valeurs propres) et $\det(f) = \prod\limits_{k=0}^{n}(n-2k) = 0$ si n est pair et $\det(f) = (-1)^{\frac{n+1}{2}}(1.3.\cdots n)^2 = (-1)^{p+1}\Big(\dfrac{(2p+1)!}{2^p p!}\Big)^2$ si $n = 2p+1$ est impair (produit des valeurs propres). De plus, le rang de f est le nombre de valeurs propres non nulles : $\text{rang}\,(f) = n+1$ si n impair et $\text{rang}\,(f) = n$ si n pair.

6.149 **a.** L'inverse de $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ étant $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (calcul facile pour $n = 1$), ceci nous incite à calculer $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & -D \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & -D \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & D \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -D \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$.

b. L'énoncé nous demande d'établir la surjectivité de l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(M) = MB - AM$ qui est visiblement linéaire. φ étant un endomorphisme d'un espace de dimension finie, on sait donc que φ est un automorphisme si et seulement si φ est injective si et seulement si φ est surjective. Le plus simple à montrer est l'injectivité. Soit donc $M \in \text{Ker}(\varphi)$, on a donc $MB = AM$. En multipliant cette relation par B à droite, on a $MB^2 = (AM)B = A(MB) = A(AM) = A^2M$. Soit un entier $k \geqslant 2$ tel que $B^kM = MA^k$, alors $B^{k+1}M = B(B^kM) = B(MA^k) = (BM)A^k = (MA)A^k = MA^{k+1}$ et, par principe de récurrence, on peut conclure que $\forall k \in \mathbb{N},\ B^kM = MA^k$ (clair pour $k = 0$).

Si $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_kX^k \in \mathbb{C}[X]$, $P(B)M = \Big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_kB^k\Big)M = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_kB^kM = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_kMA^k = M\Big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_kA^k\Big) = MP(A)$.

Si on prend $P = \chi_B$, d'après Cayley-Hamilton, on obtient $\chi_B(B)M = 0 = M\chi_B(A)$ Or χ_B est scindé dans $\mathbb{C}$ et ses racines sont les valeurs propres de B d'où $\chi_B = \prod\limits_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{m_{\lambda_k}(B)}$ avec $Sp(B) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ donc $\chi_B(A) = \prod\limits_{k=1}^{r}(A-\lambda_kI_n)^{m_{\lambda_k}(B)}$. Comme les λ_k sont des valeurs propres de B et que $Sp(A)\cap Sp(B) = \emptyset$, les λ_k ne sont pas des valeurs propres de A, les matrices $A-\lambda_kI_n$ sont inversibles ($A-\lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \lambda \in Sp(A)$) donc $\chi_B(A)$ l'est aussi (les matrices inversibles sont stables par multiplication car $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe). Comme $M\chi_B(A) = 0$ et $\chi_B(A)$ est inversible, on en déduit que $M = 0$. Comme $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$, φ est injective. Ainsi, φ est surjective : pour $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unique telle que $\varphi(D) = DB - AD = C$.

c. Soit $(C, D) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, comme $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & D \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & DB-AD \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ avec **a.**, il suffit de choisir, avec la question **b.**, la matrice D telle que $\varphi(D) = DB - D = C$ pour être certain que les matrices $\begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ sont semblables.

d. Comme A et B sont diagonalisables, il existe deux matrices diagonales D et D' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et deux matrices inversibles S et T de $GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = SDS^{-1}$ et $B = TD'T^{-1}$. Ainsi, on peut calculer par blocs et avoir $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0_n \\ 0_n & T \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D & 0_n \\ 0_n & D' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S & 0_n \\ 0_n & T \end{pmatrix}^{-1}$ donc $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice diagonale d'où, par transitivité, $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ l'est aussi d'après la question **c.** donc N est diagonalisable.

Pour $n = 1$ et $N = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, la question précédente montre que N est diagonalisable si $a \neq b$. C'est clair dans ce cas car alors $\chi_N = (X-a)(X-b)$ est scindé à racines simples.

Par contre, si $a = b$, on peut distinguer deux cas :

- si $c = 0$, $N = aI_2$ est diagonale donc diagonalisable.
- si $c \neq 0$, comme $\chi_N = (X-a)^2$, $Sp(N) = \{a\}$ et $X - a$ n'annule pas N puisque $N - aI_2 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc, d'après le cours, N n'est pas diagonalisable.

e. Comme N est triangulaire supérieure par blocs, on a $\chi_N = \chi_A\chi_B$ donc $Sp(N) = Sp(A) \cup Sp(B)$.

• Soit $\lambda \in Sp(A)$ et $(X_1, \cdots, X_r)$ une base de $E_\lambda(A)$. Comme $N\begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X_i \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix}$ pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, le vecteur $V_i = \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ et la famille $(V_1, \cdots, V_r)$ est libre car $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_iV_i = 0 \Longleftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_iX_i = 0$. Ainsi, $\dim(E_\lambda(N)) \geqslant r = \dim(E_\lambda(A))$.

• Soit $\mu \in Sp(B)$ et $(Y_1, \cdots, Y_s)$ une base de $E_\mu(B)$. Cette fois-ci $N\begin{pmatrix} 0 \\ Y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CY_j \\ BY_j \end{pmatrix}$ n'est pas forcément égal à $\begin{pmatrix} 0 \\ \mu Y_j \end{pmatrix}$. On est donc amené à chercher un vecteur $Z_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $W_j = \begin{pmatrix} Z_j \\ Y_j \end{pmatrix} \in E_\mu(B)$. Or, pour tout $j \in [\![1; s]\!]$, on a $NW_j = \begin{pmatrix} AZ_j + CY_j \\ BY_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AZ_j + CY_j \\ \mu Y_j \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} Z_j \\ Y_j \end{pmatrix}$ si et seulement $(A - \mu I_n)Z_j = -CY_j$. Comme $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$ par hypothèse, $A - \mu I_n$ est inversible et on peut prendre $Z_j = -(A - \mu I_n)^{-1}CY_j$.

Le vecteur $W_j = \begin{pmatrix} Z_j \\ Y_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de N associé à la valeur propre μ et la famille $(W_1, \cdots, W_s)$ est libre car $\sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j W_j = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j Y_j = 0$. Ainsi, $\mathrm{dim}(E_\mu(N)) \geqslant s = \mathrm{dim}(E_\mu(B))$.
La somme des dimensions de tous les sous-espaces propres de N est $\sum\limits_{\lambda \in Sp(A)} \mathrm{dim}(\mathbb{E}_\lambda(N)) + \sum\limits_{\mu \in Sp(B)} \mathrm{dim}(\mathbb{E}_\mu(N))$ qu'on peut minorer $\sum\limits_{\lambda \in Sp(A)} \mathrm{dim}(\mathbb{E}_\lambda(N)) + \sum\limits_{\mu \in Sp(B)} \mathrm{dim}(\mathbb{E}_\mu(N)) \geqslant \sum\limits_{\lambda \in Sp(A)} \mathrm{dim}(\mathbb{E}_\lambda(A)) + \sum\limits_{\mu \in Sp(B)} \mathrm{dim}(\mathbb{E}_\mu(B))$.
Mais comme A et B sont diagonalisables, on a $\sum\limits_{\lambda \in Sp(A)} \mathrm{dim}(\mathbb{E}_\lambda(A)) = \sum\limits_{\mu \in Sp(B)} \mathrm{dim}(\mathbb{E}_\mu(B)) = n + n = 2n$.
Ainsi, $\sum\limits_{\lambda \in Sp(A)} \mathrm{dim}(\mathbb{E}_\lambda(N)) + \sum\limits_{\mu \in Sp(B)} \mathrm{dim}(\mathbb{E}_\mu(N)) = 2n$ (on ne peut pas dépasser strictement la dimension de l'espace $\mathbb{C}^{2n}$) ce qui, d'après le cours, justifie que N est bien diagonalisable.
On a donc $P = \prod\limits_{\gamma \in Sp(N)} (X - \gamma) = \prod\limits_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda) \prod\limits_{\mu \in Sp(B)} (X - \mu)$ qui annule N d'après le cours, ce qui n'est pas du tout évident si on fait le calcul matriciel par blocs car on trouve $P(N) = \begin{pmatrix} 0 & C' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et rien ne disait a priori qu'on allait prouver que $C' = 0$.

6.150 **a.** Le polynôme scindé à racines simples (dans $\mathbb{C}[X]$) $P = X^2 - X + 1 = (X + j)(X + j^2)$ est annulateur de A donc la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'après le cours.
On sait que $Sp(A) \subset \{-j, -j^2\}$ donc, comme A est semblable à une matrice diagonale avec des $-j$ et des $-j^2$ sur la diagonale, on a $\det(A) = (-j)^{m_{-j}(A)} \times (-j^2)^{m_{-j^2}(A)}$. Or on sait que $m_{-j}(A) = m_{-j^2}(A)$ car $-j$ et $-j^2$ sont conjugués et que A est réelle. Ainsi, $\det(A) = ((-j) \times (-j^2))^{m_j(A)} = 1^{m_j(A)} = 1$.

b. Comme A est diagonalisable, $n = \omega_{-j}(A) + m_{-j^2}(A) = 2m_{-j}(A)$ donc n est pair. On pouvait aussi dire que $-j$ et $-j^2$ sont des racines troisièmes de -1 et que $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$, on calcule $(A + I_n)(A^2 - A + I_n) = A^3 + I_n = 0$ donc $A^3 = -I_n$. En passant au déterminant, on a donc la relation $\det(A^3) = (\det(A))^3 = (-1)^n = 1$ donc n est pair. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, d'après le cours, $\mathrm{Tr}\,(A) = (-j)m_{-j}(A) + (-j^2)m_{-j^2}(A) = m_{-j}(A)$ car $1 + j + j^2 = 0$. Or $n = 2m_{-j}(A)$ donc $\mathrm{Tr}\,(A) = \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$.

Question de cours : soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. On conjugue et on transpose, et comme A est réelle, cela donne $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, ce qui prouve, comme $\overline{X} \neq 0$, que $\overline{\lambda} \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$. Comme le polynôme χ_A est réel, les ordres de multiplicité de λ et $\overline{\lambda}$ sont les mêmes dans A : $m_\lambda(A) = m_{\overline{\lambda}}(A)$.

6.151 **a.** On calcule aisément $\chi_J(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X^3 - 1$ donc $\chi_J = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc J ne peut pas être diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Par contre, $\chi_J = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

b. $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ est dite circulante et on la décompose $M = aI_3 + bJ + cK$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or il est visible que $K = J^2$ donc $M = aI_3 + bJ + cJ^2$. Mais il existe une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $J = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(1, j, j^2)$ donc $M = P(aI_3 + bD + cD^2)P^{-1} = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = aI_3 + bD + cD^2$ qui est diagonale. Ainsi, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

En ce qui concerne la diagonalisabilité de M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, comme M et Δ sont semblables, on a $\chi_M = \chi_\Delta$. Or $\Delta = \mathrm{diag}(a + b + c, a + bj + cj^2, a + bj^2 + cj)$ donc $\chi_M = (X - a - b - c)(X - a - bj - cj^2)(X - a - bj^2 - cj)$.

Raisonnons par analyse-synthèse :

• Si M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors χ_M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc $a+b+c \in \mathbb{R}$ (ça c'est toujours vrai), mais on a aussi $a+bj+cj^2 \in \mathbb{R}$ et $a+bj^2+cj \in \mathbb{R}$. En effectuant la différence de ces deux derniers réels, on a $(b-c)(j-j^2) \in \mathbb{R}$ et, comme $j-j^2 \notin \mathbb{R}$, cela impose $b-c=0$ donc $b=c$.

• Réciproquement, si $b=c$, la matrice M est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est donc $b=c$.

6.152 **a.** Si $k \in \mathbb{R}$, la matrice A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral. Comme les colonnes 1, 3 et 4 de A sont les mêmes et que les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires, on a rang$(A)=2$ donc , par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A))=4-2=2$ et 0 est valeur propre double de A. Comme on sait que les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles appartiennent à $\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ avec $v_1=e_2$ et $v_2=e_1+ke_2+e_3+e_4$, on cherche les vecteurs propres sous la forme $v=(1,\alpha,1,1)=v_2+(\alpha-k)v_1$ (parce que v_1 n'est pas vecteur propre de A). Ainsi, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $Av=\lambda v \iff (\alpha=\lambda,\ k\alpha+3=\lambda\alpha) \iff (\alpha=\lambda,\ \alpha^2-k\alpha-3=0)$. Les racines de X^2-kX-3 sont $\lambda_1=\dfrac{k+\sqrt{k^2+12}}{2}$ et $\lambda_2=\dfrac{k-\sqrt{k^2+12}}{2}$. D'après l'équivalence précédente, les vecteurs $v_1=(1,\lambda_1,1,1)$ et $v_2=(1,\lambda_2,1,1)$ sont propres pour A respectivement associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2. Par conséquent, $\mathrm{Sp}(A)=\{0,\lambda_1,\lambda_2\}$ et 0 est valeur propre double de Aet comme $\mathrm{Ker}(A)=\mathrm{Vect}(v_3,v_4)$ avec $v_3=(1,0,-1,0)$ et $v_4=(1,0,0,-1)$ par exemple, on a $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\\lambda_1&\lambda_2&0&0\\1&1&-1&0\\1&1&0&-1\end{pmatrix}$. On peut bien sûr choisir $P \in O(4)$, c'est garanti par le théorème spectral, dans ce cas, comme $||v_1||^2=3+\lambda_1^2=6+k\lambda_1$, $||v_2||^2=3+\lambda_2^2=6+k\lambda_2$ et $\mathrm{Ker}(A)=E_0(A)=\mathrm{Vect}(w_3,w_4)$ avec $w_3 \perp w_4$ si $w_3=v_3$ et $w_4=(1,0,1,-2)$ on peut prendre $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{k\lambda_1+6}&\frac{1}{k\lambda_2+6}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{\lambda_1}{k\lambda_1+6}&\frac{\lambda_2}{k\lambda_2+6}&0&0\\\frac{1}{k\lambda_1+6}&\frac{1}{k\lambda_2+6}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{k\lambda_1+6}&\frac{1}{k\lambda_2+6}&0&\frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

b. Si $k \in \mathbb{C}$, on effectue les opérations $C_1 \longleftarrow C_1-C_4$ et $C_3 \longleftarrow C_3-C_4$ dans $\chi_A=\begin{vmatrix}X&-1&0&0\\-1&X-k&-1&-1\\0&-1&X&0\\0&-1&0&X\end{vmatrix}$ et, par linéarité par rapport aux colonnes 1 et 3, on a $\chi_A=X^2\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\0&X-k&0&-1\\0&-1&1&0\\-1&-1&-1&X\end{vmatrix}$ puis, en développant par rapport à la dernière colonne, $\chi_A=X^2\left((-1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&-1&1\\-1&-1&-1\end{vmatrix}+X\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&X-k&0\\0&-1&1\end{vmatrix}\right)$ qui se calcule en $\chi_A=X^2(-3+X(X-k))=X^2(X^2-kX-3)$. Soit $\Delta=k^2+12$ le discriminant de X^2-kX-3 :

• Si $\Delta \neq 0$, alors A a une racine double 0 alors que $E_0(A)=\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 2 avec la formule du rang car rang $(A) = 2$, et A a aussi deux racines simples $\frac{k+\delta}{2}$ et $\frac{k-\delta}{2}$ où δ est une racine carrée de Δ. Comme ces deux nouvelles valeurs propres de A sont distinctes et non nulles, les sous-espaces propres associés sont des droites. Ainsi, A est diagonalisable.

• Si $\Delta = 0$, ce qui équivaut à $k = \pm 2\sqrt{3}\,i$, A admet toujours 0 pour valeur propre double avec $E_0(A)$ qui est un plan. Il y a une autre valeur propre double de A qui est $\frac{k}{2} = \pm\sqrt{3}\,i$. Par exemple si $k = 2\sqrt{3}\,i$, comme $A - \frac{k}{2}I_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\,i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3}\,i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3}\,i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{3}\,i \end{pmatrix}$ est de rang 3 car ses trois premières colonnes forment une famille libre, on a $\dim(E_{k/2}(A)) = 1$ alors que $\frac{k}{2}$ est d'ordre 2, ce qui montre que A n'est pas diagonalisable.

Par conséquent, A est diagonalisable si et seulement si $k \neq \pm 2\sqrt{3}\,i$.

6.153 **a.** Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$, alors $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\,(A)X + \det(A) = X^2 + \det(A)$. Traitons deux cas :

• Si $\det(A) \neq 0$, alors $-\det(A)$ admet deux racines carrées non nulles δ et $-\delta$ donc $\chi_A = (X+\delta)(X-\delta)$ est scindé à racines simples et annulateur de A (par Cayley-Hamilton) donc A est diagonalisable.

• Si $\det(A) = 0$, alors $\chi_A = X^2$ donc $A^2 = 0$ et A est nilpotente d'indice 1 (si $A = 0$) ou 2.

Par conséquent, si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$, A est soit diagonalisable, soit nilpotente.

b. Il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui vérifie bien $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$ et pourtant elle n'est pas nilpotente car $\mathrm{Sp}(A) = \{1, -2\}$ (les matrices nilpotentes sont les matrices qui n'ont que 0 comme valeur propre) et pas diagonalisable non plus car $\dim(E_1(A)) = 1$ alors que 1 est racine double de χ_A.

6.154 **a.** La matrice de $p = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $P = M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Or, après calculs, on trouve $P^2 = P$ donc p est un projecteur. Clairement rang $(P) = 2$ donc p est un projecteur sur le plan $\Pi = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ parallèlement à la droite $D = \mathrm{Ker}(p)$. Comme $P - I_3 = M - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, le plan Π est d'équation $x + y - 2z = 0$. Et il est clair que le vecteur $v_3 = (0,1,1)$ est dans $\mathrm{Ker}(p)$ donc $D = \mathrm{Vect}(v_3)$. Les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$ et $v_2 = (1,-1,0)$ sont dans Π et indépendants donc $\Pi = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de vecteurs propres de p.

b. Comme $f = p + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ et $\mathbb{R}^3 = E_1(p) \oplus E_0(p)$, on a $\mathbb{R}^3 = E_2(f) \oplus E_1(f)$ avec $E_2(f) = E_1(p) = \Pi$ et $E_1(f) = E_0(p) = D = \mathrm{Vect}(v_3)$. Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(2,2,1)$, on a $\chi_f = (X-2)^2(X-1)$.

• Les sous-espaces $\{0_{\mathbb{R}^3}$ et $\mathbb{R}^3$ sont clairement stables par f.

• On sait qu'une droite est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre ; ainsi, les droites stables sont D et toute droite incluse dans Π car les seuls vecteurs propres de f sont dans D et Π.

• Le plan Π est clairement stable par f car c'est un sous-espace propre de f et tout plan de la forme $Q = \mathrm{Vect}(v, v_3)$ avec $v \neq 0 \in \Pi$ est aussi stable par f. Réciproquement, soit Q un plan stable par f, alors l'endomorphisme $g = f_Q$ induit par f dans Q est aussi diagonalisable et χ_g divise $\chi_f = (X-2)^2(X-1)$. On a donc deux possibilités :

- si $\chi_g = (X-2)^2$, alors $\mathrm{Sp}(g) = \{2\}$ donc, comme g est diagonalisable, $Q = E_2(g) \subset E_2(f) = \Pi$. Par inclusion et égalité des dimensions, $Q = \Pi$.

- si $\chi_g = (X-1)(X-2)$, alors $\mathrm{Sp}(g) = \{1,2\}$. Comme g est diagonalisable, $Q = E_1(g) \oplus E_2(g)$ et on sait que $E_1(g) \subset E_1(f) = D$ et $E_2(f) \subset E_2(f) = \Pi$. Or 1 est valeur propre de g donc $E_1(g) = D$ et $E_2(g) = \mathrm{Vect}(v)$ est donc une droite incluse dans $\Pi = E_2(f)$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(v, v_3) \subset Q$. Par inclusion et égalité des dimensions, $Q = \mathrm{Vect}(v, v_3)$.

Par double implication, il y a six types de sous-espaces stables par f :

- Le sous-espace de dimension nulle $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
- La droite $D = \mathrm{Vect}(v_3) = E_1(f) = E_0(p)$.
- Les droites $D' = \mathrm{Vect}(v)$ avec $v \in E_2(f) = E_1(p)$ non nul.
- Le plan $\Pi = E_2(f) = E_1(p)$.
- Les plans $Q = \mathrm{Vect}(v, v_3)$ avec $v \neq 0 \in \Pi = E_2(f) = E_1(p)$.
- L'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 en entier.

6.155 **a.** Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, on sait que $\omega^5 - 1 = (\omega-1)(\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1) = 0$ donc $\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1 = 0$ (la somme des cinq racines cinquièmes de l'unité est nulle). En prenant les parties réelles, puisque $\omega^4 = \overline{\omega}$ et $\omega^3 = \overline{\omega^2}$, on obtient la relation $2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1 = 0$. Or $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$ donc $2(2a^2-1) + 2a + 1 = 0$ ce qui se simplifie en $4a^2 + 2a - 1 = 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (2\sqrt{5})^2$ donc $a = \dfrac{-2+\pm 2\sqrt{5}}{8}$. Mais comme $a > 0$ car $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, on a donc $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. De plus, $b = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2a^2 - 1 = \dfrac{(5+1-2\sqrt{5})-8}{8} = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

b. Le polynôme $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ annule A et il est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ car on a $P = (X-\omega)(X-\omega^2)(X-\omega^3)(X-\omega^4)$. Ainsi, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais comme A est réelle, l'ordre de multiplicité p de ω et le même que celui de $\omega^4 = \overline{\omega}$, et l'ordre q de ω^2 est le même que celui de $\omega^3 = \overline{\omega^2}$. Puisque χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$, on a $\mathrm{Tr}\,(A) = p(\omega+\omega^4) + q(\omega^2+\omega^3) = 2p\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2q\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ d'où $\mathrm{Tr}\,(A) = \dfrac{p-q}{2}\sqrt{5} - \dfrac{p+q}{2}$. Si $\mathrm{Tr}\,(A) \in \mathbb{Q}$, comme $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, on a nécessairement (par l'absurde) $\dfrac{p-q}{2} = 0$ donc $p = q$. Ainsi, $n = p+p+q+q = 4p$ est un multiple de 4.

c. Pour $n = 4$, en posant $c = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $d = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, on peut utiliser les matrices de rotations (d'angle $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$ respectivement) du plan pour construire $A_4 = \begin{pmatrix} a & -c & 0 & 0 \\ c & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -d \\ 0 & 0 & d & b \end{pmatrix}$ pour avoir le résultat. On a bien $A_4^5 = I_4$ (si on fait 5 fois des rotations d'angle $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$ on obtient bien l'identité), puis en factorisant $A_4^5 - I_4 = (A_4^4 + A_4^3 + A_4^2 + A_4 + I_n)(A_4 - I_4)$ et $A_4 - I_4$ est inversible car 1 n'est pas valeur propre de ces rotations d'où $A_4^4 + A_4^3 + A_4^2 + A_4 + I_n = 0$. De plus, $\mathrm{Tr}\,(A) = 2a + 2b = -1 \in \mathbb{Q}$ d'après la question **a.**.

Pour $n = 4p$ avec $p \geqslant 2$, $A = \mathrm{diag}(A_4, \cdots, A_4)$ (avec p blocs) convient puisque $\mathrm{Tr}\,(A) = -p \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

6.156 **a.** Un calcul rapide montre que $\chi_A = (X-1)^2(X-2)^2$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1,2\}$. On sait que A est diagonalisable si et seulement si $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des plans ou encore si et seulement si $(X-1)(X-2)$ annule A.

Comme $A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'après le théorème du rang : $\dim(E_1(A)) = 2 \Longleftrightarrow \text{rang}\,(A - I_4) = 2$.

Avec $C_2 \longleftarrow C_2 + C_3 - C_4$, $\text{rang}\,(A - I_4) = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & a+b-c & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\dim(E_1(A)) = 2 \Longleftrightarrow a+b-c = 0$.

Comme $A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\dim(E_2(A)) = 2$ car $\text{rang}\,(A - 2I_4) = 2$ pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Ainsi, A est diagonalisable si et seulement si $a + b - c = 0$. Ce qu'on suppose dans la suite.

On pouvait aussi calculer $(A - I_4)(A - 2I_4) = \begin{pmatrix} 0 & -a-b+c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec la même conclusion.

b. Le polynôme $P = (X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$ est donc annulateur de A donc $I_4 = 0.A + 1.I_4$, $A = 1.A + 0.I_4$ et $A^2 = 3.A - 2.I_4$ ce qui donne déjà $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 3$, $\beta_3 = -2$.

On effectue la division euclidienne de X^n par P ce qui donne l'existence et l'unicité de $R_n = \alpha_n X + \beta_n \in \mathbb{R}_1[X]$ de degré inférieur à $1 = \deg(P) - 1$ tel que $X^n = Q_n P + R_n$. En substituant 1 à X, on trouve $1 = \alpha_n + \beta_n$ car $P(1) = 0$, et si on remplace X par 2, on trouve $2^n = 2\alpha_n + \beta_n$ car $P(2) = 0$. Ainsi, $\alpha_n = 2^n - 1$ et $\beta_n = 2 - 2^n$ ce qui montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_4$ puisque $P(A) = 0$.

6.157 $(\Longrightarrow)$ Supposons A diagonalisable et traitons deux cas :

• Soit A n'admet qu'une seule valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $A = P(\lambda I_2)P^{-1}$ avec P inversible donc $A = \lambda I_2$. Soit Q un polynôme complexe non constant. D'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, le polynôme $Q - \lambda$ admet une racine complexe puisqu'il n'est pas constant. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Q(\alpha) = \lambda$. Il suffit de prendre $M = \alpha I_2$ pour avoir $Q(M) = Q(\alpha)I_2 = \lambda I_2 = A$.

• Soit A admet deux valeurs propres complexes $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, il existe une matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Soit Q un polynôme complexe non constant, comme ci-dessus il existe des complexes α_1 et α_2 tels que $Q(\alpha_1) = \lambda_1$ et $Q(\alpha_2) = \lambda_2$ (autrement dit $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective). Il suffit de prendre $M = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ pour avoir $Q(M) = P \begin{pmatrix} Q(\alpha_1) & 0 \\ 0 & Q(\alpha_2) \end{pmatrix} P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

$(\Longleftarrow)$ Supposons A non diagonalisable, alors χ_A ne peut pas être scindé à racines simples donc $\text{Sp}(A) = \{\lambda\}$, $\chi_A = (X - \lambda)^2$ et $\dim(E_\lambda(A)) = 1$. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ A est trigonalisable donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$.

Pour réduire "à la JORDAN" et avoir 1 à la place de μ : si on note $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a donc par CAYLEY-HAMILTON $(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^2})^2 = 0$ donc $\text{Im}\,(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^2}) \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^2})$. Puisque $\dim(E_\lambda(A)) = 1$, par le théorème du rang, on a $\dim(\text{Im}\,(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^2})) = \dim(\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^2})) = 1$ donc $\text{Im}\,(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^2}) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^2})$. Si on prend $v_1 \in \mathbb{C}^2$ tel que $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^2}) = \text{Vect}(v_1)$, alors il existe donc $v_2 \in \mathbb{C}^2$ tel que $(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^2})(v_2) = v_1$. Comme $v_2 \notin \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^2})$, la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est libre donc c'est une base de $\mathbb{C}^2$. Par construction, comme $u(v_1) = \lambda v_1$ et $u(v_2) - \lambda v_2 = v_1$, il vient

$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à $\mathcal{B}$, on a par la formule de changement bases : $A = PTP^{-1}$.

Prenons le polynôme non constant $Q = X^2 + \lambda$ et supposons l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $Q(M) = A$. Posons $N = P^{-1}MP$ de sorte que $M = PNP^{-1}$. On a la suite suivante d'équivalences : $Q(M) = M^2 + \lambda I_2 = A \Longleftrightarrow P(N^2 + \lambda I_2)P^{-1} = PTP^{-1} \Longleftrightarrow N^2 + \lambda I_2 = A \Longleftrightarrow N^2 = \mu E_{2,1}$. Comme $E_{2,1}^2 = 0$, on a $N^4 = 0$ donc N est nilpotente. Or, il est classique que $\chi_N = X^2$ (seul 0 est valeur propre de N) donc $N^2 = 0$ par Cayley-Hamilton. Ceci impose donc $E_{2,1} = 0$ qui est absurde.

Par double implication : A diagonalisable $\Longleftrightarrow (\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X],\ \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ Q(M) = A)$.

6.158 **a.** Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue, alors $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est de classe C^1 sur $[0;1]$: c'est la primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi $\varphi(f) = g$ est de classe C^1 (donc continue) sur $]0;1]$. De plus, par les taux d'accroissements, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = F'(0) = f(0) = g(0)$ donc g est aussi continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ et φ est bien l'endomorphisme espéré car la linéarité provient de celle de l'intégrale.

b. • φ ne peut pas être surjectif car l'image de φ est incluse dans l'espace des fonctions continues sur $[0;1]$ mais de classe C^1 sur $]0;1]$ et il existe des fonctions continues sur $[0;1]$ qui ne sont pas de classe C^1 sur $]0;1]$: par exemple la fonction $x \mapsto |1 - 2x|$ qui n'est pas dérivable en $\dfrac{1}{2}$.

• Soit $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $\forall x > 0, \varphi(f)(x) = 0 \Longrightarrow F(x) = 0$. Ainsi F s'annule sur $]0;1]$ donc sur $[0;1]$ par continuité de F en 0. Mais comme $F' = f$, $f = 0' = 0$. Ainsi φ est injective car $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et $0 \notin \mathrm{Sp}(\varphi)$.

c. Si on prend la fonction constante $f = 1$, on constate facilement que $\varphi(1) = 1$ donc $1 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$. De plus, soit $f \in E$ telle que $\varphi(f) = f$. Alors $\forall x \in [0;1]$, $xf(x) = \int_0^x f(t)dt = F(x)$ ce qui donne en dérivant $xf'(x) + f(x) = f(x)$ donc $\forall x \in]0;1]$, $f'(x) = 0$. Ainsi, f constante sur l'intervalle $]0;1]$ donc sur $[0;1]$ par continuité en 0 et on conclut que $E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}(1)$ (fonctions constantes).

d. <u>Analyse</u> : soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ telle que $\lambda \neq 1$. Comme 0 n'est pas valeur propre de φ, $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et $\varphi(f) = \lambda f$ avec $f \in E$ non nulle. En dérivant la relation $\varphi(f) = \lambda f$ ou encore $F(x) = \lambda x f(x)$ si $x \in]0;1]$, $f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x)$ donc f est solution sur $]0;1]$ de l'équation (E_λ) : $\lambda x y' + (\lambda - 1)y = 0$. On sait qu'alors $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in]0;1],\ f(x) = \alpha x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ et la continuité de f en 0 impose (car $\alpha \neq 0$) $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geqslant 0$ donc $\lambda \in]0;1[$.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, soit $\lambda \in]0;1[$ et $f_\lambda : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in]0;1],\ f_\lambda(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ et $f_\lambda(0) = 0$. Alors f_λ est continue sur $[0;1]$ car $\beta = \dfrac{1-\lambda}{\lambda} > 0$ donc $f_\lambda \in E$ et $\forall x \in]0;1],\ \varphi(f_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f_\lambda(t)dt$ donc $\varphi(f_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{t^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_0^x = \dfrac{x^\beta}{\beta+1} = \lambda f_\lambda(x)$ d'où $\varphi(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ donc λ est valeur propre de φ car $f_\lambda \neq 0$.

On en conclut que le spectre de φ vaut $\mathrm{Sp}(\varphi) =]0;1]$.

6.159 **a.** Si U est semblable à V, il existe une inversible P telle que $U = PVP^{-1}$. Par une récurrence simple, $\forall k \in \mathbb{N},\ U^k = PV^kP^{-1}$. Posons $R = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} r_k X^k$, alors $R(U) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} r_k U^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} r_k P V^k P^{-1} = PR(V)P^{-1}$ donc $R(U)$ est semblable à $R(V)$.

b. Comme $AB = BA$, $M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2AB \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$. Par une récurrence simple et des calculs par blocs, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$. Si $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$, alors $P(M) = p_0 I_{2n} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$ donc

$$P(M)=p_0I_{2n}+\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}p_kA^k & \sum\limits_{k=1}^{+\infty}kp_kA^{k-1}B\\ 0 & \sum\limits_{k=1}^{+\infty}p_kA^k\end{pmatrix}\text{ donc }P(M)=\begin{pmatrix}P(A) & P'(A)B\\ 0 & P(A)\end{pmatrix}.$$

c. Si A est diagonalisable et $B=0$, soit P un polynôme scindé à racines simples qui annule A, alors d'après la question précédente il annule aussi M donc M est aussi diagonalisable. On aurait aussi pu écrire que $A=PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale donc, en notant $Q=\begin{pmatrix}P & 0\\ 0 & P\end{pmatrix}$ et $\Delta=\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}$, on a $Q^{-1}=\begin{pmatrix}P^{-1} & 0\\ 0 & P^{-1}\end{pmatrix}$ donc $M=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}PDP^{-1} & 0\\ 0 & PDP^{-1}\end{pmatrix}=Q\Delta Q^{-1}$ et Δ est diagonale.

d. Supposons M diagonalisable. Comme $\chi_M=(\chi_A)^2$, les spectres de A et de M sont les mêmes. Si on pose $P=\prod\limits_{\lambda\in Sp(M)}(X-\lambda)$, on sait que $P(M)=0$ donc $P(A)=P'(A)B=0$ d'après la question **b.**. Écrivons $P'=\deg(P)\prod\limits_{i=1}^{s}(X-\mu_i)^{m_i}$, les μ_i ne peuvent pas être dans $Sp(A)$ car P n'a que des racines simples. Ainsi, les matrices $A-\mu_iI_n$ sont inversibles et, par produit, la matrice $P'(A)=\lambda\prod\limits_{i=1}^{s}(A-\mu_iI_n)^{m_i}$ est aussi inversible d'où $B=0$. Enfin, les polynômes annulateurs de M étant ceux de A car $P(M)=\begin{pmatrix}P(A) & 0\\ 0 & P(A)\end{pmatrix}$, A est diagonalisable car M l'est. On a l'équivalence : (A est diagonalisable et B nulle) $\Longleftrightarrow$ M est diagonalisable.

6.160 **a.** Pour $n\geqslant 3$, en développant $\det(M_n(x))$ par rapport à la dernière ligne (par exemple), on obtient $\det(M_n(x))=x\det(M_{n-1}(x))-\begin{vmatrix}x & 1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & x & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & x & 1\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$. On développe ce dernier déterminant selon sa dernière colonne d'où $\det(M_n(x))=x\det(M_{n-1}(x))-\det(M_{n-2}(x))$, donc on a $a=x$ et $b=-1$.

b. Ainsi, $\Delta_n=2\cos(\theta)\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2}$. Or $\Delta_1=2\cos(\theta)$ et $\Delta_2=\begin{vmatrix}2\cos(\theta) & 1\\ 1 & 2\cos(\theta)\end{vmatrix}=4\cos^2(\theta)-1$. Or $\sin(3\theta)=\sin(\theta+2\theta)=\sin(\theta)\cos(2\theta)+\sin(2\theta)\cos(\theta)=\sin(\theta)\big(2\cos^2\theta-1\big)+2\sin(\theta)\cos^2(\theta)$ donc, en factorisant, on obtient $\sin(3\theta)=\sin(\theta)\big(4\cos^2(\theta)-1)$ et, puisque $\theta\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ d'où $\sin(\theta)\neq 0$, il vient $\Delta_2=\dfrac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}$. Soit $n\geqslant 3$ tel que $\Delta_{n-2}=\dfrac{\sin\big((n-1)\theta\big)}{\sin(\theta)}$ et $\Delta_{n-1}=\dfrac{\sin\big(n\theta\big)}{\sin(\theta)}$, d'après la relation précédente, $\Delta_n=2\cos(\theta)\dfrac{\sin\big(n\theta\big)}{\sin(\theta)}-\dfrac{\sin\big((n-1)\theta\big)}{\sin(\theta)}=\dfrac{2\cos(\theta)\sin(n\theta)-\sin(n-1)\theta)}{\sin(\theta)}$. Or, en écrivant $\sin((n+1)\theta))+\sin((n-1)\theta))=\sin(n\theta+\theta)+\sin(n\theta-\theta)$ puisque $\sin(n\theta+\theta)=\sin(\theta)\cos(n\theta)+\cos(\theta)\sin(n\theta)$ et $\sin(n\theta-\theta)=\sin(\theta)\cos(n\theta)-\cos(\theta)\sin(n\theta)$, on arrive à $\sin((n+1)\theta))+\sin((n-1)\theta))=2\sin(\theta)\cos(n\theta)$ ce qui montre bien que $\Delta_n=\dfrac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin(\theta)}$. Par principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Delta_n=\dfrac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin(\theta)}$.

c. $M_n(x)$ est symétrique réelle, le théorème spectral permet de conclure que $M_n(x)$ est diagonalisable.

d. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, λ est valeur propre de $M_n(x)$ si et seulement si $\lambda I_n-M_n(x)=-M_n(x-\lambda)$ n'est pas inversible, c'est-à-dire si et seulement si $\chi_{M_n(x)}(\lambda)=(-1)^n\det(M_n(x-\lambda))=0$. Or la question **b.** permet le calcul exact des déterminants des matrices $M_n(y)$ si $y\in]-2;2[$ car $\theta\mapsto 2\cos(\theta)$ est surjective de $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ dans $]-2;2[$. Pour rendre cette application injective aussi, on va se restreindre à $\theta\in]0;\pi[$. Alors $\Delta_n=0\Longleftrightarrow\sin((n+1)\theta)=0\Longleftrightarrow(n+1)\theta\equiv 0\ [\pi]\Longleftrightarrow(\exists k\in[\![1;n]\!],\ (n+1)\theta=k\pi)$. Par conséquent, les réels

$\lambda_k = x - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ sont des valeurs propres de $M_n(x)$ pour $k \in [\![1;n]\!]$ car $\chi_{M_n(x)}\left(\lambda_k\right) = (-1)^n\Delta_n = 0$ si on prend $\theta = \theta_k = \frac{k\pi}{n+1} \not\equiv 0\ [\pi]$. Les $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ sont toutes distinctes et toutes valeurs propres de $M_n(x)$, comme $M_n(x)$ est de taille n, on a trouvé toutes les valeurs propres de $M_n(x)$.

6.161 **a.** Si u est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = D$ est diagonale. Comme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2) = D^2$ est diagonale, $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de u^2 qui est donc diagonalisable.

b. • Si $n = 1$, tout endomorphisme de $\mathbb{C}$ étant une homothétie, u et u^2 sont diagonalisables. Ainsi, dans ce cas particulier, u^2 diagonalisable $\Longrightarrow$ u diagonalisable.

• Si $n \geqslant 2$, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $\text{Mat}_{can}(u) = E_{1,2}$, alors $A^2 = 0$ donc $u^2 = 0$ est diagonalisable alors que $\chi_u = \chi_A = X^n$ puisque A est nilpotente. Si u était diagonalisable, comme 0 est d'ordre algébrique n, on aurait aussi $\dim(E_0(u)) = \dim(\text{Ker}(u)) = n$ et $u = 0$ ce qui est faux. Ainsi, u n'est pas diagonalisable.

Dès que $n \geqslant 2$, on n'a donc plus forcément u diagonalisable si u^2 l'est.

c. • Si $x \in \text{Ker}(u - \lambda\text{id}_{\mathbb{C}^n}) + \text{Ker}(u + \lambda\text{id}_{\mathbb{C}^n})$, alors $\exists (y,z) \in \text{Ker}(u - \lambda\text{id}_{\mathbb{C}^n}) \times \text{Ker}(u + \lambda\text{id}_{\mathbb{C}^n})$, $x = y + z$ donc $u^2(x) = u^2(y) + u^2(z)$. Or $u(y) = \lambda y$ donc $u^2(y) = u(\lambda y) = \lambda u(y) = \lambda^2 y$ et $u(z) = -\lambda z$ donc $u^2(z) = u(-\lambda z) = -\lambda u(z) = (-\lambda)^2 y = \lambda^2 z$ d'où $u^2(x) = \lambda^2(y+z) = \lambda^2 x$ et on a bien $x \in \text{Ker}(u^2 - \lambda^2\text{id}_{\mathbb{C}^n})$.
On a bien établi l'inclusion $\text{Ker}(u - \lambda\text{id}_{\mathbb{C}^n}) + \text{Ker}(u + \lambda\text{id}_{\mathbb{C}^n}) \subset \text{Ker}(u^2 - \lambda^2\text{id}_{\mathbb{C}^n})$.
• Si $x \in \text{Ker}(u^2 - \lambda^2\text{id}_{\mathbb{C}^n})$, $x = y + z$ (1) avec $(y,z) \in \text{Ker}(u - \lambda\text{id}_{\mathbb{C}^n}) \times \text{Ker}(u + \lambda\text{id}_{\mathbb{C}^n})$, on a donc $u(x) = \lambda y - \lambda z$ (2) donc $y = \frac{u(x) + \lambda x}{2\lambda}$ et $z = \frac{\lambda x - u(x)}{2\lambda}$ en combinant les deux équations (1) et (2) puisque $\lambda \neq 0$. Réciproquement, si on pose $y = \frac{u(x) + \lambda x}{2\lambda}$ et $z = \frac{\lambda x - u(x)}{2\lambda}$, on a la relation $x = y + z$ et $u(y) = \frac{u^2(x) + \lambda u(x)}{2\lambda} = \frac{\lambda^2 x + \lambda u(x)}{2\lambda} = \lambda y$ et, de même $u(z) = -\lambda z$. On vient de prouver l'inclusion $\text{Ker}(u^2 - \lambda^2\text{id}_{\mathbb{C}^n}) \subset \text{Ker}(u - \lambda\text{id}_{\mathbb{C}^n}) + \text{Ker}(u + \lambda\text{id}_{\mathbb{C}^n})$.

Pour cette dernière inclusion, on aurait pu dire que $X^2 - \lambda^2 = (X - \lambda)(X + \lambda)$ était un polynôme annulateur scindé à racines simples de l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u dans $E_{\lambda^2}(u^2)$ donc que $E_{\lambda^2}(u^2) = E_\lambda(\tilde{u}) \oplus E_{-\lambda}(\tilde{u})$ et on conclut car $E_\lambda(\tilde{u}) = E_\lambda(u)$ puisque $E_\lambda(u) \subset E_{\lambda^2}(u^2)$ et $E_{-\lambda}(\tilde{u}) = E_{-\lambda}(u)$ puisque $E_{-\lambda}(u) \subset E_{\lambda^2}(u^2)$ d'après la première inclusion.
Par double inclusion, on a donc $\text{Ker}(u^2 - \lambda^2\text{id}_{\mathbb{C}^n}) = \text{Ker}(u - \lambda\text{id}_{\mathbb{C}^n}) \oplus \text{Ker}(u + \lambda\text{id}_{\mathbb{C}^n})$ puisque les deux sous-espaces propres sont en somme directe car $\lambda \neq -\lambda$.

d. <u>Méthode 1</u> : si u^2 est diagonalisable, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u^2, elles sont non nulles car u^2 est inversible. Par définition, $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{r} \text{Ker}(u^2 - \lambda_k\text{id}_{\mathbb{C}^n})$. D'après la question précédente, on a donc $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{r} \text{Ker}(u - \delta_k\text{id}_{\mathbb{C}^n}) \oplus \text{Ker}(u + \delta_k\text{id}_{\mathbb{C}^n})$ en notant δ_k une racine carrée complexe de λ_k.
Comme $\mathbb{C}^n$ est la somme directe de sous-espaces propres associés à u, par définition, u est diagonalisable.
<u>Méthode 2</u> : si u^2 est diagonalisable et u inversible, alors $\text{Ker}(u) = \{0\}$ donc $0 \notin \text{Sp}(A)$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u^2 (non nulles car u^2 est aussi inversible). On sait que $P = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)$ est annulateur de A^2 d'où $P(A^2) = \prod_{k=1}^{r}(A^2 - \lambda_k I_n) = 0$. Notons, pour $k \in [\![1;r]\!]$, δ_k une racine carrée (complexe)

de λ_k, alors $\prod_{k=1}^{r}(A^2-\lambda_k I_n)=\prod_{k=1}^{r}(A-\delta_k I_n)(A+\delta_k I_n)=0$ donc le polynôme $Q=\prod_{k=1}^{r}(X-\delta_k)(X+\delta_k)$ est annulateur de A. De plus, $\forall k\in[\![1;r]\!]$, $\delta_k\neq-\delta_k$ car $\lambda_k=\delta_k^2\neq 0$ et $\forall (i,j)\in[\![1;r]\!]^2$ avec $i\neq j$, $\pm\delta_i\neq\pm\delta_j$ car $\lambda_i=\delta_i^2\neq\delta_j^2=\lambda_j$. Ainsi, Q annule A et est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

6.162 **a.** Comme la somme des éléments de chaque ligne vaut 1, si on pose $U\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tU=(1,1,\cdots,1)$, alors $AU=U$ donc 1 est valeur propre de A car $U\neq 0$.

b. Si on considère la k-ième ligne de l'égalité $AX=X$, on trouve $\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}x_j=\lambda x_k$. Par inégalité triangulaire, on a $|\lambda x_k|=|\lambda||x_k|=\Big|\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}x_j\Big|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{k,j}||x_j|\leqslant\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}\Big)|x_k|=|x_k|$ dont on déduit $|\lambda|\leqslant 1$ car $|x_k|>0$.

Si on reprend l'égalité de la question **b.** qu'on écrit maintenant $(a_{k,k}-\lambda)x_k=\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_{k,j}x_j$, on ré-utilise l'inégalité triangulaire pour avoir $|(a_{k,k}-\lambda)x_k|=|a_{k,k}-\lambda|\,|x_k|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}|a_{k,j}|\,|x_j|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}|a_{k,j}|\,|x_k|$ et, en divisant à nouveau par $|x_k|>0$, on obtient bien la majoration $|a_{k,k}-\lambda|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}|a_{k,j}|$ qui localise la valeur propre λ dans le disque fermé $D(a_{k,k},r_k)$ de centre $a_{k,k}$ de rayon $r_k=\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}|a_{k,j}|$. Et, puisqu'on ne connaît pas k a priori, on vient de montrer que $Sp_{\mathbb{C}}(A)\subset\bigcup_{k=1}^{n}D(a_{k,k},r_k)$ (théorème de GERSCHGORIN).

c. On suppose maintenant que $|\lambda|=1$. Reprenons encore l'égalité $\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}x_j=\lambda x_k$ avec $k\in[\![1;n]\!]$ l'un des indices tel que $|x_k|=\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}}|x_i|$. Alors $|\lambda x_k|=|x_k|=\Big|\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}x_j\Big|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{k,j}||x_j|\leqslant\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}\Big)|x_k|=|x_k|$. On a donc égalité dans cette inégalité triangulaire $\Big|\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}x_j\Big|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{k,j}||x_j|$, ce qui montre que les complexes $a_{k,1}x_1,\cdots,a_{k,n}x_n$ sont positivement liés donc, comme les $a_{k,j}$ sont strictement positifs, montre que $x_1,\cdots,x_n$ sont positivement liés. Mais on a aussi égalité dans l'inégalité $\sum_{j=1}^{n}|a_{k,j}||x_j|\leqslant\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}\Big)|x_k|$ et ceci implique que les $|x_1|,\cdots,|x_n|$ sont tous égaux (toujours car les $a_{k,j}$ sont strictement positifs). Ainsi, on conclut que $x_1=\cdots=x_n$ donc que le vecteur X est proportionnel au vecteur U de **a.**. On conclut bien que $\lambda=1$.

6.163 **a.** Soit $\lambda\in Sp(M)$ et $P=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$ un polynôme annulateur de M. Il existe $X\neq 0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX=\lambda X$. On montre par une récurrence simple que $\forall k\in\mathbb{N}$, $M^kX=\lambda^kX$. Ainsi, on peut calculer $0=P(M)X=\sum_{k=0}^{d}a_kM^kX=\sum_{k=0}^{d}a_k\lambda^kX=P(\lambda)X=0$. Comme $X\neq 0$, on a forcément $P(\lambda)=0$.

On a re-démontré une propriété du cours : les valeurs propres de M sont des racines de P annulateur de M.

b. Si M est symétrique, $M^2+M-I_n=0$ donc $P=X^2+X-1$ annule M. Or $P=(X-\alpha)(X-\beta)$ avec $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ donc P est scindé à racines simples d'où, par théorème, M est diagonalisable. D'après la question **a.**, on a $Sp(M)\subset\{\alpha,\beta\}$. Comme χ_M est scindé car M est diagonalisable, on a donc $\chi_M=(X-\alpha)^p(X-\beta)^q$ avec $p=m_\alpha(M)$ et $q=m_\beta(M)$ et, d'après le cours, on a $\mathrm{Tr}\,(M)=p\alpha+q\beta$ et $\det(M)=\alpha^p\beta^q$. Comme 0 n'est pas valeur propre de M, M est inversible.

De plus, $2\mathrm{Tr}\,(M)=-p-q+(p-q)\sqrt{5}=-n+(p-q)\sqrt{5}$. Comme $n>0$, si on avait $\mathrm{Tr}\,(M)=0$, on aurait

$p-q \neq 0$ et $\sqrt{5} = \dfrac{n}{p-q}$, ce qui montrerait que $\sqrt{5}$ est un rationnel : NON !

Par conséquent, $\mathrm{Tr}\ (M) \neq 0$ et $\det(M) \neq 0$ donc $\mathrm{Tr}\ (M) \times \det(M) \neq 0$.

c. Si on ne suppose plus M symétrique, on cherche un polynôme annulateur de degré supérieur. En transposant, on obtient $({}^tM)^2 + M = I_n$ donc $(I_n - M^2)^2 + M - I_n = M^4 - 2M^2 + M = 0$ et $Q = X^4 - 2X^2 + X$ annule M. Or $Q = X(X-1)(X^2+X-1) = X(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)$ qui est à nouveau scindé à racines simples. Ainsi M est encore diagonalisable.

d. Puisque $({}^tM)^2 = I_n - M$, en passant au déterminant, on a $\det({}^t(M^2)) = \det(M)^2 = \det(I_n - M) = \chi_M(1)$. Ainsi, $\det(M) \neq 0 \iff \chi_M(1) \neq 0 \iff$ (1 n'est pas valeur propre de M).

Ou encore, M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

6.164 **a.** Comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, χ_f est de degré 3 donc, par le théorème des valeurs intermédiaires par exemple puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \chi_f(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} \chi_f(t) = -\infty$, χ_f admet au moins une racine réelle donc f admet au moins une valeur propre réelle. D'après l'énoncé, $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ est annulateur de f donc, d'après le cours, le spectre de f est inclus dans $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$. On conclut ces deux arguments en affirmant que 1 est forcément valeur propre de f. On peut même conclure que $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$ car f est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
b. Posons $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $G = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ pour simplifier. Il s'agit de montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. Soit $x \in E$, si $x = y + z$ avec $x \in F$ et $z \in G$, on a $f(x) = f(y) + f(z) = x + f(z)$ et $f^2(x) = f^2(y) + f^2(z) = y + f^2(z)$. On somme ces trois relations pour avoir $x + f(x) + f^2(x) = 3y + (z + f(z) + f^2(z)) = 3y$ car $z \in G$. Ainsi, $y = \dfrac{x + f(x) + f^2(x)}{3}$ et $z = x - y$. Voici pour l'unicité de la décomposition. Réciproquement, si on pose $y = \dfrac{x + f(x) + f^2(x)}{3}$ et $z = x - y$, alors $x = y + z$, $f(y) = \dfrac{f(x) + f^2(x) + f^3(x)}{3} = \dfrac{f(x) + f^2(x) + x}{3} = y$ car $f^3 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ donc $y \in F$. De plus, $z + f(z) + f^2(z) = x - y + f(x) - f(y) + f^2(x) - f^2(y) = x + f(x) + f^2(x) - 3y$ donc $z + f(z) + f^2(z) = 3y - 3y = 0_E$ par définition de y. Voici pour l'existence.

On a bien établi que $E = F \oplus G$.

c. On cherche donc une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle $f(v_1) = v_3$, $f(v_2) = v_1$ et $f(v_3) = v_2$. Soit $a \neq 0_E \in F$ et $b \neq 0_E \in G$, on pose $v_1 = a + b$, $v_3 = f(v_1) = a + f(b)$ et $v_2 = f(v_3) = a + f^2(b)$. Par construction, comme $f^3 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, on a bien les relations $f(v_1) = v_3$, $f(v_2) = v_1$ et $f(v_3) = v_2$. Reste à voir si (v_1, v_2, v_3) est une base. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_E$, cela donne $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)a + (\lambda_1 b + \lambda_2 f(b) + \lambda_3 f^2(b)) = 0_E$. Or G est stable par f car f et $f^2 + f + \mathrm{id}_E$ commutent donc $\lambda_1 b + \lambda_2 f(b) + \lambda_3 f^2(b) \in G$. Mais $a \in F$ et F et G sont en somme directe donc $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \lambda_1 b + \lambda_2 f(b) + \lambda_3 f^2(b) = 0_E$ où $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Ainsi, $\lambda_1 b + \lambda_2 f(b) - \lambda_1 f^2(b) - \lambda_2 f^2(b) = 0_E$ mais $f^2(b) = -f(b) - b$ donc $-\lambda_1 f(b) - \lambda_2 b = 0_E$ (1). Ceci implique $\lambda_1 = 0$ sinon on aurait $f(b) = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} b$ et b serait un vecteur propre de f ce qui est impossible car seul 1 est valeur propre de f et $b \notin F$. Alors, il reste dans (1) que $\lambda_2 b = 0_E$ donc $\lambda_2 = 0$. Enfin, comme $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, on a $\lambda_3 = 0$. ($\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6.165 **a.** On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -3 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = X^3 - 3X - 3$ donc, par CAYLEY-HAMILTON, $P = X^3 - 3X - 3$ est un polynôme annulateur de A. Pour $n \in \mathbb{N}$, on multiplie $A^3 - 3A - 3I_3 = 0$ par A^n pour avoir $A^{n+3} - 3A^{n+1} - 3A^n = 0$ et, par linéarité de la trace, $u_{n+3} - 3u_{n+1} - 3u_n = 0$.

b. $u_0 = \mathrm{Tr}\ (I_3) = 3$, $u_1 = \mathrm{Tr}\ (A) = 0$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ donc $u_2 = \mathrm{Tr}\ (A^2) = 6$, $u_3 = 3u_1 + 3u_0 = 9$ et $u_4 = 3u_2 + 3u_1 = 18$. Soit $n \geqslant 2$ tel que $(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}) \in (\mathbb{N}^*)^3$, alors $u_{n+3} = 3u_{n+1} + 3u_n \in \mathbb{N}^*$ car $\mathbb{N}^*$ est stable par somme et produit. Par principe de récurrence, on a bien $\forall n \geqslant 2,\ u_n \in \mathbb{N}^*$.

c. Méthode 1 : déjà, d'après **b.**, $\dfrac{1}{u_n}$ est bien défini et strictement positif dès que $n \geqslant 2$. On a $u_2 = 6 \geqslant 4 = 2^2$, $u_3 = 9 \geqslant 8 = 2^3$, $u_4 = 18 \geqslant 16 = 2^4$. Supposons, pour un entier $n \geqslant 2$, que $u_n \geqslant 2^n$, $u_{n+1} \geqslant 2^{n+1}$ et $u_{n+2} \geqslant 2^{n+2}$, alors $u_{n+3} = 3u_{n+1} + 3u_n \geqslant 3.2^{n+1} + 3.2^n = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{8}\right)2^{n+3} = \dfrac{9}{8}.2^{n+3} \geqslant 2^{n+3}$. Par principe de récurrence (sur trois rangs), $\forall n \geqslant 2, u_n \geqslant 2^n$. On aurait aussi pu montrer par une récurrence similaire que $\forall n \geqslant 2,\ u_n \geqslant n^2$. Ainsi, $\forall n \geqslant 2,\ \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ (ou $\forall n \geqslant 2,\ \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$) donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{u_n}$ converge par comparaison à une série géométrique $(1/2 < 1)$ (ou de Riemann).

Méthode 2 : comme $\chi_A'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t-1)(t+1)$, la fonction χ_A est croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$ et décroissante sur $[-1; 1]$ avec $\lim\limits_{t \to -\infty} \chi_A(t) = -\infty$, $\chi_A(-1) = -1$, $\chi_A(1) = -5$, $\chi_A(2) = -1$, $\chi_A(3) = 15$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \chi_A(t) = +\infty$. Avec le tableau de variations de χ_A, on se rend compte que χ_A n'admet qu'une seule racine réelle $\alpha \in]2; 3[$ et, comme χ_A est réel, ses deux autres racines sont β et $\overline{\beta}$ (deux complexes non réels et conjugués). Comme χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et semblable à $\mathrm{diag}(\alpha, \beta, \overline{\beta})$. Ainsi, A^n est semblable à $\mathrm{diag}(\alpha^n, \beta^n, \overline{\beta}^n)$ donc $u_n = \mathrm{Tr}\ (A^n) = \alpha^n + \beta^n + \overline{\beta}^n$. Comme $\alpha\beta\overline{\beta} = 3$ par les relations coefficients-racines, on a $|\beta|^2 = \dfrac{3}{\alpha} \leqslant \dfrac{3}{2}$ donc $|\beta| < 2$. Ainsi, $\beta^n \underset{+\infty}{=} o(\alpha^n)$ et $\overline{\beta}^n \underset{+\infty}{=} o(\alpha^n)$ ce qui montre que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \alpha^n$ donc $\dfrac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha^n}$: $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{u_n}$ converge car $0 < \dfrac{1}{\alpha} < 1$.

6.166 **a.** Si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors $\deg(P(1-iX)) = \deg(P)$ (on compose P par un polynôme de degré 1 donc on ne change pas le degré) d'où $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$. Pour un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ et un couple de polynômes $(P, Q) \in (\mathbb{C}_n[X])^2$, $\varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1 - iX) = \lambda P(1 - iX) + Q(1 - iX) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$: φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

b. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{d} b_k X^k$ un polynôme annulateur de φ. Il existe $P \neq 0 \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\varphi(P) = \lambda P$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi^k(P) = \lambda^k P$. Ainsi, on peut calculer $0 = Q(\varphi)(P) = \sum\limits_{k=0}^{d} b_k \varphi^k(P) = \sum\limits_{k=0}^{d} b_k \lambda^k P = Q(\lambda)P = 0$. Comme $P \neq 0$, on a forcément $Q(\lambda) = 0$.

c. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on calcule d'abord $\varphi^2(P) = \varphi(P(1 - iX)) = P(1 - i(1 - iX)) = P(1 - i - X)$ dont on déduit $\varphi^4(P) = \varphi^2(P(1 - i - X)) = P(1 - i - (1 - i - X)) = P(X)$. Ainsi, $\varphi^4 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}_n[X]}$. Par conséquent, φ est un automorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ et $\varphi^{-1} = \varphi^3 : P \mapsto P(1 - i(1 - i(1 - iX))) = P(-i + iX)$. De plus, $X^4 - 1$ annule φ et $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$ est scindé à racines simples donc φ est diagonalisable.

d. D'après la question **b.**, les valeurs propres possibles de φ sont les racines quatrièmes de l'unité : 1, i, -1 et $-i$. Comme $\varphi(X^0) = \varphi(1) = 1 = 1.X^0$ avec $1 = X^0 \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $1 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$.

e. On écrit $P = aX + b$ et on reporte dans la relation $\varphi(P) = -iP$ pour avoir l'équivalence suivante : $a(1 - iX) + b = -i(aX + b) \iff \left(a \text{ quelconque et } b = \dfrac{(i-1)a}{2}\right)$. Ainsi, $P = 2X + i - 1$ (en prenant $a = 2$ par exemple) est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $-i$.

f. • En ce qui concerne la bijectivité de φ, comme φ est un endomorphisme en dimension finie, il suffit de vérifier que φ est injective. Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $P(1-iX)=0$. Si P n'était pas le polynôme nul, on aurait $\deg(P(1-iX)) = \deg(P) = \deg(0) = -\infty$ ce qui est impossible. Ainsi, $P=0$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$ et φ est à nouveau un automorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

• Pour les valeurs propres de φ, il suffit de résoudre le système $\varphi(P)=\lambda P \Longleftrightarrow P(1-iX)=\lambda P$ avec $P \neq 0$. En notant a le coefficient dominant de P et d son degré, on a donc (en identifiant les termes en X^d) $(-i)^d a = \lambda a$ d'où, comme $a \neq 0$, $(-i)^d = \lambda$ ce qui montre que $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{1,-i,-1,i\} = \mathbb{U}_4$.

• Pour les sous-espaces propres, on cherche un complexe a tel que $1-iX+a = -i(X+a)$, ce qui équivaut à $a = \dfrac{i-1}{2}$. Ainsi, $\varphi((X+a)^k) = (1-iX+a)^k = (-i)^k(X+a)^k$ donc $(X+a)^k$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $(-i)^k$ pour tout $k \in [\![0;n]\!]$. Comme la famille $\mathcal{B} = \big((X+a)^k\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est de cardinal $n+1$, de degrés échelonnés donc libre, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$. Et la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est $\mathrm{diag}(1,-i,-1,i,1,-i,\cdots,(-i)^n)$ d'après ce qui précède.
Ainsi, $\dim(E_1(\varphi)) = \left\lfloor \dfrac{n+4}{4} \right\rfloor$, $\dim(E_{-i}(\varphi)) = \left\lfloor \dfrac{n+3}{4} \right\rfloor$, $\dim(E_{-1}(\varphi)) = \left\lfloor \dfrac{n+2}{4} \right\rfloor$ et $\dim(E_i(\varphi)) = \left\lfloor \dfrac{n+1}{4} \right\rfloor$.

6.167 **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_M(M)=0$ (théorème de CAYLEY-HAMILTON).
b. $A^0C = C = CB^0$ et $A^2C = A(AC) = A(CB) = (AC)B = (CB)B = CB^2$ car on a $AC=CB$ par hypothèse. Par le même principe et par une récurrence simple, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ A^kC = CB^k$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ qu'on écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_kX^k$, alors $P(A)C = \Big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_kA^k\Big)C = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_kA^kC = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_kCB^k = C\Big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_kB^k\Big) = CP(B)$.
c. Si on prend $P=\chi_A$, d'après **b.**, on a $\chi_A(A)C = C\chi_A(B)$ et, comme $\chi_A(A)=0$ d'après **a.**, on a donc $C\chi_A(B)=0$. Or la matrice C est non nulle par hypothèse donc cela implique que $\chi_A(B)$ n'est pas inversible ; en effet, si elle l'était, on aurait $C\chi_A(B)(\chi_A(B))^{-1} = C = 0$ ce qui est absurde. Or on peut factoriser $\chi_A = \prod\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} (X-\lambda)^{m_\lambda(A)}$ dans $\mathbb{C}[X]$ ce qui montre que $\prod\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} (B-\lambda I_n)^{m_\lambda(A)} = 0$. À nouveau, ceci implique qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $B-\lambda I_n$ n'est pas inversible. Or $\lambda I_n - B$ non inversible se traduit par $\det(\lambda I_n - B) = \chi_B(\lambda) = 0$ donc λ est à la fois une valeur propre de A et de B.
d. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)\cap\mathrm{Sp}(B)$. On sait que $\mathrm{Sp}({}^tB) = \mathrm{Sp}(B)$ donc il existe deux vecteurs colonnes X et Y non nuls dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $AX = \lambda X$ et ${}^tBY = \lambda Y$. Posons $C = X{}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $AC = AX{}^tY = (AX){}^tY = \lambda X{}^tY$ et $CB = X{}^tYB = X({}^tY{}^tB) = X{}^{(}BY) = X^t(\lambda Y) = \lambda X{}^tY$ donc $AC=CB$. Or, en notant $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $Y = (y_j)_{1\leqslant i\leqslant n}$, il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ et $j_0 \in [\![1;n]\!]$ tels que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$ par hypothèse. Ainsi, si $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $c_{i,j} = x_iy_j$ donc $x_{i_0,j_0} = x_{i_0}y_{j_0} \neq 0$ et la matrice C n'est donc pas nulle.

6.168 **a.** f_A va bien de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par propriété du produit matriciel et f_A est bien linéaire par distributivité de $\times$ par rapport à $+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $f_A(\lambda M + M') = A(\lambda M+M') = \lambda AM + AM' = \lambda f_A(M) + f_A(M')$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M,M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Ainsi f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b. • Si $A^2=A$, alors $f_A^2(M) = f_A(f_A(M)) = f_A(AM) = A(AM) = (AA)M = A^2M = AM = f_A(M)$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $f_A^2 = f_A$ et f_A est bien un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
• Si f_A est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $f_A^2 = f_A$ donc, en particulier, $f_A^2(I_n) = f_A(I_n)$ ou encore $A^2=A$. Par double implication, $A^2=A$ si et seulement si f_A est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
c. Par une récurrence facile, on montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f_A^k(M) = A^kM$. Si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kX^k \in \mathbb{R}[X]$,

alors $P(f_A) = \sum_{k=0}^{d} a_k f_A^k$ donc $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ P(f_A)(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k M = P(A)M$.

• Si P est annulateur de A, la relation précédente montre que $P(f_A) = 0$ don P est aussi annulateur de f_A.

• Si P est annulateur de f_A, alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ P(A)M$ d'après ce qui précède donc, en particulier en prenant $M = I_n$, on a $P(A) = 0$ donc P est aussi annulateur de A.

Par conséquent, A et f_A ont les mêmes polynômes annulateurs. Comme A (ou f_A) est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples : A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.

d. • Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors $AX = \lambda X$. Construisons par exemple la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes sont égales à X, alors $f_A(M) = AM = \lambda M$ par calcul matriciel donc, comme $\neq 0$ car $X \neq 0$, M est un vecteur propre de f_A associé à la valeur propre λ.

• Si $M \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de f_A associé à la valeur propre λ, alors $f_a(M) = AM = \lambda M$. Comme $M \neq 0$, il existe au moins une colonne, disons la colonne C_j, qui est non nulle. Comme $AM = \lambda M$, on en déduit que $AC_j = \lambda C_j$ donc C_j est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

e. La question précédente montre par double inclusion que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f_A)$.

6.169 **a.** Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors il existe $X \neq 0$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que $AX = \lambda X$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = \lambda^k X$. Ainsi, $(A^3 - A^2 + A - I_n)X = 0.X = 0 = (\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1)X$ ce qui permet de conclure que $P(\lambda) = 0$ car $X \neq 0$ par hypothèse. Les valeurs propres de A sont bien racines de $P = X^3 - X^2 + X - 1$.
b. Comme $P = (X-1)(X^2+1) = (X-1)(X-i)(X+i)$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{1, -i, i\}$. Comme P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, on sait que $\det(A) = 1^{m_1(A)}(-i)^{m_{-i}(A)} i^{m_i(A)}$. Or, comme A est une matrice réelle et que $-i = \bar{i}$, on sait que $m_{-i}(A) = m_i(A)$ car $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi, $\det(A) = ((-i) \times i)^{m_i(A)} = 1^{m_i(A)} = 1$.
c. De même, $\mathrm{Tr}\ (A) = m_1(A) + (-i)m_i(A) + im_i(A) = m_1(A)$ est bien un entier. On peut être plus précis, puisque $n = m_1(A) + 2m_i(A)$ et que $0 \leqslant m_i(A) \leqslant \frac{n}{2}$, on a $\mathrm{Tr}\ (A) \in \{n, n-2, n-4, \ldots, n - 2\lfloor n/2 \rfloor\}$.

6.170 **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in E^2$, $f(\lambda x + y) = \ell(a)(\lambda x + y) - \ell(\lambda x + y)a$ par définition donc, par linéarité de ℓ, $f(\lambda x + y) = \lambda \ell(a)x + \ell(a)y - \lambda \ell(x)a - \ell(y)a = \lambda(\ell(a)x - \ell(x)a) + (\ell(a)y - \ell(y)a) = \lambda f(x) + f(y)$. Ainsi, f est un endomorphisme de E. $f(a) = \ell(a)a - \ell(a)a = 0_E$.

b. Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_E = \ell(a)x - \ell(x)a$. Comme $\ell(a) \neq 0$ par hypothèse, on obtient $x = \dfrac{\ell(x)}{\ell(a)}a$ donc $x \in \mathrm{Vect}(a)$. On vient de montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Vect}(a)$. Comme $f(a) = 0_E$ d'après **a.**, on a aussi $a \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $\mathrm{Vect}(a) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Par double inclusion, on a donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(a)$.

c. Si $x \in \mathrm{Ker}(\ell)$, $f(x) = \ell(a)x$ donc $x \in E_{\ell(a)}(f)$. Réciproquement, si $f(x) = \ell(a)x$, alors $-\ell(x)a = 0_E$ mais, comme $a \neq 0_E$ car $\ell(a) \neq 0$, cela montre que $\ell(x) = 0$ donc que $x \in \mathrm{Ker}(\ell)$. Par double inclusion, $E_{\ell(a)}(f) = \mathrm{Ker}(\ell)$. Comme ℓ est une forme linéaire non nulle, $\mathrm{Ker}(\ell)$ est un hyperplan de E. Comme $a \notin \mathrm{Ker}(\ell)$, $\mathrm{Vect}(a) = E_0(f)$ et $\mathrm{Ker}(\ell) = E_{\ell(a)}(f)$ sont supplémentaires dans E. Ainsi, $\mathrm{Sp}(f) = \{0, \ell(a)\}$.

d. Comme $E = E_0(f) \oplus E_{\ell(a)}(f)$ donc f est diagonalisable par définition.

e. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\ell)$, alors $\ell(x) = 0$ donc $f(x) = \ell(a)x = 0_E$ par hypothèse. Ainsi, $f(\mathrm{Ker}(\ell)) = \{0_E\}$. Soit $x \in E$, $f^2(x) = f(f(x)) = f(-\ell(x)a) = -\ell(x)f(a) = 0_E$. Ainsi, $f^2 = 0$ donc $P = X^2$ est un polynôme annulateur de f.

f. Par conséquent, comme les valeurs propres de f sont racines de n'importe quel polynôme annulateur de f,

$\mathsf{Sp}(f) \subset \{0\}$ donc $\mathsf{Sp}(f) = \{0\}$ car tout vecteur de $\mathsf{Ker}(\ell)$ est dans $\mathsf{Ker}(f)$. Si f était diagonalisable, on aurait $E = E_0(f) = \mathsf{Ker}(f)$ ce qui est faux puisque $\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Vect}(a)$ d'après **b.**. Ainsi, f n'est pas diagonalisable.

6.171 <u>Méthode 1</u> : posons $u_n = x_n + y_n + z_n$, alors $u_{n+1} = \frac{5}{4}u_n$. Posons aussi $v_n = x_n - y_n$ et $w_n = x_n - z_n$ de sorte que $v_{n+1} = -\frac{1}{4}v_n$ et $w_{n+1} = -\frac{1}{4}z_n$. On connaît les suites géométriques et on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n u_0,\ v_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n v_0$ et $w_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n w_0$. Or on inverse facilement le système pour avoir $x_n = \dfrac{u_n + v_n + w_n}{3}$, $y_n = \dfrac{u_n - 2v_n + w_n}{3}$ et $z_n = \dfrac{u_n + v_n - 2w_n}{3}$. On traite donc trois cas selon $u_0 = x_0 + y_0 + z_0$:

- Si $u_0 > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$.

- Si $u_0 < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = -\infty$.

- Si $u_0 = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

<u>Méthode 2</u> : on pose $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et U_n le vecteur colonne tel que ${}^tU_n = (x_n\ y_n\ z_n)$ on a $X_{n+1} = AX_n$

Par une récurrence simple, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$. Comme $A^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A + \frac{5}{16}I_3$, le polynôme $X^2 - X - \frac{5}{16}$ annule A or $P = X^2 - X - \frac{5}{16} = \left(X - \frac{5}{4}\right)\left(X + \frac{1}{4}\right)$ est scindé à racines simples donc A est diagonalisable. De plus, en effectuant la division euclidienne $X^n = Q_nP + R_n$ avec $R_n = a_nX + b_n$, on a $\left(\frac{5}{4}\right)^n = \frac{5a_n}{4} + b_n$ et $\left(-\frac{1}{4}\right)^n = -\frac{a_n}{4} + b_n$ d'où $a_n = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$ et $b_n = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{5}{4}\right)^n + 5\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

Comme $X_n = (a_nA + b_nI_3)X_0$, on a $x_n = \frac{a_n}{4}(x_0 + 2y_0 + 2z_0) + b_nx_0$, $y_n = \frac{a_n}{4}(2x_0 + y_0 + 2z_0) + b_ny_0$ et $z_n = \frac{a_n}{4}(2x_0 + 2y_0 + z_0) + b_nz_0$ donc, après calculs, $x_n = \dfrac{x_0 + y_0 + z_0}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^n + \dfrac{2x_0 - y_0 - z_0}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$, $y_n = \dfrac{x_0 + y_0 + z_0}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^n + \dfrac{-x_0 + 2y_0 - z_0}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ et $x_n = \dfrac{x_0 + y_0 + z_0}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^n + \dfrac{-x_0 - y_0 + 2z_0}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ et on conclut avec la même discussion selon le signe de $x_0 + y_0 + z_0$.

6.172 Par hypothèse, $P = X^p - 1$ est annulateur de A. Comme P admet pour racines les p racines p-ièmes de l'unité qui s'écrivent $\omega_k = \omega^k = e^{\frac{2ik\pi}{2p}}$ (avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{2p}}$), on peut en conclure que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car le polynôme $P = \prod\limits_{k=0}^{p-1}(X - \omega_k)$ est scindé à racines simples et annulateur de A.

6.173 **a.** Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, par définition, on a $P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}$. Dans ce déterminant, on effectue l'opération de Gauss (transvection qui ne modifie par le déterminant) $L_1 \longleftarrow L_1 + \lambda L_2 + \cdots + \lambda^{n-1}L_n$

pour avoir $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\Big(\lambda^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k\Big) \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$

en développant selon la première ligne. Ainsi, $P(\lambda) = (-1)^{n+1}\Big(\lambda^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k\Big)(-1)^{n-1} = \lambda^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k$.

Ainsi, comme ceci est vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ (A est la matrice compagnon de P).

b. Comme le polynôme P est scindé sur $\mathbb{C}$ car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, la matrice C est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc il existe une matrice inversible $U \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ telles que $C = UTU^{-1}$. Par conséquent, on a classiquement $C^k = UT^kU^{-1}$ et, comme C^k et T^k sont semblables, les polynômes caractéristiques de ces deux matrices sont égaux. Or, comme $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$, il est clair que $\chi_{T^k} = P_k = \prod\limits_{i=1}^{n}(X - \lambda_i^k)$. De plus, par stabilité de $\mathbb{Z}$ par somme et produit et par définition du produit matriciel, on montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ C^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Ainsi, comme le déterminant ne fait lui aussi intervenir que des sommes et des produits, il est clair que $\chi_{C^k} \in \mathbb{Z}[X]$. Enfin, on a bien montré que $P_k \in \mathbb{Z}[X]$ (il est à coefficients entiers relatifs).

6.174 Analyse : soit E un tel sous-espace tel que $E \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{0\}$. Distinguons selon la dimension $d = \dim(E)$.

si $d = 0$, on a $E = \{0\}$.

si $d = 1$, alors $E = \text{Vect}(A)$ est une droite avec $A \neq 0$ et, comme $E \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{0\}$, on a forcément A inversible sinon $A \neq 0$ appartiendrait à $E \setminus GL_n(\mathbb{C})$ contredisant l'hypothèse.

si $d \geqslant 2$, E contient au moins un plan $F = \text{Vect}(C, D)$ avec (C, D) libre. Comme avant, les matrices non nulles C et D sont forcément inversibles puisque sinon l'une d'entre elles ferait partie de $E \setminus GL_n(\mathbb{C})$ contredisant l'hypothèse. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A = \lambda C - D$, $\det(A) = \det(\lambda C - D) = \det(C(\lambda I_n - C^{-1}D))$ donc $\det(A) = \det(C)\det(\lambda I_n - C^{-1}D) = \det(C)\chi_M(\lambda)$ où $M = C^{-1}D$. Or le polynôme χ_M est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ par le théorème de d'Alembert-Gauss car $\deg(\chi_M) = n \geqslant 1$, il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\chi_M(\lambda_0) = 0$ ce qui montre que la matrice $A = \lambda_0 C - D$ n'est pas inversible puisque $\det(A_0) = 0$. Ainsi, $A_0 \notin GL_n(\mathbb{C})$, $A_0 \neq 0$ car (C, D) est libre et $A_0 \in \text{Vect}(C, D) \subset E$ ce qui prouve que $A_0 \in E \setminus GL_n(\mathbb{C})$ et on a une contradiction.

Synthèse : réciproquement, $E = \{0\}$ ou $E = \text{Vect}(A)$ avec A inversible vérifient la condition $E \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{0\}$ car si $M = \alpha A$ avec $\alpha \neq 0$, on a $\det(M) = \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A) \neq 0$ donc $M \in GL_n(\mathbb{C})$.

Par double implication, les seuls sous-espaces E de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $E \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{0\}$ sont le sous-espace $\{0\}$ réduit au vecteur nul (de dimension 0) ou toutes les droites $\text{Vect}(A)$ avec A inversible (de dimension 1).

La situation est différente sur le corps $\mathbb{R}$, il peut y avoir des plans de matrices où seule la matrice nulle est non inversible. Par exemple, si $n = 2$ et $E = \text{Vect}(I_2, R)$ avec $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\dim(E) = 2$ et, si $M \in E$ et $M \neq 0$, on a $M = xI_2 + yR = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ avec $(x,y) \neq (0,0)$ et $\det(M) = x^2 + y^2 > 0$ donc $M \in GL_2(\mathbb{R})$.

6.175 **a.** • Si n est pair, en notant $2p = \deg(P)$ et $P = \sum_{k=0}^{2p} a_k X^k$ avec $a_{2p} \neq 0$, on a $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_{2p}x^{2p}$ donc $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = +\infty$ si $a_{2p} > 0$ et $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = -\infty$ si $a_{2p} < 0$. Supposons $a_{2p} > 0$ (le cas $a_{2p} < 0$ se traite en remplaçant P par $-P$) de sorte que $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = +\infty$. Par définition de la limite, pour $\varepsilon = 1$ par exemple, il existe $a < 0$ tel que $\forall x \leqslant a,\ P(x) \geqslant 1$ et il existe $b > 0$ tel que $\forall x \geqslant b,\ P(x) \geqslant 1$. Comme P est continue sur le segment $[a;b]$, elle y est bornée et y atteint sa borné inférieure $m = \underset{x\in[a;b]}{\text{Min}}\ P(x)$. En posant $c = \text{Min}(1,m)$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant c$ puisque $P(x) \geqslant 1 \geqslant c$ si $x \in]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$ et $P(x) \geqslant m \geqslant c$ si $x \in [a;b]$. Ainsi, $P(\mathbb{R}) \subset [c; +\infty[$ donc P n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

• Si n est impair, en notant $2p+1 = \deg(P)$ et $P = \sum_{k=0}^{2p+1} a_k X^k$ avec $a_{2p+1} \neq 0$, on a $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_{2p+1}x^{2p+1}$ ce qui prouve que $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ si $a_{2p+1} > 0$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$ si $a_{2p+1} < 0$. Supposons que $a_{2p+1} > 0$ (l'autre cas est symétrique), soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall y \leqslant a,\ P(y) \leqslant x - 1$ (car $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$) et $\forall y \geqslant b,\ P(y) \geqslant x + 1$ (car $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$). Comme $P(a) \leqslant x \leqslant P(b)$, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists z \in \mathbb{R}$ tel que $P(z) = x$. Ainsi, P est surjective.

Par conséquent, P est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement son degré est impair.

b. Si $\deg(P) \leqslant 0$, P est constant donc P n'est pas injectif. Supposons maintenant P non constant donc $\deg(P') \geqslant 0$, c'est-à-dire $P' \neq 0$. Comme P est continue sur un intervalle, on sait d'après le cours que P est injective si et seulement si P est strictement monotone. Décomposons le polynôme P' en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ en écrivant $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{2m_k} \prod_{k=1}^{s} (X - \beta_k)^{2n_k+1} \prod_{k=1}^{t} (X^2 + a_k X + b_k)^{p_k}$ où $\lambda \neq 0$, $(r,s,t) \in \mathbb{N}^3$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ sont les racines réelles de P' de multiplicités paires $2m_1, \cdots, 2m_r$, $\beta_1, \cdots, \beta_s$ les racines réelles de P' de multiplicités impaires et $X^2 + a_1 X + b_1, \cdots, X^2 + a_t X + b_t$ les diviseurs irréductibles de degré 2 (avec a_k, b_k réels et $a_k^2 - 4b_k < 0$). Si on avait $s \geqslant 1$, alors P' changerait de signe au voisinage de β_1, ce qui contredirait la monotonie de P'. Réciproquement, si $s = 0$, P' est du signe de $\lambda \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en des points isolés (pas sur un vrai intervalle), et ceci montre que P est bien injective sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, P est injective sur $\mathbb{R}$ si et seulement si P' n'a aucune racine réelle de multiplicité impaire.

c. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 2$. Traitons plusieurs cas :

- si P admet deux racines réelles distinctes α et β, alors $P = (X - \alpha)(X - \beta)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, et on a donc $P(A) = f(A) = f(B) = P(B) = 0$ si $A = \alpha I_2$ et $B = \beta I_2$. Comme $A \neq B$, f n'est pas injective.
- si P admet une racine double réelle α, alors $P = (X - \alpha)^2 Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, si $A = \alpha I_2$ et $B = \alpha I_2 + E_{1,2}$, on a $P(A) = f(A) = f(B) = P(B) = 0$ car $E_{1,2}^2 = 0$. Comme $A \neq B$, f n'est pas injective.
- si P admet une racine complexe non réelle $z = z_1 + iz_2$ (avec $z_2 \neq 0$), donc que $P = (X^2 + aX + b)Q$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 - 4b < 0$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $z^2 + az + b = 0$, en posant $A = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix}$

(analogue des matrices de rotations), on a $A^2 = \begin{pmatrix} z_1^2 - z_2^2 & -2z_1z_2 \\ 2z_1z_2 & z_1^2 - z_2^2 \end{pmatrix}$ donc $A^2 + aA + bI_2 = 0$ car $z_1^2 - z_2^2 + 2iz_1z_2 + az_1 + iaz_2 + b = 0$. De même, $B^2 + aB + bI_2 = 0$ si $B = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $P(A) = f(A) = f(B) = P(B) = 0$ et, comme $A \neq B$, f n'est pas injective.

Comme tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 est de l'une des trois formes précédentes, on en déduit que si $\deg(P) \geqslant 2$, l'application $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = P(M)$ n'est pas injective.

d. À faire.

6.176 **a.** Comme $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$ est scindé d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, on sait que A est trigonalisable et semblable à $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_p, \cdots, \lambda_p)$ où chaque valeur propre λ_i est répétée n_i fois si n_i est la multiplicité de λ_i dans le polynôme χ_A. Pour $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est semblable à la matrice D^k donc $\mathrm{Tr}\,(A^k) = \sum\limits_{i=1}^{p} n_i\lambda_i^k = n_1\lambda_1^k\Big(1 + \sum\limits_{i=2}^{p} \frac{n_i}{n_1}\Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\Big)^k\Big)$. Par hypothèse, $\lim\limits_{k\to+\infty} \Big(1 + \sum\limits_{i=2}^{p} \frac{n_i}{n_1}\Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\Big)^k\Big) = 1$ car $\forall i \in [\![2;p]\!]$, $\Big|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\Big| < 1$ donc $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall k \geqslant k_0$, $\Big|\sum\limits_{i=2}^{p} \frac{n_i}{n_1}\Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\Big)^k\Big| \leqslant \frac{1}{2}$ ce qui prouve que $\forall k \geqslant k_0$, $\mathrm{Tr}\,(A^k) \neq 0$. Alors, pour $k \geqslant k_0$, $t_k = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(A^{k+1})}{\mathrm{Tr}\,(A^k)}$ est bien défini.

On a même $\mathrm{Tr}\,(A^k) \underset{+\infty}{\sim} n_1\lambda_1^k$ donc $t_k \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n_1\lambda_1^{k+1}}{n_1\lambda_1^k} = \lambda_1$ ce qui prouve que $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = \lambda_1$.

b. Prenons par exemple $n = p = 2$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il est clair que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$ avec $A^{2k} = I_2$ et $A^{2k+1} = A$. Ainsi, comme $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$, on ne peut pas définir t_k si k est impair.

Cela vient du fait que, dans ce cas particulier, $|\lambda_1| = |1| = 1 = |-1| = |\lambda_2|$.

c. On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 2 & X-3 & -1 \\ -4 & 4 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ 4 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)\big[(X-3)(X+1) - 4\big] = (X-1)^3$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$ et on n'est pas dans le cas de la question **a.**. Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, on a rang $(A - I_3) = 1$ donc $\dim(\mathrm{Ker}\,(A - I_3)) = 2$ d'après la formule du rang et, clairement, $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ en posant $v_1 = (1, 1, 0)$ et $v_2 = (0, 1, -2)$. Comme $E_1(A) \neq \mathbb{C}^3$, A n'est pas diagonalisable mais elle est trigonalisable car χ_A est scindé (dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$). Cherchons un vecteur v_3 tel que $Av_3 = v_2 + v_3$, ou encore $(A - I_3)v_3 = v_2$ et on constate sur la troisième colonne de la matrice ci-dessus que $v_3 = (0, 0, 1)$ convient. Comme $v_3 \notin E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, on a (v_1, v_2, v_3) libre donc $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et, par construction, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = T$ si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A. Par formule de changement de base, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a $A = PTP^{-1}$ donc A et T sont semblables.

d. Comme $T = I_3 + E_{2,3}$ et $I_3E_{2,3} = E_{2,3}I_3$, par le binôme de NEWTON, on a $T^k = (I_3 + E_{2,3})^k = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} E_{2,3}^i$. Mais $E_{2,3}^2 = 0$ donc $T^k = I_3 + kE_{2,3}$. Comme $A^k = PT^kP^{-1}$, on a $A^k = P(I_3 + kE_{2,3})P^{-1} = I_3 + kPE_{2,3}P^{-1}$. Mais $E_{2,3} = T - I_3$ donc $PE_{2,3}P^{-1} = P(T - I_3)P^{-1} = A - I_3$, ce qui montre que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{A^k}{k} = A - I_3$ car on a $\dfrac{A^k}{k} = \dfrac{I_3 + k(A - I_3)}{k} = A - I_3 + \dfrac{I_3}{k}$. On pouvait directement effectuer le binôme avec $A = I_3 + (A - I_3)$ sachant que les matrices I_3 et $A - I_3$ commutent et que $A - I_3$ est nilpotente d'indice 2.

6.177 **a.** Si $P \in \mathbb{R}[X]$, par composition, $P(X+1)$ est aussi un polynôme réel. De plus, si $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X + 1) = \lambda P(X + 1) + Q(X + 1) = \lambda f(P) + f(Q)$ donc f est linéaire. Ainsi, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b. Comme $g = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]}$, g est aussi un endomorphisme de $\mathbb{R}[X$.

• Soit $P \in \mathrm{Ker}(g)$, alors $P(X + 1) = P(X)$, si P admet une racine complexe α, alors $P(\alpha) = 0 = P(\alpha + 1)$ donc $\alpha + 1$ est aussi racine et, par une récurrence aisée, $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha + n$ est racine de P ce qui donnerait une infinité de racines pour P. NON ! Ainsi, P n'admet pas de racine complexe ce qui impose que P est constant d'après D'ALEMBERT-GAUSS. Réciproquement, si $P = \lambda \in \mathbb{R}_0[X]$, $f(P) = P$ donc $g(P) = 0$ et $P \in \mathrm{Ker}(g)$.

• Soit $Q \neq 0 \in \mathbb{R}[X]$ et $n = \deg(Q) \in \mathbb{N}$, si $P \in \mathbb{R}[X]$, les termes de plus haut degré de $P(X + 1)$ et $P(X)$ sont les mêmes donc $\deg(g(P)) < \deg(P)$. Ainsi, l'application $g_n : \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $g_n(P) = g(P)$ est bien définie et elle est linéaire par linéarité de g. D'après la formule du rang, $\mathrm{rang}\,(g_n) + \dim(\mathrm{Ker}(g_n)) = n+2$. Or $\mathrm{Ker}(g_n) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathbb{R}_{n+1}[X] = \mathbb{R}_0[X]$ donc $\mathrm{rang}\,(g_n) = n + 1$ ce qui montre que g_n est surjective. Ainsi, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $g_n(P) = g(P) = Q$. On peut donc conclure à la surjectivité de g. Au final, on a $\mathrm{Ker}(g) = \mathbb{R}_0[X]$ et $\mathrm{Im}\,(g) = \mathbb{R}[X]$.

c. Puisque g est surjective, g^k est aussi surjective donc $\mathrm{Im}\,(g^k) = \mathbb{R}[X]$.

Pour les noyaux itérés, on effectue une récurrence sur k. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathrm{Ker}(g^k) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$, on a déjà vu que $\deg(g(P)) < \deg(P)$ donc $g(P) \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, ce qui, par hypothèse de récurrence, montre que $g(P) \in \mathrm{Ker}(g^k)$, donc que $P \in \mathrm{Ker}(g^{k+1})$. Réciproquement, soit $P \in \mathrm{Ker}(g^{k+1})$, ceci s'écrit aussi $g^k(g(P)) = 0$ donc $g(P) \in \mathrm{Ker}(g^k) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Si P non constant, en écrivant $P = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i X^i$ avec $\deg(P) = d \geqslant 1$ donc $a_d \neq 0$, $g(P) = P(X + 1) - P(X) = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i(X + 1)^i - \sum\limits_{i=0}^{d} a_i X^i = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i\Big(\sum\limits_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} X^j\Big)$ par le binôme de NEWTON donc $g(P)$ est de degré $d - 1$ avec un terme en X^{d-1} qui est $da_d \neq 0$. Ainsi, $\deg(g(P)) \leqslant k-1$ montre que $\deg(P) \leqslant k$ ou encore que $P \in \mathbb{R}_k[X]$. Par double inclusion, $\mathrm{Ker}(g^{k+1}) = \mathbb{R}_k[X]$. Par principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(g^k) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

d. Puisque $\forall j \in [\![0; n]\!],\ f(X^j) = (X + 1)^j = \sum\limits_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i$, on a $A = \left(\binom{j}{i}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$. Comme A est triangulaire supérieure avec des $1 = \binom{k}{k}$ sur la diagonale, on a $\det(A) = 1$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice diagonale n'ayant que des 1 sur la diagonale, c'est-à-dire I_{n+1}, on aurait donc $A = I_{n+1}$ ce qui est faux puisque $n \geqslant 1$. Par conséquent, A n'est pas diagonalisable.

e. Comme $B = A\,{}^tA$, $B^{-1} = ({}^tA)^{-1}A^{-1} = {}^t(A^{-1})A^{-1}$. Or on a clairement $f^{-1} : P \mapsto P(X-1)$ donc A^{-1} est la matrice de la famille $\big((X-1)^j\big)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ écrite dans la base canonique, c'est-à-dire $A^{-1} = \left((-1)^{i+j}\binom{j}{i}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ car $(X - 1)^j = \sum\limits_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} X^i$ et $(-1)^{j-i} = (-1)^{j+i}$. Si $B^{-1} = (c_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$, par définition du produit matriciel $c_{i,j} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{i+k} \binom{i}{k} (-1)^{k+j} \binom{j}{k}$. Comme B et B^{-1} sont symétriques, on peut se contenter de ne considérer que le cas $i \leqslant j$, $c_{i,j} = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i+2k+j}\binom{i}{k}\binom{j}{k} = (-1)^{i+j}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{j}{j-k} = (-1)^{i+j}\binom{i+j}{j}$ d'après la formule de VANDERMONDE qui se montre en identifiant le terme en X^j, par le binôme de NEWTON, dans la relation $\sum_{k=0}^{i+j}\binom{i+j}{k}X^k = (X+1)^{i+j} = (X+1)^i(X+1)^j = \Big(\sum_{k_1=0}^{i}\binom{i}{k_1}X^{k_1}\Big)\Big(\sum_{k_2=0}^{j}\binom{j}{k_1}X^{k_2}\Big)$.

Questions de cours :

- Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance finie et $\varepsilon > 0$, alors l'inégalité de MARKOV annonce que $\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$.
- Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 et $\varepsilon > 0$, alors l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV est $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.
- Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E, alors χ_u est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et il existe une base orthonormale de E formée par des vecteurs propres de u, en particulier l'endomorphisme u est diagonalisable.

6.178 **a.** L'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est clairement dans C car $0 = 0^T$.

Soit $(f_1, f_2) \in C^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, alors on a $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in C$ car pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(M^T) = \lambda_1 f_1(M^T) + \lambda_2 f_2(M^T) = \lambda_1 f_1(M)^T + \lambda_2 f_2(M)^T = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(M)^T$. Ainsi, C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ donc est lui-même un espace vectoriel.

b. $(\Longrightarrow)$ Soit $f \in C$. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors $f(M) = f(M^T) = f(M)^T$ car $f \in C$ donc $f(M)$ est symétrique. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors $f(A) = f(-A^T) = -f(A^T) = -f(A)^T$ car $f \in C$ donc $f(A)$ est antisymétrique.

Ainsi, $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont stables par f.

$(\Longleftarrow)$ Si $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ est tel que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont stables par f, soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on décompose $M = S + A$ avec $S = \dfrac{M + M^T}{2} \in S_n(\mathbb{R})$ et $A = \dfrac{M - M^T}{2} \in A_n(\mathbb{R})$, comme f est linéaire, $f(M^T) = f((S + A)^T) = f(S - A) = f(S) - f(A)$ et, comme $f(S) = f(S)^T$ car $f(S)$ symétrique et $f(A)^T = -f(A)$ car $f(A)$ antisymétrique, on a $f(M^T) = f(S)^T + f(A)^T = (f(S) + f(A))^T = f(M)^T$ par linéarité de la transposée.

Par double implication, $f \in C$ si et seulement si $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont stables par f.

c. On a $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(A_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Soit une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$, alors $f \in C \Longleftrightarrow \left(\exists (U, V) \in \mathcal{M}_{\frac{n(n+1)}{2}}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{R}),\ \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\right)$ d'après la question précédente et la traduction matricielle de ces stabilités. On peut prendre par exemple $\mathcal{B} = (E_{1,1}, \cdots, E_{n,n}, E_{1,2} + E_{2,1}, \cdots, E_{n-1,n} + E_{n,n-1}, E_{1,2} - E_{2,1}, \cdots, E_{n-1,n} + E_{n,n-1})$. On a donc défini une application $\varphi : \mathcal{M}_{\frac{n(n+1)}{2}}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{R}) \to C$ par $\varphi(U, V) = f$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$. Ce qui précède montre que φ est un isomorphisme donc $\dim(C) = \dim\left(\mathcal{M}_{\frac{n(n+1)}{2}}(\mathbb{R})\right) + \dim\left(\mathcal{M}_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{R})\right)$ et on a donc $\dim(C) = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$.

d. Soit $n \geqslant 2$ et $f \in C$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = E_{1,2}$, c'est-à-dire $f = \varphi^{-1}(E_{1,2})$. On a $f^2 = 0$ alors que $f \neq 0$, comme 0 est la seule valeur propre de f, on a $\chi_f = X^{n^2}$ mais rang$(f) = 1$ donc $\dim(E_0(f)) = n^2 - 1 < n^2$ donc f n'est pas diagonalisable.

$\boxed{6.179}$ **a.** Après calculs, on a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -3 & 0 \\ -3 & X+2 & 1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X-3)(X+4)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-4, 1, 3\}$. Comme χ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable et $\mathbb{K}^3 = E_1(A) \oplus E_3(A) \oplus E_{-4}(A)$. On peut aussi dire que A est symétrique et réelle donc, d'après le théorème spectral, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc a fortiori dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. De plus, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, toujours avec le théorème spectral, les sous-espaces propres de A sont des supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

On résout les trois systèmes $AX = X$, $AX = 3X$ et $AX = -4X$ avec $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ pour trouver les trois droites propres $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$, $E_3(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$ et $E_{-4}(A) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_1 = (1, 0, 3)$, $v_2 = (3, 2, -1)$ et $v_3 = (3, -5, -1)$ (on constate que ces vecteurs sont bien orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$). On a donc diagonalisé A en $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ par formule de changement de base.

<u>Méthode 1</u>: $F = \{0\}$ et $F = \mathbb{K}^3$ sont clairement des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A et il n'y a pas d'autres sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ de dimension 0 ou 3. On sait que les droites stables sont celles qui sont engendrées par des vecteurs donc il y a trois droites stables : $F = E_1(A_F)$ ou $F = E_3(A_F)$ ou $F = E_{-4}(A_F)$. Comme, A est symétrique, les orthogonaux des sous-espaces stables par A le sont aussi. Ainsi, il existe exactement trois plans stables qui sont $F = E_1(A_F)^\perp$ ou $F = E_3(A_F)^\perp$ ou $F = E_{-4}(A_F)^\perp$, c'est-à-dire $F = E_3(A) \oplus E_{-4}(A)$, $F = E_1(A) \oplus E_{-4}(A)$ ou $F = E_1(A) \oplus E_3(A)$.

<u>Méthode 2</u>: Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}^3$ stable par A, alors A induit sur F un endomorphisme qu'on sait être diagonalisable d'après le cours. On sait aussi que χ_{A_F} divise χ_A. Traitons alors plusieurs cas :

- si $\dim(F) = 0$, alors $F = \{0\}$.
- si $\dim(F) = 1$, alors on ne peut avoir que $\chi_{A_F} = X - 1$ ou $\chi_{A_F} = X - 3$ ou $\chi_{A_F} = X + 4$ car $\deg(\chi_{A_F}) = 1$. Comme A_F est diagonalisable, F est la somme de ses sous-espaces propres et on a donc $F = E_1(A_F)$ ou $F = E_3(A_F)$ ou $F = E_{-4}(A_F)$. Mais, par exemple si $\chi_{A_F} = X - 1$, 1 est valeur propre de A_F donc $v_1 \in F$ et on a $F = \mathrm{Vect}(v_1) = E_1(A)$. Ainsi, on a $F = E_1(A)$ ou $F = E_3(A)$ ou $F = E_{-4}(A)$.
- si $\dim(F) = 2$, alors on ne peut avoir que $\chi_{A_F} = (X-1)(X-3)$ ou $\chi_{A_F} = (X-1)(X+4)$ ou $\chi_{A_F} = (X-3)(X+4)$ car $\deg(\chi_{A_F}) = 2$. A_F est diagonalisable donc F est la somme de ses sous-espaces propres et on a donc $F = E_1(A) \oplus E_3(A)$ (car v_1 et v_2 sont forcément dans F puisque 1 et 3 sont valeurs propres de A_F) ou $F = E_1(A) \oplus E_{-4}(A)$ (idem v_1 et v_3 sont dans F) ou $F = E_3(A) \oplus E_{-4}(A)$.
- si $\dim(F) = 3$, alors $F = \mathbb{K}^3$.

La méthode 1 utilise la propriété de symétrie de A (mais seulement dans $\mathbb{R}^3$) alors que la méthode 2 est plus générale pour trouver les sous-espaces stables par un endomorphisme (ou une matrice).

Réciproquement, ces huit sous-espaces de $\mathbb{K}^3$ sont stables par A car ils possèdent tous une base de vecteurs propres de A. Il existe donc exactement 8 sous-espaces de $\mathbb{K}^3$ stables par A.

b. La matrice 0 appartient à $C(A)$ donc $C(A) \neq \emptyset$ et $C(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $(M, N) \in C(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$ donc $\lambda M + N \in C(A)$. Ainsi, $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc lui-même un espace vectoriel.

De plus, $A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A$ par associativité du produit matriciel donc $C(A)$ est aussi stable par produit. Comme $I_3 \in C(A)$, $C(A)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Méthode 1 : Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et $N = P^{-1}MP$, alors $M \in C(A) \iff AM = MA$ ce qui donne en remplaçant $M \in C(A) \iff PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \iff DN = ND$. Si on effectue les calculs ND et DN et qu'on identifie, on trouve sans peine que $M \in C(A) \iff N$ est diagonale.

Méthode 2 : Si $M \in C(A)$, les sous-espaces propres de A sont stables par M, ce qui prouve que l'on a $Mv_1 \in \mathrm{Vect}(v_1)$, $Mv_2 \in \mathrm{Vect}(v_2)$ et $Mv_3 \in \mathrm{Vect}(v_3)$ donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $Mv_1 = \alpha_1 v_1$, $Mv_2 = \alpha_2 v_2$ et $Mv_3 = \alpha_3 v_3$. Ainsi, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à M et que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, comme $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$, on a $M = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Comme $\varphi : U \mapsto PUP^{-1}$ est clairement un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et que la dimension du sous-espace des matrices diagonales vaut 3, alors $\dim(C(A)) = 3$.

c. Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, alors $MA = M^3 = AM$ donc $M \in C(A)$. Ainsi, $M = PD'P^{-1}$ avec $D' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale. Or $M^2 = A$ équivaut à $D'^2 = D$ ce qui est impossible car $-4 < 0$ ne peut être le carré d'un réel. Par contre, pour le cas complexe, si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, alors $MA = M^3 = AM$ donc $M \in C(A)$. Ainsi, $M = PD'P^{-1}$ avec $D' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ diagonale. Or $M^2 = A$ équivaut à $D'^2 = D$ et, en écrivant $D' = \mathrm{diag}(\alpha\ \beta\ \gamma)$, $D'^2 = D$ implique $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 3$ et $\gamma^2 = -4$ et on a donc 8 matrices D' qui conviennent, ce sont les $D' = \mathrm{diag}(\pm 1\ \ \pm\sqrt{3}\ \ \pm 2i)$. , il existe exactement huit matrices complexes qui vérifient $M^2 = A$, ce sont les matrices $M = P\mathrm{diag}(\pm 1\ \ \pm\sqrt{3}\ \ \pm 2i)P^{-1}$.

6.180 **a.** Si A est diagonalisable, en notant $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$, il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}\big(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots, \lambda_n\big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Alors on a classiquement $A^3 = PD^3P^{-1}$ donc $B = PD^3P^{-1} + PDP^{-1} + PP^{-1} = P(D^3 + D + I_n)P^{-1}$ et la matrice $D' = D^3 + D + I_n = \mathrm{diag}\big(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n), \cdots, f(\lambda_n)\big)$ est diagonale avec $f : x \mapsto x^3 + x + 1$.

Or, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ donc elle y est strictement croissante et on a clairement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. On conclut avec le théorème de la bijection que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc que le spectre de B contient autant de valeurs propres que celui de A, c'est-à-dire qu'on a $\mathrm{Sp}(B) = \{f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_r)\}$ (pas de répétition).

Soit L le polynôme d'interpolation de LAGRANGE de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1; r]\!]$, $L(f(\lambda_k)) = \lambda_k$; on sait que $L = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r} \dfrac{X - f(\lambda_i)}{f(\lambda_k) - f(\lambda_i)}$ (voilà pourquoi on a besoin de l'injectivité de f sur $\mathbb{R}$) mais l'expression importe peu ! Alors $L(B) = PL(D')P^{-1} = P\mathrm{diag}\big(L(f(\lambda_1)), \cdots, L(f(\lambda_1)), \cdots, L(f(\lambda_n)), \cdots, L(f(\lambda_n))\big)P^{-1}$ ce qui donne $L(B) = PDP^{-1} = A$ comme attendu.

b. Si $n = 1$, $A = (a)$ et $B = (b)$ avec $b = f(a) = a^3 + a + 1$ ($(a, b) \in \mathbb{C}^2$), on peut écrire A comme un polynôme en B en écrivant $A = U(B)$ avec, par exemple, $U = X - b + a$.

Dès que $n \geqslant 2$, comme la fonction polynomiale f est non injective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ même si elle reste surjective d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, il va y avoir du changement. Le polynôme $Q = X^3 + X + 1$ (associé à la fonction polynomiale f) admet trois racines complexes. Comme $Q' = 3X^2 + 1$ s'annule en $\pm\dfrac{i}{\sqrt{3}}$

et que ces deux valeurs ne sont pas des racines de Q, Q n'admet que des racines simples α, β et γ (avec $\gamma = \overline{\beta}$). Posons par exemple $A = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \alpha, \alpha, \cdots, \alpha)$ (matrice diagonale avec un mélange des racines de Q). Alors $B = \mathrm{diag}(Q(\alpha), Q(\beta), Q(\alpha), \cdots, Q(\alpha)) = 0$ et, quel que soit le polynôme $U = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a donc $U(B) = a_0 I_n \neq A$ car $\alpha \neq \beta$.

Ainsi, on peut trouver des matrices diagonalisables $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 2$ telles qu'en posant $B = A^3+A+I_n$, la matrice A ne puisse pas s'exprimer comme un polynôme en B.

6.181 • Si $n = 1$ et $A = (a) \neq 0$, $B = (b) \neq 0$, alors $ABAB = (a^2b^2) \neq 0$. Rien à signaler.

• Si $n = 2$ et $A \neq 0$, $B \neq 0$ telles que $ABAB = 0$, alors la matrice AB est nilpotente d'indice inférieur ou égal à 2. Mais on a aussi $(BA)^3 = BABABA = B(ABAB)A = B0A = 0$ donc BA est aussi nilpotente. Comme X^3 est annulateur de BA, on sait d'après le cours que $\mathrm{Sp}(BA) \subset \{0\}$ car 0 est la seule racine de X^3. Mais comme le spectre complexe est non vide d'après D'ALEMBERT-GAUSS, on a donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(BA) = \{0\}$ ce qui montre que $\chi_{BA} = X^2$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on a donc $(BA)^2 = 0$ donc $BABA = 0$.

• Si $n = 3$ et $A \neq 0$, $B \neq 0$ telles que $ABAB = 0$, alors AB est nilpotente et, comme avant BA l'est aussi. Mais la même démarche conduit à $(BA)^3 = 0$ et on est bloqué ! On va construire un exemple tel que l'indice de nilpotente de AB soit 2, et celui de BA soit supérieur ou égal à 3. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,3}$, alors $N^2 = E_{1,3} \neq 0$ et $N^3 = 0$ donc N est nilpotente d'indice 3. On cherche A et B non nulles dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $BA = N$ alors que $(AB)^2 = 0$. Si on prend $A = N = E_{1,2} + E_{2,3}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{2,2} = N'$, alors on a comme attendu $BA = N$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}$ donc $BABA = E_{1,3} \neq 0$ alors que $ABAB = 0$.

• Si $n \geqslant 4$, on construit par blocs $A = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0_{n-3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} N' & 0 \\ 0 & 0_{n-3} \end{pmatrix}$ et on a comme dans le cas $n = 3$, par des calculs par blocs, $AB = E_{1,2}$, $BABA = E_{1,3} \neq 0$ alors que $ABAB = 0$.

Au final : si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $ABAB = 0$ alors on ne peut pas avoir $n = 1$, on peut conclure que $BABA = 0$ si $n = 2$ et on ne peut rien conclure sur la valeur de $BABA$ si $n \geqslant 3$.

6.182 **a.** u et v ont bien de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même et sont clairement linéaires. Ainsi, u et v sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $u^2(M) = u(u(M)) = u(MA) = (MA)A = MA^2 = MA = u(M)$. Ainsi, u est aussi un projecteur ce qui prouve que u est diagonalisable car le polynôme scindé à racines simples $P = X(X-1) = X^2 - X$ annule u. De même, $v^2 = v$ donc v est aussi diagonalisable.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \neq 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $w(M) = AM - MA = \lambda M$ (E). En multipliant par A à gauche (resp à droite), comme $A^2 = A$, on a $AM - AMA = \lambda AM$ (1) (resp. $AMA - MA = \lambda MA$ (2)). Avec (1) et (2), on a $AMA = (1-\lambda)AM = (1+\lambda)MA$. Si $\lambda \neq 1$, alors $AM = \dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}MA$ donc, en reportant dans (E), on a $\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}MA - MA = \dfrac{2\lambda}{1-\lambda}MA = \lambda M$ d'où $MA = \dfrac{1-\lambda}{2}M$ (3) si $\lambda \neq 0$ et $AM = \dfrac{1+\lambda}{2}M$ (4). En multipliant (3) par A à droite, comme $A^2 = A$, il vient $MA = \dfrac{1-\lambda}{2}MA$ donc $MA = 0$ si $1 \neq \dfrac{1-\lambda}{2}$, c'est-à-dire si $\lambda \neq -1$. Ainsi, si $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$, $MA = 0$ donc $AM = 0$ et $w(M) = AM - MA = 0 = \lambda M$; NON car $\lambda \neq 0$ et $M \neq 0$.

Par conséquent, les valeurs propres de w ne peuvent être que -1, 0 ou 1.

c. Comme $\mathrm{Sp}(w) \subset \{-1, 0, 1\}$, on est amené à évaluer $P(w)$ si $P = (X+1)X(X-1) = X^3 - X$. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $w^2(M) = w(AM - MA) = A(AM - MA) - (AM - MA)A = AM - 2AMA + MA$ donc $w^3(M) = w(AM - 2AMA + MA) = A(AM - 2AMA + MA) - (AM - 2AMA + MA)A$ et, en développant, $w^3(M) = AM - 2AMA + AMA - AMA + 2AMA - MA = AM - 2AMA + MA = w(M)$. On a bien $w^3 = w$ donc le polynôme scindé à racines simples P annule w ce qui prouve que w est diagonalisable.

6.183 **a.** Si $f \in E$, par opérations, comme $x \mapsto \frac{x}{2}$ et $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ sont de classe C^∞ de $[0;1]$ dans $[0;1]$, la fonction $T(f)$ est bien définie et de classe C^∞ sur $[0;1]$ donc $T(f) \in E$. Pour $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on calcule $\forall x \in [0;1]$, $T(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{2}\Big((\lambda f+g)\Big(\frac{x}{2}\Big) + (\lambda f+g)\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big) = \frac{\lambda}{2}\Big(f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big) + \frac{1}{2}\Big(g\Big(\frac{x}{2}\Big) + g\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big)$ ce qui donne $T(\lambda f + g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$ donc $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$: T est en endomorphisme de E.

b. Pour $f \in E$ et $x \in [0;1]$, $T^2(f)(x) = T(T(f))(x) = \frac{1}{2}\Big(T(f)\Big(\frac{x}{2}\Big) + T(f)\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big)$ et, par définition de $T(f)$, on a $T^2(f)(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Big(f\Big(\frac{x}{4}\Big) + f\Big(\frac{x+1}{4}\Big)\Big) + \frac{1}{2}\Big(f\Big(\frac{x+2}{4}\Big) + f\Big(\frac{x+3}{4}\Big)\Big)\right)$ ce qui donne l'initialisation suivante : $T^2(f)(x) = \frac{1}{4}\Big(f\Big(\frac{x}{4}\Big) + f\Big(\frac{x+1}{4}\Big) + f\Big(\frac{x+2}{4}\Big) + f\Big(\frac{x+3}{4}\Big)\Big)$.

Soit $n \geqslant 1$ tel que $\forall f \in E$, $\forall x \in [0;1]$, $T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big)$. Par définition, comme $T^{n+1} = T^n \circ T$, on obtient $T^{n+1}(f)(x) = T^n(T(f))(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} T(f)\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big)$ par hypothèse de récurrence puis, par définition de T, $T^{n+1}(f)(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1}\Big(f\Big(\frac{x+k}{2^{n+1}}\Big) + f\Big(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\Big)\Big) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\frac{x+k}{2^{n+1}}\Big) + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\Big)$.
En posant $j = k+2^n$ dans le seconde somme, on a $\sum_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\Big) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} f\Big(\frac{x+j}{2^{n+1}}\Big)$ donc, en changeant j en k et en regroupant les deux sommes, on arrive bien à $T^{n+1}(f)(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f\Big(\frac{x+k}{2^{n+1}}\Big)$.

Par principe de récurrence, $\forall f \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;1]$, $T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big)$, cette formule étant même valable quand $n = 0$ car $T^0(f)(x) = f(x) = \frac{1}{2^0}\sum_{k=0}^{2^0-1} f\Big(\frac{x+k}{2^0}\Big)$ puisque $T^0 = \mathrm{id}_E$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la somme de RIEMANN $R_n(f) = \frac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(0 + k\frac{1-0}{n}\Big)$ associée à $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue. D'après un théorème du cours, $\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t)dt$. D'après **b.**, $T^n(f)(0) = R_{2^n}(f)$. Comme $(R_{2^n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} T^n(f)(0) = \int_0^1 f(t)dt$.

d. Pour $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $T^n(f)(x) - T^n(f)(0) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\Big(f\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big) - f\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big)\Big)$ donc, par inégalité triangulaire, $|T^n(f)(x) - T^n(f)(0)| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\Big|f\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big) - f\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\Big|$. Or, par inégalité des accroissements finis, en posant $M = ||f'||_{\infty,[0;1]}$ qui existe puisque la fonction f' est continue sur le segment $[0;1]$ d'après le théorème des bornes atteintes, on a $\Big|f\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big) - f\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\Big| \leqslant \frac{Mx}{2^n}$. Ainsi, $|T^n(f)(x) - T^n(f)(0)| \leqslant \frac{2^n Mx}{2^{2n}} \leqslant \frac{M}{2^n}$.
Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}(T^n(f)(x) - T^n(f)(0)) = 0$ dont on déduit que $\forall x \in [0;1]$, $\lim_{n\to+\infty} T^n(f)(x) = \int_0^1 f(t)dt$ en écrivant

$T^n(f)(x) = \big(T^n(f)(x) - T^n(f)(0)\big) + T^n(f)(0)$. On peut donc affirmer que la suite de fonctions $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante $c : x \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ sur $[0;1]$. D'ailleurs, avec ce qui précède, $|T^n(f)(x) - c(x)| = |T^n(f)(x) - T^n(f)(0) + T^n(f)(0) - c(x)| \leqslant |T^n(f)(x) - T^n(f)(0)| + |T^n(f)(0) - c(x)|$ donc $|T^n(f)(x) - c(x)| \leqslant \dfrac{M}{2^n} + \left|T^n(f)(0) - \int_0^1 f(t)dt\right|$. Ainsi, $||T^n(f) - c||_{\infty,[0;1]} \leqslant \dfrac{M}{2^n} + \left|T^n(f)(0) - \int_0^1 f(t)dt\right|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{M}{2^n} + \left|T^n(f)(0) - \int_0^1 f(t)dt\right|\right) = 0$ donc $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers c sur $[0;1]$.

e. Si 1 est la fonction constante égale à 1 sur $[0;1]$, $T(1) = 1$ donc, comme $1 \neq 0$, 1 est valeur propre de T. Soit $f \in E_1(T)$, alors $T(f) = f$ donc, par une récurrence simple, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n(f) = f$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(x) = \int_0^1 f(t)dt$ ce qui prouve que f est constante. Ainsi, $E_1(T) = \mathrm{Vect}(1)$.

f. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$. Supposons qu'il existe $f \in E$ telle que $T(f) = kf$. Par une autre récurrence simple, pour $x \in [0;1]$, il vient $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n(f) = k^n f(x)$. Comme $(T^n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'après **d.** et que $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, ceci impose que $f(x) = 0$. Seule la fonction nulle est dans $E_k(f)$ donc k n'est pas valeur propre de f si $|k| > 1$. Par le même argument, comme $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on en déduit aussi que $E_1(T) = \{0\}$ donc que -1 n'est pas valeur propre de T.

g. Pour $f \in E$ et $x \in [0;1]$, on a $T(f)'(x) = \dfrac{1}{4}\left(f'\left(\dfrac{x}{2}\right) + f'\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right) = \dfrac{T(f')(x)}{2}$ donc $T(f)' = \dfrac{T(f')}{2}$. Soit $f \in E_{1/2}(T)$, alors $T(f) = \dfrac{f}{2}$ donc $\dfrac{f'}{2} = T(f)' = \dfrac{T(f')}{2}$ et $T(f') = f'$ ce qui, d'après **e.**, montre que f' est constante. Ainsi, f est une fonction affine. Réciproquement, si on pose $f : x \mapsto ax + b$, alors $f \in E$ et $\forall x \in [0;1],\ T(f)(x) = \dfrac{1}{2}\left(a\dfrac{x}{2} + b + a\dfrac{x+1}{2} + b\right) = \dfrac{ax}{2} + \dfrac{a}{4} + b = \dfrac{ax+b}{2} = \dfrac{f(x)}{2}$ si et seulement si $a + 2b = 0$ ce qui montre que $f(x) = b(1-2x)$. Ainsi, $E_{1/2}(T) = \mathrm{Vect}(g)$ avec $g : x \mapsto 1 - 2x$ et $\dfrac{1}{2} \in \mathrm{Sp}(T)$.

6.184 **a.** g est bien définie par définition de l'image de f. De plus, g est linéaire car f l'est.

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$, alors $x \in H$ et $g(x) = f(x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme $H \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, on a $x = 0$ ce qui montre que $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$. Ainsi, g est injective.
- Bien sûr, on n'utilise pas la formule du rang pour montrer la surjectivité car on est en train de prouver le théorème du rang. Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $E = H + \mathrm{Ker}(f)$, il existe $a \in H$ et $b \in \mathrm{Ker}(f)$ tels que $x = a + b$. Ainsi, $y = f(a+b) = f(a) + f(b) = f(a) = g(a)$ donc $y \in \mathrm{Im}\,(g)$. Ainsi, g est surjective.

L'application $g : H \to \mathrm{Im}\,(f)$ définie par $g(x) = f(x)$ est un isomorphisme.

b. Posons $r = \mathrm{rang}\,(f)$, alors $\dim(H) = \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \mathrm{rang}\,(f) = r$. Soit une base $\mathcal{B}'_1 = (v_1, \cdots, v_r)$ de H, alors $\mathcal{B}' = (f(v_1), \cdots, f(v_r))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ avec la question **a.**. On complète pour avoir une $\mathcal{B}_2 = (f(v_1), \cdots, f(v_r), w_{r+1}, \cdots, w_n)$ de $\mathbb{C}^n$. Soit $(v_{r+1}, \cdots, v_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$, comme $E = H \oplus \mathrm{Ker}(f)$, $\mathcal{B}_1 = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)$ est une autre base de $\mathbb{C}^n$. Par construction , l'image des r premiers vecteurs de $\mathcal{B}_1$ donne les r premiers vecteurs de $\mathcal{B}_2$ et celle des $n-r$ derniers donne 0 donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$.

c. Si u est l'endomorphisme canoniquement associé à C, si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à $\mathcal{B}_2$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à la base canonique de $\mathbb{C}^n$, par formule de changement de base, $\mathrm{Mat}_{can}(u) = C = PJ_rQ = P\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)Q$.

d. Par hypothèse, avec les notations de la question **c.**, on a $APJ_rQ = PJ_rQB$ donc $(P^{-1}AP)J_r = J_r(QBQ^{-1})$. En posant $A' = P^{-1}AP$ et $B' = QBQ^{-1}B$, on a $A'J_r = J_rB'$ et, comme A et A' (resp. B et B') sont semblables, on a $\chi_A = \chi_{A'}$ (resp. $\chi_B = \chi_{B'}$). Écrivons $A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ (avec les mêmes tailles des blocs que pour J_r), de sorte que $A'J_r = J_rB'$ se transforme en $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A_1 = B_1$, $A_3 = 0$ et $B_2 = 0$. La matrice $A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$ est triangulaire par blocs donc $\chi_{A'} = \chi_A = \chi_{A_1}\chi_{A_4}$. De même, comme $B' = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, on a $\chi_{B'} = \chi_B = \chi_{A_1}\chi_{B_4} = \chi_{B_1}\chi_{B_4}$. Comme le polynôme χ_{A_1} est de degré r et qu'il est en facteur de χ_A et de χ_B, A et B admettent au moins r valeurs propres en commun (comptées avec leurs ordres de multiplicité).

e. Si $AC = CB$ et que $\text{rang}\,(C) = n$, alors C est inversible donc $A = CBC^{-1}$, A et B sont semblables donc $\chi_A = \chi_B$ et A et B admettent exactement n valeurs propres en commun.

6.185 **a.** En développant par rapport à la première ligne, $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ -1 & X-2 & -1 \\ -2 & 2 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 2 & X+1 \end{vmatrix}$ donc $\chi_A = (X-1)\big[(X-2)(X+1)+2\big] = X(X-1)^2$. Ainsi, $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$. Deux méthodes :

- Comme $A(A - I_3) = A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, d'après le cours, la matrice A n'est pas diagonalisable.
- Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2, on a $\dim(E_1(A)) = 3 - \text{rang}\,(A - I_3) = 1 < 2$ avec la formule du rang donc A n'est pas diagonalisable.

b. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, on sait d'après le cours que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'où l'existence de $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et de $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.

c. Il est clair que $v_1 = (0, 1, -2) \in \text{Ker}(A) = E_0(A)$ et que $v_2 = (0, 1, -1) \in \text{Ker}(A - I_3) = E_1(A)$. Étant donnée la matrice T, on cherche un vecteur v_3 tel que $Av_3 = -3v_1 + 4v_2 + v_3$, ou $(A - I_3)v_3 = -3v_1 + 4v_2 = (0, 1, 2)$ et la première colonne de $A - I_3$ nous permet de prendre $v_3 = (1, 0, 1)$. Ainsi, en posant $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, on vérifie facilement que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et, par formule de changement de base, en notant $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A = PTP^{-1}$ car $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ si f est canoniquement associé à A.

d. Pour $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a $NT = \begin{pmatrix} 0 & b & c - 3a + 4b \\ 0 & e & f - 3d + 4e \\ 0 & h & i - 3g + 4h \end{pmatrix}$ et $TN = \begin{pmatrix} -3g & 3h & -3i \\ d + 4g & e + 4h & f + 4i \\ g & h & i \end{pmatrix}$ donc $NT = TN \iff (b = d = g = h = 0, e = i, c = 3a - 3e)$. Les matrices qui commutent avec T sont de la forme $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 3a - 3e \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$. Cet ensemble s'appelle le commutant de T, noté $C(T)$, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (c'en est même une sous-algèbre). D'après l'expression précédente, $\dim(C(T)) = 3$ car

$C(T) = \text{Vect}(N_1, N_2, N_3)$ avec $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que la famille (N_1, N_2, N_3) est clairement libre.

e. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$. Alors $M \in C(A) \iff AM = MA \iff APNP^{-1} = PNP^{-1}A$ donc $M \in C(A) \iff P^{-1}APN = NP^{-1}AP \iff DN = ND \iff (\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,\ M = P(\alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3)P^{-1})$. Ainsi, on a $C(A) = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$ où $M_1 = PN_1P^{-1}$, $M_2 = PN_2P^{-1}$ et $M_3 = PN_3P^{-1}$. Comme (M_1, M_2, M_3) est libre car image de (N_1, N_2, N_3) par l'automorphisme $\varphi : N \mapsto PNP^{-1}$, $\dim(C(A)) = 3$.

6.186 **a.** Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, le polynôme $\big((\alpha X + \beta)P\big)'$ est bien défini donc φ l'est aussi. De plus, si $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(\lambda P + Q) = \big((\alpha X + \beta)(\lambda P + Q)\big)' = \big(\lambda(\alpha X + \beta)P + (\alpha X + \beta)Q)\big)' = \lambda\big((\alpha X + \beta)P\big)' + \big((\alpha X + \beta)Q\big)'$ par linéarité de la dérivation donc φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b. <u>Méthode 1</u> : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\varphi(P) = \lambda P \iff \alpha P + (\alpha X + \beta)P' = \lambda P$. Traitons deux cas :

- si $\lambda = \alpha$, on a $\varphi(P) = \alpha P \iff (\alpha X + \beta)P' = 0 \iff P' = 0$ car $\alpha X + \beta \neq 0$ donc $E_\alpha(\varphi) = \text{Vect}(1)$ et α est bien valeur propre de φ.
- si $\lambda \neq \alpha$, on a $\varphi(P) = \lambda P \iff (\lambda - \alpha)P = (\alpha X + \beta)P'$ (R). Si P de degré $n \in \mathbb{N}$ vérifie cette relation, en identifiant le terme en X^n dans (R), on trouve $\lambda - \alpha = \alpha n$ donc $\lambda = (n+1)\alpha$. Réciproquement, si $\lambda = (n+1)\alpha$ et $n\alpha P = (\alpha X + \beta)P'$ et si z est une racine d'ordre $r \geqslant 1$ de P de degré n, si on suppose que $z \neq -\dfrac{\beta}{\alpha}$, alors z est racine d'ordre r de $n\alpha P$ et d'ordre $r - 1$ de $(\alpha X + \beta)P'$ ce qui est absurde. Ainsi, la seule racine possible de P est $-\dfrac{\beta}{\alpha}$ donc $P = k(\alpha X + \beta)^n$ où $k\alpha^n$ est le coefficient dominant de P. On vérifie que $\varphi\big((\alpha X + \beta)^n\big) = (n+1)\alpha(\alpha X + \beta)^n = (n+1)\alpha P$ donc P est vecteur propre de φ associé à la valeur propre $(n+1)\alpha$.

Les deux cas se confondent en une même conclusion, $Sp(\varphi) = \alpha\,\mathbb{N}^* = \{\alpha, 2\alpha, \cdots\}$ et, pour tout entier naturel n, le sous-espace $E_{(n+1)\alpha}(\varphi)$ est la droite $\text{Vect}\big((\alpha X + \beta)^n\big)$.

<u>Méthode 2</u> : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\varphi(P) = \lambda P \iff (\alpha X + \beta)P' = (\lambda - \alpha)P$ ce qui équivaut au fait que P est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $(\alpha t + \beta)y' - (\lambda - \alpha)y = 0$ qu'on résout sur $I_1 = \left]-\infty; -\dfrac{\beta}{\alpha}\right[$ et $I_2 = \left]-\dfrac{\beta}{\alpha}; +\infty\right[$. Comme une primitive de $t \mapsto \dfrac{\lambda - \alpha}{\alpha t + \beta}$ est $t \mapsto \dfrac{\lambda - \alpha}{\alpha}\ln(|\alpha t + \beta|)$, les solutions de (E) sur I_k sont les fonctions $t \mapsto A_k \exp\left(\dfrac{\lambda - \alpha}{\alpha}\ln(|\alpha t + \beta|)\right) = A_k|\alpha t + \beta|^{\frac{\lambda}{\alpha} - 1}$ avec $A_k \in \mathbb{R}$. Pour que cette fonction soit polynomiale, il est nécessaire et suffisant que $\dfrac{\lambda}{\alpha} \in \mathbb{N}^*$ donc que $\lambda \in \alpha\,\mathbb{N}^*$ et, si $\lambda = (n+1)\alpha$ avec $n \in \mathbb{N}$, les polynômes P et $A_k(\alpha X + \beta)^n$ coïncident sur I_2 (ensemble infini) donc sont formellement égaux ce qui prouve à nouveau que $E_{(n+1)\alpha} = \text{Vect}((\alpha X + \beta)^n)$.

c. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg\big((\alpha X + \beta)P\big) \leqslant 1 + n$ donc $\deg\big(((\alpha X + \beta)P)'\big) \leqslant 1 + n - 1 = n$ ce qui justifie bien que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ donc que φ_n est bien définie. Comme $\mathcal{B} = \big((\alpha X + \beta)^k\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre (de degrés échelonnés) de cardinal $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de φ donc de φ_n. La matrice de φ_n dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $\text{diag}(\alpha, 2\alpha, \cdots, (n+1)\alpha)$ donc $\det(\varphi_n) = (n+1)!\alpha^{n+1}$ et $\text{Tr}\ (\varphi_n) = \dfrac{(n+1)(n+2)\alpha}{2}$.

6.187 Soit $\lambda \in \mathsf{Sp}(M)$, alors $\chi_M(\lambda) = P(\lambda) = 0$ donc distinguons deux cas :

- si $|\lambda| < 1$, alors comme $a_n = 1$ car χ_M est unitaire, on a clairement $|\lambda| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$.
- si $|\lambda| \geqslant 1$, on a $\lambda^n = -\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k$ donc, par inégalité triangulaire, il vient $|\lambda|^n \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k||\lambda|^k$ or $|\lambda|^k \leqslant |\lambda|^{n-1}$ donc $|\lambda|^n \leqslant |\lambda|^{n-1}\sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|$ et il suffit de diviser par $|\lambda| > 0$ pour avoir l'inégalité $|\lambda| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|$ dont découle l'inégalité $|\lambda| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$ souhaitée.

6.188 **a.** f est bien définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a le calcul $f(\lambda x + y) = \lambda x + y - \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda x_k + y_k)\Big)v = \lambda x - \lambda\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big)\Big)v + y - \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\Big)v = \lambda f(x) + f(y)$. Ainsi, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Il est clair que si $f(y) = y$, alors $y = f(y) \in \mathrm{Im}\,(f)$. Réciproquement, si $y \in \mathrm{Im}\,(f)$, il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x) = x - \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big)v$. Par linéarité de f, $f(y) = f(x) - \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big)f(v)$. Mais, par hypothèse, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k = 1$ donc $f(v) = v - 1.v = 0_{\mathbb{R}^n}$ puis $f(y) = x - \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big)v - \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big).0_{\mathbb{R}^n} = y$. Par double implication, on a bien montré l'équivalence : $y \in \mathrm{Im}\,(f) \Longleftrightarrow f(y) = y$.

c. Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathsf{Ker}(f)$, alors d'après la question précédente, on a $f(y) = y$ car $y \in \mathrm{Im}\,(f)$ mais aussi $f(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$ car $y \in \mathsf{Ker}(f)$. Ainsi, $y = 0_{\mathbb{R}^n}$ d'où $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathsf{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\mathsf{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont en somme directe. De plus, par la formule du rang $\mathsf{dim}(\mathrm{Im}\,(f)) + \mathsf{dim}(\mathsf{Ker}(f)) = n$ donc ce qui précède permet de conclure que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathsf{Ker}(f)$. Ainsi, soit $x = y + z \in \mathbb{R}^n$ avec $y \in \mathrm{Im}\,(f)$ et $z \in \mathsf{Ker}(z)$, alors $f(x) = f(y) + 0 = y$ d'après **b.** car $y \in \mathrm{Im}\,(f)$ et on a alors $f^2(x) = f(y) = y = f(x)$ donc f est un projecteur.

d. Comme $f(x) = x \Longleftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$ car $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et que $\varphi : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ est une forme linéaire non nulle $(\varphi(v) = 1 \neq 0)$ sur $\mathbb{R}^n$, $E_1(f) = \mathrm{Im}\,(f) = \mathsf{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, $\mathsf{dim}(E_0(f)) = n-(n-1) = 1$ et $v \in E_0(f)$ donc $E_0(f) = \mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Vect}(v)$ est une droite.

Par conséquent, f est la projection sur l'hyperplan $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0\}$ parallèlement à la droite $\mathsf{Ker}(v)$. Dans le cas particulier où $n = 1$, f est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}$.

6.189 **a.** Soit $\lambda \in \mathsf{Sp}(M)$ et $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme annulateur de M. Il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k X = \lambda^k X$. Ainsi, on peut calculer $0 = P(M)X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k M^k X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \lambda^k X = P(\lambda)X = 0$. Comme $X \neq 0$, on a forcément $P(\lambda) = 0$.

On a re-démontré une propriété du cours : les valeurs propres de M sont des racines de P annulateur de M.

b. Si M est symétrique, $M^2 + M - I_n = 0$ donc $P = X^2 + X - 1$ annule M. Or $P = (X - \alpha)(X - \beta)$ avec $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ donc P est scindé à racines simples d'où, par théorème, M est diagonalisable. D'après la question **a.**, on a $\mathsf{Sp}(M) \subset \{\alpha, \beta\}$. Comme χ_M est scindé car M est diagonalisable, on a donc $\chi_M = (X - \alpha)^p (X - \beta)^q$ avec $p = m_\alpha(M)$ et $q = m_\beta(M)$ et, d'après le cours, on a $\mathsf{Tr}\ (M) = p\alpha + q\beta$ et $\mathsf{det}(M) = \alpha^p \beta^q$. Comme 0 n'est pas valeur propre de M, M est inversible.

De plus, $2\text{Tr}(M) = -p-q+(p-q)\sqrt{5} = -n+(p-q)\sqrt{5}$. Comme $n > 0$, si on avait $\text{Tr}(M) = 0$, on aurait $p-q \neq 0$ et $\sqrt{5} = \dfrac{n}{p-q}$, ce qui montrerait que $\sqrt{5}$ est un rationnel : NON !

Par conséquent, $\text{Tr}(M) \neq 0$ et $\det(M) \neq 0$ donc $\text{Tr}(M) \times \det(M) \neq 0$.

c. Si on ne suppose plus M symétrique, on cherche un polynôme annulateur de degré supérieur. En transposant, on obtient $({}^tM)^2 + M = I_n$ donc $(I_n - M^2)^2 + M - I_n = M^4 - 2M^2 + M = 0$ et $Q = X^4 - 2X^2 + X$ annule M. Or $Q = X(X-1)(X^2+X-1) = X(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)$ qui est à nouveau scindé à racines simples. Ainsi M est encore diagonalisable.

d. Puisque $({}^tM)^2 = I_n - M$, en passant au déterminant, on a $\det({}^t(M^2)) = \det(M)^2 = \det(I_n - M) = \chi_M(1)$. Ainsi, $\det(M) \neq 0 \iff \chi_M(1) \neq 0 \iff$ (1 n'est pas valeur propre de M).

Ou encore, M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

6.190 **a.** L'application φ est bien définie de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$ et elle est clairement linéaire (il suffit de l'écrire). Comme $\dim(\mathbb{K}_{n-1}[X]) = \dim(\mathbb{K}^n) = n$, φ est un isomorphisme si et seulement si φ est injective. Or, si $P \in \text{Ker}(\varphi)$, on a $\varphi(P) = (P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n)) = (0, \cdots, 0)$ donc $P(\lambda_1) = \cdots = P(\lambda_n) = 0$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des racines de P. Il y a donc n racines distinctes d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n, on sait d'après le cours que ceci implique $P = 0$. φ est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$.

Pour $(\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$, l'unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui vérifie $\varphi(P) = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ s'appelle le polynôme d'interpolation de LAGRANGE et on a classiquement $P = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \dfrac{X - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$.

b. Soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, comme λ est valeur propre simple de f, on sait d'après le cours que $E_\lambda(f) = \text{Vect}(v)$. Alors, $f\big(g(v)\big) = g\big(f(v)\big) = \lambda g(v)$ donc $g(v) \in \text{Vect}(v) = E_\lambda(f)$. Alors $\exists \beta \in \mathbb{R},\ g(v) = \beta v$ donc v est un vecteur propre pour g (associé à la valeur propre β). Par conséquent, tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g (mais la réciproque n'est pas forcément vraie).

c. Comme f est diagonalisable puisqu'il admet n valeurs propres distinctes en dimension n, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ composée par des vecteurs propres de f. D'après la question **b.**, ces vecteurs sont aussi des vecteurs propres pour g. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de E composée de vecteurs propres communs à f et à g.

d. Avec $\mathcal{B}$ une des bases de codiagonalisation de la question précédente, il existe donc deux matrices diagonales $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $D' = \text{diag}(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ telles que $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$ et $D' = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$. Pour $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on a $g = P(f) \iff D' = P(D) \iff (\forall k \in [\![1;n]\!],\ \beta_k = P(\lambda_k)) \iff (\beta_1, \cdots, \beta_n) = \varphi(P)$. D'après la question **a.**, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui vérifie ceci donc tel que $g = P(f)$.

e. $\mathcal{C}(f) \subset \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{C}(f)$ est non vide car $\text{id}_E \in \mathcal{C}(f)$. De plus, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(g,h) \in \mathcal{C}(f)^2$, alors $\lambda g + h \in \mathcal{C}(f)$ car $f \circ (\lambda g + h) = \lambda f \circ g + f \circ h = \lambda g \circ f + h \circ f = (\lambda g + h) \circ f$. Ainsi, $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ (même une sous-algèbre) et la question précédente montre que l'application $\psi : \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathcal{C}(f)$ définie par $\psi(P) = P(f)$ est un isomorphisme. Ainsi, $\dim(CR(f)) = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X]) = n$.

6.191 **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A(A) = 0$ (théorème de CAYLEY-HAMILTON).

b. Si A et B sont semblables, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = QB^kQ^{-1}$ donc, pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_kA^k$ donc $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_kQB^kQ^{-1} = Q\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_kB^k\Big)Q^{-1} = QP(B)Q^{-1}$ donc $P(A)$ et $P(B)$ sont aussi semblables.

c. Par une récurrence simple et un calcul par blocs, on montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$. Pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k \in \mathbb{R}[X]$, on a $P' = \sum_{k=1}^{+\infty} ka_kX^{k-1}$ donc $XP' = \sum_{k=1}^{+\infty} ka_kX^k = \sum_{k=0}^{+\infty} ka_kX^k$. Ainsi, $P(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_kM^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} a_kA^k & \sum_{k=0}^{+\infty} ka_kA^k \\ 0_n & \sum_{k=0}^{+\infty} a_kA^k \end{pmatrix}$ donc $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$.

d. Si M est diagonalisable, il existe d'après le cours un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(M) = 0$ donc $P(A) = 0$ d'après la relation de la question précédente (voir le bloc en haut à gauche par exemple). Ainsi, le polynôme scindé à racines simples P annule A ce qui prouve que A est aussi diagonalisable.

e. Avec ce même polynôme P, on a aussi $AP'(A) = 0$ d'après **c.** donc XP' est annulateur de A. Si λ est une valeur propre de A, comme P et XP' annulent A, on sait d'après le cours que $P(\lambda) = 0 = \lambda P'(\lambda)$. Mais comme les racines de P sont simples par hypothèse, P et P' n'ont pas de racine commune d'où $\lambda = 0$ et 0 est la seule valeur propre de A. Comme A est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, la matrice A est semblable à la matrice nulle donc $A = 0$.

Réciproquement, si $A = 0$, alors $M = 0$ donc M est diagonalisable. Par conséquent, la conclusion de cet exercice et que $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

6.192 **a.** La matrice M est symétrique réelle donc elle est diagonalisable par le théorème spectral. Dans le détail, si $v_1 = (1,1,1)$, on a $Mv_1 = 2v_1$, et $M + I_3$ est clairement de rang 1 donc, par la formule du rang, $\dim(E_{-1}(M)) = 3 - 1 = 2$. Comme $E_2(M)$ et $E_{-1}(M)$ sont en somme directe d'après le cours, on a $\mathbb{R}^3 = E_2(M) \oplus E_{-1}(M)$ et la matrice M est diagonalisable par définition. Une base de vecteurs propres est $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ avec les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$ et $v_3 = (1,0,-1)$ par exemple. Par la formule de changement de base, si on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a donc $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b. Par définition des opérations matricielles, on a $R(a,b) = aI_3 + bM$.

c. D'après **a.**, $M = PDP^{-1}$ donc $M^n = PD^nP^{-1}$ (classique). La trace des deux matrices semblables M^n et D^n sont donc égales et $u_n = \mathrm{Tr}\ (M^n) = \mathrm{Tr}\ (D^n) = 2^n + 2(-1)^n \in \mathbb{N}$ et on a clairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d. $R(a,b) = aI_3 + bPDP^{-1} = aPP^{-1} + bPDP^{-1} = P(aI_3 + bD)P^{-1}$ donc $R(a,b)^n = P(aI_3 + bD)^nP^{-1}$. Ainsi, $v_n = (a+2b)^n + 2(a-b)^n$. Traitons trois cas :

- Si $a + 2b \in]-1;1]$ et $a - b \in]-1;1]$, $\big((a+2b)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big((a-b)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et les points (a,b) font partie d'un losange plein (avec ou sans les arêtes selon que c'est $<$ ou $\leqslant$) $L = UVWX$ avec $U = (1,0)$, $V = \Big(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\Big)$, $W = (-1,0)$ et $X = \Big(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\Big)$. Comme $L \neq \emptyset$, il existe $(a,b) \in L$ tel que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- Si ($a+2b \in]-1;1]$ et $a-b \notin]-1;1]$) ou si ($a+2b \notin]-1;1]$ et $a-b \in]-1;1]$), une des suites $\big((a+2b)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$

et $\left((a-b)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et l'autre diverge donc leur somme diverge et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

- Si $a+2b \notin]-1;1]$ et $a-b \notin]-1;1]$, comme $|a+2b| = |a-b| \iff (b=0 \text{ ou } b=-2a)$, on traite à part le cas $(a \in]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[$ et $b=0)$ où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge car $v_n = 3a^n$ et le cas $((a \in \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ et $b=-2a)$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge car $v_n = (2+(-1)^n)(3a)^n$; sinon, les deux suites $\left((a+2b)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left((a-b)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent et l'une d'entre elles est négligeable devant l'autre donc leur somme diverge.

Au final, on a mieux que ce qui était demandé par l'énoncé : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la couple (a,b) appartient au losange plein (avec ou sans les arêtes selon que c'est $<$ ou $\leqslant$) $L = UVWX$.

6.193 **a.** Soit $\mathcal{B}_0$ une base fixée de E. Pour $P \in GL_n(\mathbb{K})$, soit $\mathcal{B}$ la base de E telle que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Par hypothèse, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Mais on sait d'après le cours que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}AP$ par formule de changement de base. Ainsi, $P^{-1}AP = A$ donc, en multipliant par P à gauche, $PA = AP$.

b. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, L'application $\chi_B : \lambda \mapsto \det(\lambda I_n - B)$ est, d'après le cours, une fonction polynomiale de degré n, donc ce n'est pas la fonction nulle et il existe donc une infinité de scalaires λ tel que $\chi_B(\lambda) \neq 0$ (c'est même mieux que ça, χ_B ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs, les valeurs propres de B). Ainsi, pour ces valeurs de λ, on a $\lambda I_n - B$ qui est inversible, donc $B - \lambda I_n$ l'est aussi. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ (on peut même choisir $\lambda \neq 0$ mais ça n'a aucun intérêt) tel que $P = B - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{K})$. D'après la question précédente, on a $PA = AP$ donc $(B-\lambda I_n)A = BA - \lambda A = AB - \lambda A = A(B - \lambda I_n)$ et, en soustrayant λA, $BA = AB$.

c. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, comme $E_{k,k}A = (\delta_{i,k}a_{k,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (\delta_{j,k}a_{i,k})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = AE_{k,k}$ d'après la question précédente, on en déduit, pour $j=k$ et $i \neq k$, que $a_{i,k} = 0$ et, pour $i=k$ et $j\neq k$, que $a_{k,j}=0$. Par conséquent, en faisant varier k, la matrice M est diagonale.

Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, comme $E_{i,j}A = AE_{i,j}$, on en déduit $a_{i,i} = a_{j,j}$ (voir la case (i,j) des deux produits) donc $A = a_{1,1}I_n$ donc $f = a_{1,1}\text{id}_E$. L'endomorphisme f défini comme ceci est l'homothétie de rapport $a_{1,1}$.

6.194 **a.** Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $\sum\limits_{j=1}^{n} x_jC_j = 0$, par définition du produit matriciel, $AX = 0$ donc $X \in \text{Ker}(A)$.

b. Clairement, on a $\text{rang}\,(A) = 2$ donc, d'après la formule du rang, il vient $\dim(\text{Ker}(A)) = 5-2 = 3$. En notant C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 les colonnes de la matrice A, on a $C_1 - C_5 = C_1 - C_4 = C_1 - C_3 = 0$ donc les vecteurs colonnes V_1, V_2, V_3 sont dans $\text{Ker}(A) =$ si ${}^tV_1 = (1\ 0\ 0\ 0\ -1)$, ${}^tV_2 = (1\ 0\ 0\ -1\ 0)$ et ${}^tV_3 = (1\ -1\ 0\ 0\ 0)$. Comme (V_1, V_2, V_3) est visiblement libre, c'est une base de $\text{Ker}(A)$ et $\text{Ker}(A) = \text{Vect}(V_1,V_2,V_3)$.

On cherche d'autres vecteurs propres pour construire une base de vecteurs propres, or on sait que ces vecteurs propres associés à des valeurs propres non nulles sont inclus dans l'image de A. Or $\text{Im}\,(A) = \text{Vect}(C_1, C_3)$ car $C_2 = C_4 = C_5 = C_1$. Or on constate qu'en notant $V_4 = C_1$ tel que ${}^tV_4 = (1\ 0\ 0\ 0\ 1)$ on a $AV_4 = 2V_4$.

<u>Méthode 1</u> : comme $\text{Tr}\,(A) = 5$, la dernière valeur propre cherchée est $1 = 5-2-0-0-0$ et on trouve sans peine que $AV_5 = V_5$ si V_5 est tel que ${}^tV_5 = (-3\ 1\ 1\ 1\ -3)$ en résolvant le système $AX = X$.

<u>Méthode 2</u> : on cherche le dernier vecteur de notre base dans $\text{Im}\,(A)$ mais pas proportionnel à $V_4 = C_1$ donc de la forme $V_5 = C_3 + \alpha C_1$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Par un calcul simple, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ la dernière valeur propre cherchée, on a $AV_5 = \lambda V_5 \iff (\lambda = 1 \text{ et } \alpha = -4)$ donc ${}^tV_5 = (-3,1,1,1,-3)$ convient et $V_5 \in E_1(A)$.

Comme $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont en somme directe d'après le cours, que $\dim(E_0(A)) = 3$, $\dim(E_1(A)) \geqslant 1$ et $\dim(E_2(A)) \geqslant 1$ d'après ce qui précède, on a forcément, puisque $3+1+1 \geqslant 5 = \dim(\mathbb{R}^5)$, $E_2(A) = \text{Vect}(V_4)$ et $E_1(A) = \text{Vect}(V_5)$ de dimension 1. A est bien diagonalisable par définition car $\mathbb{R}^5 = E_0(A) \oplus E_2(A) \oplus E_1(A)$ et $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $\chi_A = X^3(X-1)(X-2)$.

6.195 **a.** Pour $m \in \mathbb{R}$, on a $\chi_{A_m} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1 \\ -1 & X-1 & 1 \\ m-2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 2-X \\ -1 & X-1 & 2(2-X) \\ m-2 & 2-m & X-2 \end{vmatrix}$ après avoir effectué $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1 - 2C_2$ et $\chi_{A_m} = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ -1 & X-1 & -2 \\ m-2 & 2-m & 1 \end{vmatrix}$ en factorisant par $X-2$ dans la troisième colonne. On développe et $\chi_{A_m} = (X-2)\big((X-1)(X-1+4-2m) + (m-2)(X-2)\big) = (X-2)(X^2 - mX + 1)$.

b. Traitons les deux valeurs $m = 1$ et $m = 2$:

Si $m = 1$, $\chi_{A_1} = (X-2)(X^2 - X + 1) = (X-2)(X+j)(X+j^2)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ mais n'est même pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc A_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mais même pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si $m = 2$, $\chi_{A_2} = (X-2)(X^2 - 2X + 1) = (X-2)(X-1)^2$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc A_2 est trigonalisable et $\text{Sp}(A_2) = \{1, 2\}$. Comme $A_2 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, $\dim(E_1(A_2)) = 1$ par la formule du rang donc A_2 n'est pas diagonalisable.

c. Le discriminant Δ_m de $X^2 - mX + 1$ vaut $\Delta_m = m^2 - 4$. Si $\Delta_m > 0$, on pose $\alpha_m = \dfrac{m - \sqrt{m^2-4}}{2}$ et $\beta_m = \dfrac{m + \sqrt{m^2-4}}{2}$ de sorte que $\alpha_m < \beta_m$. Si $\alpha_m = 2$ ou $\beta_m = 2$, on a $(m-4)^2 = m^2 - 4$ en passant $m - 4 = \pm\sqrt{m^2-4}$ au carré donc $m^2 - 8m + 16 = m^2 - 4$ soit $m = \dfrac{5}{2}$. Avec les signes, α_m ne vaut jamais 2 mais $\beta_m = 2$ si et seulement si $m = \dfrac{5}{2}$. On traite plusieurs cas :

Si $m \in]-2; 2[$, $\Delta_m < 0$ donc χ_{A_m} est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ mais n'est même pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc A_m est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mais même pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si $m = 2$, on a déjà en vu en **b.** que A_2 est trigonalisable mais pas diagonalisable.

Si $m = -2$, $\chi_{A_m} = (X-2)(X^2 + 2X + 1) = (X-2)(X+1)^2$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc A_{-2} est trigonalisable et $\text{Sp}(A_{-2}) = \{-1, 2\}$. Comme $A_{-2} + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, $\dim(E_{-1}(A_{-2})) = 1$ par la formule du rang donc A_{-2} n'est pas diagonalisable.

Si $m = 5/2$, $\chi_{A_{5/2}} = (X-2)^2\Big(X - \dfrac{1}{2}\Big)$ donc $\text{Sp}(A_{5/2}) = \{2, 5/2\}$, $\chi_{A_{5/2}}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc $A_{5/2}$ est trigonalisable. Comme $A_{5/2} - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est de rang 2, $\dim(E_2(A_{5/2})) = 1$ par la formule du rang donc $A_{5/2}$ n'est pas diagonalisable.

Si $m \notin [-2;2] \cup \{5/2\}$, $\Delta_m > 0$ donc χ_{A_m} est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et ses racines sont $2, \alpha_m$ et β_m qui sont distinctes. Ainsi, A_m est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

6.196 u est bien défini de manière unique en tant qu'endomorphisme car on a imposé l'image par u d'une base de l'espace de départ $\mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ donc $u(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k u(e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k e_{k+1}$.

La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est donc $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On montre facilement par récurrence sur l'entier i que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $u^i(e_j) = e_{i+j}$ si $i+j \leqslant n$ et $u^i(e_j) = 0$ si $i+j > n$. Ainsi, $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $u^n(e_j) = 0$ car $j+n > n$ donc $u^n = 0$. On pouvait aussi dire que $\chi_u = \chi_M = X^n$ donc $u^n = 0$ par Cayley-Hamilton : un grand classique des matrices nilpotentes. Comme $u^{n-1}(e_1) = e_n \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, on a $u^{n-1} \neq 0$ donc u est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotente égal exactement à n.

Analyse : soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u. On peut donc définir $u_F : F \to F$ l'endomorphisme induit par u dans F. Comme $u^n = 0$, on aussi $u_F^n = 0$ donc u_F est aussi nilpotent. Si $F \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, notons $d = \dim(F) \geqslant 1$. Comme le polynôme caractéristique de u_F divise celui de u et qu'il est de degré d, on a $\chi_{u_F} = X^d$ donc $u_F^d = 0$ par Cayley-Hamilton. On pouvait aussi considérer l'indice k de nilpotence de u_F, d'où $u^k = 0$ et $u_F^{k-1} \neq 0$, puis un vecteur $x \in F$ tel que $u_F^{k-1}(x) \neq 0$ et montrer très classiquement que la famille $(x, u(x), \cdots, u^{k-1}(x))$ est libre dans F ce qui montre que $k \leqslant d$. Alors, $u^d = u^{d-k} \circ u^k = 0$.

Ceci signifie que $\forall x \in F$, $u_F^d(x) = u^d(x) = 0$ donc que l'on a l'inclusion $F \subset \text{Ker}(u^d)$. Or on sait que $\text{Im}\,(u^d) = \text{Vect}(u^d(e_1), \cdots, u^d(e_n)) = \text{Vect}(e_{d+1}, \cdots, e_n)$ est de dimension $n-d$ donc, par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(u^d)) = d$. Comme $e_{n-d+1}, \cdots, e_n$ forme une famille libre de vecteurs de $\text{Ker}(u^d)$, on a donc $\text{Ker}(u^d) = \text{Vect}(e_{n-d+1}, \cdots, e_n)$. Ainsi, si F stable par u, on a $F = \text{Ker}(u^d)$ par inclusion et égalité des dimensions avec $d \in [\![1;n]\!]$ ou $F = \{0_{\mathbb{R}^n}\} = \text{Ker}(\text{id}_E) = \text{Ker}(u^0)$.

Synthèse : réciproquement, si $F = \text{Ker}(u^d)$ avec $d \in [\![0;n]\!]$, comme u et u^d commutent, on sait d'après le cours que $\text{Ker}(u^d)$ est stable par u.

Conclusion : les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par u sont exactement les $n+1$ sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(u^d) = \text{Vect}(e_{n-d+1}, \cdots, e_n)$ pour $d \in [\![0;n]\!]$ avec $\text{Ker}(u^0) = \text{Ker}(\text{id}_{\mathbb{R}^n}) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

6.197 **a.** Si $\deg(P) = 1$, $P = a(X - \lambda)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et on a $P(A) = 0$ si on pose la matrice $A = \lambda I_n$. Dans ce cas, on a existence mais aussi unicité de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$ car $a(A - \lambda I_n) = 0$ si et seulement si $A = \lambda I_n$ puisque $a \neq 0$.

Si $\deg(P) = 2$, $P = a(X^2 + bX + c)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $\Delta = b^2 - 4c$. Traitons trois cas :

$\Delta > 0$, $P = a(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On peut prendre $A = \lambda_1 I_n$ ou $A = \lambda_2 I_n$ car, pour ces matrices, on a bien $P(A) = a(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) = 0$.

$\Delta = 0$, $P = a(X - \lambda)^2$ avec $\lambda = -\dfrac{b}{2} \in \mathbb{R}$ et $A = \lambda I_n$ convient encore.

$\underline{\Delta < 0}$, $P = a(X - re^{i\theta})(X - re^{-i\theta}) = a(X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2)$ avec $r > 0$ et $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$ (les deux racines de P sont complexes non réelles conjuguées). On se souvient que la matrice de rotation R_θ de $SO_2(\mathbb{R})$ a pour polynôme caractéristique $\chi_{R_\theta} = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$. On prend, pour $p = 1$ et $n = 2$, la matrice $A_2 = rR_\theta = r\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et on calcule facilement $\chi_{A_2} = X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2$ donc, avec Cayley-Hamilton, on a $A_2^2 - 2r\cos(\theta)A_2 + r^2 I_2 = 0$ donc $P(A_2) = 0$. Il suffit alors de prendre A diagonale par blocs (p blocs) en posant $A = \mathrm{diag}(A_2, \cdots, A_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a $P(A) = \mathrm{diag}(P(A_2), \cdots, P(A_2)) = 0$.

Si $\underline{\deg(P) \geqslant 3}$, traitons à nouveau deux cas :

- si P admet au moins une racine réelle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$ et $P(\lambda I_n) = P(\lambda)I_n = 0$ donc la matrice $A = \lambda I_n$ convient et vérifie $P(A) = 0$.
- si P n'admet pas de racine réelle, on sait d'après d'Alembert-Gauss que P s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles de degré 2, il existe donc une décomposition $P = (X^2 + bX + c)Q$ avec $\Delta = b^2 - 4c < 0$. D'après le cas ci-dessus, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + bA + cI_n = 0$ donc $P(A) = (A^2 + bA + cI_n)Q(A) = 0$ et A convient.

Dans tous les cas, si n est pair, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

b. Si $\underline{\deg(P) = 1}$, $P = a(X - \lambda)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et on a $P(A) = 0$ si on pose la matrice $A = \lambda I_n$.

Si $\underline{\deg(P) = 2}$, $P = a(X^2 + bX + c)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $\Delta = b^2 - 4c$. Traitons trois cas :

$\underline{\Delta \geqslant 0}$, P admet une racine réelle λ (elle peut être double) et, si $A = \lambda I_n$, on a encore $P(A) = 0$.

$\underline{\Delta < 0}$, $P = a(X - re^{i\theta})(X - re^{-i\theta}) = a(X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2)$ avec $r > 0$ et $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$. Comme P n'a pas de racine réelle, il n'y a pas, en identifiant les matrices 1×1 aux scalaires, de matrice $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$. Supposons, pour n impair quelconque, qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$, alors $A^2 - 2r\cos(\theta)A + r^2 I_2 = 0$ donc $(A - r\cos(\theta)I_n)^2 + r^2\sin^2(\theta)I_n = 0$ car on a $X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2 = (X - r\cos(\theta))^2 + r^2\sin^2(\theta)$. Par conséquent, en passant au déterminant, $\det(A - r\cos(\theta)I_n)^2 = \det\big((A - r\cos(\theta)I_n)^2\big) = \det(-r^2\sin^2(\theta)I_n) = -(r^{2n}\sin^{2n}(\theta)) < 0$. Comme $\det(A - r\cos(\theta)I_n)^2 \geqslant 0$, ceci fournit une contradiction et il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

Si $\underline{\deg(P) \geqslant 3}$, traitons à nouveau deux cas :

- si P admet au moins une racine réelle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$ et $P(\lambda I_n) = P(\lambda)I_n = 0$ donc la matrice $A = \lambda I_n$ convient et vérifie $P(A) = 0$.
- si P n'admet pas de racine réelle, si on suppose qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A)$, d'après le cours, les valeurs propres de A sont incluses dans les racines de P, ce qui justifie que A n'a pas de valeur propre réelle. Or le polynôme χ_A est de degré n impair donc, comme il est unitaire, on a $\lim\limits_{t \to -\infty} \chi_A(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \chi_A(t) = +\infty$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque χ_A est continue, il existe une racine réelle de χ_A, qui est donc une valeur propre de A, c'est absurde.

On en déduit que, si n est impair et si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a deux cas :

- si P admet une racine réelle, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

- si P n'admet pas de racine réelle, il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

6.198 Comme le polynôme $X^n - 1$ annule A par hypothèse et que $X^n - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ (ses racines sont les n racines n-ièmes de l'unité), la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ où z_1, z_2 sont des racines n-ièmes de l'unité car toute valeur propre de A est racine de tout polynôme annulateur de A, notamment $X^n - 1$. Par conséquent, $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(D) = z_1 + z_2$ et $\det(A) = \det(D) = z_1 z_2$. Ainsi, $|\mathrm{Tr}\,(A)| \leqslant |z_1| + |z_2| \leqslant 1 + 1 = 2$ donc $\mathrm{Tr}\,(A) \in [\![-2;2]\!]$ et $|\det(A)| = |z_1||z_2| = 1$ donc $\det(A) \in \{-1, 1\}$. De plus, puisque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Tr}\,(A) = a + d \in \mathbb{Z}$ et $\det(A) = ad - bc \in \mathbb{Z}$ et on sait d'après le cours que $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\,(A)X + \det(A) \in \mathbb{Z}[X]$. Les valeurs possibles de $\mathrm{Tr}\,(A)$ et $\det(A)$ montrent que $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\,(A)X + \det(A)$ ne peut être que l'un des 10 polynômes suivants : $X^2 - 2X + 1$, $X^2 - X + 1$, $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$, $X^2 + 2X + 1$ ou $X^2 - 2X - 1$, $X^2 - X - 1$, $X^2 - 1$, $X^2 + X - 1$, $X^2 + 2X - 1$.

Éliminons quelques cas ! En effet, si $\det(A) = -1$, $z_1 z_2 = -1$ donc z_1 et z_2 ne peuvent pas être conjugués sinon $z_1 z_2 = z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = 1$. Par conséquent, z_1 et z_2 sont des racines réelles de $X^n - 1$ donc ne peuvent être que ± 1. Pour avoir $z_1 z_2 = -1$, forcément $z_1 = 1 = -z_2$ ou $z_1 = -1 = -z_2$ d'où $\mathrm{Tr}\,(A) = 1 - 1 = 0$. Ainsi, χ_A est l'un des 6 polynômes $X^2 - 2X + 1$, $X^2 - X + 1$, $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$, $X^2 + 2X + 1$, $X^2 - 1$.

<u>Cas 1 : $\chi_A = X^2 - 2X + 1$</u> : comme $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$ donc, comme A est diagonalisable, A est donc semblable à la matrice I_2, c'est-à-dire $A = PI_2P^{-1} = I_2$ donc $A^{12} = I_2$.

<u>Cas 2 : $\chi_A = X^2 - X + 1$</u> : comme A est diagonalisable et que $X^2 - X + 1 = (X + j)(X + j^2)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{-j, -j^2\}$, on a $A = P\begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j^2 \end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^6 = I_2$ car $(-j, -j^2) \in \mathbb{U}_6^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Cas 3 : $\chi_A = X^2 + 1$</u> : comme A est diagonalisable et que $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{-i, i\}$, on a $A = P\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ donc $A^4 = I_2$ car $(-i, i) \in \mathbb{U}_4^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Cas 4 : $\chi_A = X^2 + X + 1$</u> : comme A est diagonalisable et que $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{j, j^2\}$, on a $A = P\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^3 = I_2$ car $(j, j^2) \in \mathbb{U}_3^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Cas 5 : $\chi_A = X^2 + 2X + 1$</u> : comme $X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1\}$ donc, comme A est diagonalisable, $A = P(-I_2)P^{-1} = -I_2$ donc $A^2 = I_2$ puis $A^{12} = I_2$.

<u>Cas 6 : $\chi_A = X^2 - 1$</u> : comme $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$ donc, comme A est diagonalisable, $A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^2 = I_2$ car $(-1, 1) \in \mathbb{U}_2^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Fondamentalement, c'est parce les racines de ces 6 polynômes sont $1, -1, i, -i, j, j^2, -j, -j^2$, c'est-à-dire des racines seconde, troisième, quatrième, sixième de l'unité et que ppcm $(2,3,4,6) = 12$, donc toutes ces valeurs $z \in \{1, -1, i, -i, j, j^2, -j, -j^2\}$ vérifient $z^{12} = 1$.

Réciproquement, soit une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que χ_A est l'un des polynômes $X^2 - X + 1$, $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$, $X^2 - 1$, alors comme $X^{12} - 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$, d'après Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A) = 0$ donc, comme χ_A divise $X^{12} - 1$, on a aussi $A^{12} = I_2$.

Par contre, si $\chi_A = (X+1)^2$ ou $\chi_A = (X-1)^2$, on ne peut pas être sûr que $A^{12} = I_2$ car A pourrait ne pas être diagonalisable, comme dans les cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6.199 **a.** ($\Longrightarrow$) Supposons que AB est symétrique, alors $AB = (AB)^T = B^TA^T$. Or A et B sont symétriques donc $A^T = A$ et $B^T = B$ ce qui donne $AB = BA$.
($\Longleftarrow$) Supposons que $AB = BA$, alors $(AB)^T = B^TA^T = BA$ car A et B sont symétriques. Mais comme $AB = BA$, on a $(AB)^T = AB$ donc AB est symétrique.

Par double implication, on a bien AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

b. • Bien sûr, si $n = 1$ toutes les matrices étant symétriques, on ne peut pas trouver de matrices A et B symétriques dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ telles que AB ne soit pas symétrique.

• Si $n = 2$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique, A_2 et B_2 le sont.

• Si $n > 2$, il suffit de poser $A_n = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ et on a encore A_n et B_n symétriques alors que $A_nB_n = \begin{pmatrix} A_2B_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

c. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ composée par des vecteurs propres communs à A et B. En posant P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}$ et en notant a et b les endomorphismes canoniquement associés à A et B, on a $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(a)$, $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(b)$. Par formule de changement de base, $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = P^{-1}AP$ et $D' = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = P^{-1}BP$ sont diagonales. Comme D et D' commutent, $AB = (PDP^{-1})(PD'P^{-1}) = PDD'P^{-1} = PD'DP^{-1} = (PD'P^{-1})(PDP^{-1}) = BA$. D'après **a.**, AB est symétrique.

6.200 **a.** Si $\alpha = 1$, on a $f^2 + 2f + \text{id}_E = (f + \text{id}_E)^2 = 0$ donc le polynôme $(X+1)^2$ est annulateur de f. Soit A la matrice de f dans n'importe quelle base de E, on a aussi $(X+1)^2$ annulateur de A et on sait qu'alors la seule valeur propre complexe possible de A est -1, ce qui prouve que $\chi_A = (X+1)^2 = \chi_f$ car χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$. Comme χ_f est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, f est trigonalisable d'après le cours, il existe donc une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ du plan E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Il y a deux cas :

- Si $a = 0$, alors $f = -\text{id}_E$.
- Si $a \neq 0$, en prenant la base $\mathcal{B}' = (av_1, v_2)$ de E, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dans les deux cas, $\det(f) = 1$ et $\text{Tr}\,(f) = -2$ donc $\chi_f = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$; on pouvait s'en douter.

b. <u>Méthode 1</u> : toujours en prenant la matrice A de f dans n'importe quelle base, on a $P = X^2 + 2X + \alpha$ annulateur de A mais le discriminant $\Delta = 4 - 4\alpha$ de P vérifie $\Delta < 0$ donc P n'a pas de racine réelle. D'après le cours, les valeurs propres réelles de A sont soit $z = z_1 = -1 + i\sqrt{\alpha - 1}$ soit $z = z_2 = -1 - i\sqrt{\alpha - 1}$. Comme χ_A est réel car A est réelle, z_1 et z_2 étant conjuguées, elles ont la même multiplicité dans χ_A ce qui fait que $\chi_f = \chi_A = (X - z)^m(X - \overline{z})^m = (X^2 + 2X + \alpha)^m$ donc $n = \deg(\chi_f) = 2m$ est pair.

<u>Méthode 2</u> : $f^2 + 2f + \alpha\text{id}_E = (f + \text{id}_E)^2 + (\alpha - 1)\text{id}_E$ donc $(f + \text{id}_E)^2 = (1 - \alpha)\text{id}_E$. En passant au déterminant, on a $\det((f + \text{id}_E)^2) = (\det(f + \text{id}_E))^2 = (1 - \alpha)^n$. Or $\det(f + \text{id}_E) \in \mathbb{R}$ donc $(\det(f + \text{id}_E))^2 = (1 - \alpha)^n \geqslant 0$ ce qui montre que n est pair car $1 - \alpha < 0$.

c. Soit $e_2 \in E$ un vecteur non nul (il en existe car E est un plan) et $e_1 \in E$ défini par $e_1 = f(e_2) + e_2$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda e_1 + \mu e_2 = 0_E$, alors $\lambda(f(e_2) + e_2) + \mu e_2 = \lambda f(e_2) + (\lambda + \mu)e_2 = 0_E$. Or $(e_2, f(e_2))$ est libre car f ne possède aucune valeur propre réelle d'après **b.**, ainsi $\lambda = \lambda + \mu = 0$ donc $\lambda = \mu = 0$ ce qui montre que (e_1, e_2) est une base de E. Comme $f(e_2) = e_1 - e_2$ et $f(e_1) = f(f(e_2) + e_2) = f^2(e_2) + f(e_2) = \alpha e_2$ car $f^2 + f + \alpha \mathrm{id}_E = 0$, par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} = A$.

d. Soit $e_2 \in E$ un vecteur non nul (il en existe car $\dim(E) > 2$) et $e_1 \in E$ défini par $e_1 = f(e_2) + e_2$. Comme ci-dessus, on montre que (e_1, e_2) est une famille libre de E et que $f(e_2) = e_1 - e_2$ et $f(e_1) = \alpha e_2$. Comme $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) \neq E$, il existe un vecteur non nul $e_4 \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Soit $e_3 \in E$ défini par $e_3 = f(e_4) + e_4$. À nouveau, on montre que (e_3, e_4) est une famille libre de E et que $f(e_4) = e_3 - e_4$ et $f(e_3) = \alpha e_4$. Si $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0$ (1), on applique f à (1) pour avoir $\alpha\lambda_1 e_2 + \lambda_2(e_1 - e_2) + \alpha\lambda_3 e_4 + \lambda_4(e_3 - e_4) = 0$ (2). En effectuant $\lambda_4(1) - \lambda_3(2)$, on a $\lambda_4(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4) - \lambda_3(\alpha\lambda_1 e_2 + \lambda_2(e_1 - e_2) + \alpha\lambda_3 e_4 + \lambda_4(e_3 - e_4)) = 0$ donc $(\lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3)e_1 + (\lambda_2\lambda_4 - \alpha\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)e_2 + (\lambda_3^2 + \lambda_4^2)e_4 = 0$. Mais, par construction, (e_1, e_2, e_4) est libre donc $\lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 0$ ce qui, montre, comme λ_3, λ_4 sont réels, que $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Il ne reste que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ car (e_1, e_2) est libre. Ainsi, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ et (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre.

Si $n = 4$, on a trouvé une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Si $n > 4$, on continue en prenant $e_6 \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$, on pose $e_5 = f(e_6) + e_6$ et on a $f(e_6) = e5 - e_6$, $f(e_5) = \alpha e_6$ et $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ libre. Par récurrence, en notant $n = 2p$, on construit une famille libre $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{2n})$ telle que $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $f(e_{2k-1}) = \alpha e_{2k}$, $f(e_{2k}) = e_{2k-1} - e_{2k}$. Comme $\dim(E) = n = 2p$, $\mathcal{B}$ est une base de E et on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(A, \cdots, A)$ avec p fois le bloc sur la diagonale.

6.201 **a.** Comme A est triangulaire supérieure, $\chi_A = X^2(X-1)(X-2)$. Les colonnes $1, 2$ et 4 de A forment une famille libre donc rang $(A) = 3$ et $\dim(E_0(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1 \neq 2$ par la formule du rang ce qui montre que A n'est pas diagonalisable. Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Comme $A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et que 1 et 2 sont des valeurs propres simples de A, on a $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $E_2(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $v_2 = (1, 1, 0, 0)$. De même, comme rang $(A) = 3$, on voit que $E_0(A) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (1, 0, 1, 0)$. On cherche v_4 tel que $Av_4 = v_3$ (réduction de JORDAN) et on trouve en résolvant ce système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, par exemple, $v_4 = (-1, 0, -1, 1)$. Posons $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme Q est inversible car $\det(Q) = 1$, la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et on a, par formule de changement de base, comme $Av_1 = v_1$, $Av_2 = 2v_2$, $Av_3 = 0$ et $Av_4 = v_3$, $A = QTQ^{-1}$.

b. Comme $AM = MA$, on a aussi $A^2M = MA^2$ donc $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_4)$, $E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_4)$ puis $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A^2)$ sont stables par M. Comme $A^2 = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$, $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Vect}(v_3, v_4)$.

On traduit matriciellement ces stabilités par $M = Q\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}Q^{-1}$. Or $AMv_4 = MAv_4 = Mv_3 = cv_3$ et $AMv_4 = A(dv_3 + ev_4) = ev_3$ donc $c = e$. Ainsi, $M = Q\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}Q^{-1}$. Réciproquement, on vérifie que ces matrices commutent avec A ce qui montre que le commutant de A est de dimension 4, engendré par $QE_{1,1}Q^{-1}$, $QE_{2,2}Q^{-1}$, $Q(E_{3,3} + E_{4,4})Q^{-1}$ et $QE_{3,4}Q^{-1}$.

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un polynôme quelconque.

Analyse : on suppose que $M = P(A)$, or comme $A = QTQ^{-1}$, on a classiquement $M = QP(T)Q^{-1}$, on calcule $P(T) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$ donc $M = Q\begin{pmatrix} P(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(0) & P'(0) \\ 0 & 0 & 0 & P(0) \end{pmatrix}Q^{-1}$.

Synthèse : soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ définie par $\varphi(P) = (P(1), P(2), P(0), P'(0))$. φ est clairement linéaire et si $P \in \text{Ker}(\varphi)$, on a $P(1) = P(2) = P(0) = P'(0) = 0$ donc 1 et 2 sont racines au moins simples de P et 0 racine au moins double de P donc $P = X^2(X-1)(X-2)U$ avec $U \in \mathbb{R}[X]$ mais la condition $\deg(P) \leqslant 3$ impose $U = 0$ donc $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$. φ est donc injective, et comme $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$, φ est un isomorphisme. Ainsi, comme $M = Q\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}Q^{-1}$, on a $M = Q\begin{pmatrix} P(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(0) & P'(0) \\ 0 & 0 & 0 & P(0) \end{pmatrix}Q^{-1} = P(A)$ en prenant le polynôme $P = \varphi^{-1}(a, b, c, d) \in \mathbb{R}_3[X]$.

On en conclut qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ (même plus précisément $P \in \mathbb{R}_3[X]$) tel que $M = P(A)$ si $AM = MA$.

c. Si $M^2 = A$, $AM = M^2M = MM^2 = MA$ donc on peut écrire $M = Q\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}Q^{-1}$ d'après **b.**.

Ainsi, $M^2 = A = QTQ^{-1} \iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 2cd \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui donne $a = \pm 1$, $b = \pm\sqrt{2}$, $c = 0$ et $2cd = 1$ mais ceci est impossible. Par conséquent, il n'existe aucune matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

6.202 • Si $n = 1$ et $A = (a) \neq 0$, $B = (b) \neq 0$, alors $ABAB = (a^2b^2) \neq 0$. Rien à signaler.

• Si $n = 2$ et $A \neq 0$, $B \neq 0$ telles que $ABAB = 0$, alors la matrice AB est nilpotente d'indice inférieur ou égal à 2. Mais on a aussi $(BA)^3 = BABABA = B(ABAB)A = B \times 0 \times A = 0$ donc BA est aussi nilpotente. Comme X^3 est annulateur de BA, on sait d'après le cours que $\text{Sp}(BA) \subset \{0\}$ car 0 est la seule racine de X^3. Mais comme le spectre complexe est non vide d'après D'ALEMBERT-GAUSS, on a donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(BA) = \{0\}$ ce qui montre que $\chi_{BA} = X^2$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on a donc $(BA)^2 = 0$ donc $BABA = 0$.

• Si $n = 3$ et $A \neq 0$, $B \neq 0$ telles que $ABAB = 0$, alors AB est nilpotente et, comme avant BA l'est aussi.

Mais la même démarche conduit à $(BA)^3 = 0$, on va construire un exemple tel que l'indice de nilpotente de AB soit 2, et celui de BA soit supérieur ou égal à 3. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,3}$, alors $N^2 = E_{1,3} \neq 0$ et $N^3 = 0$ donc N est nilpotente d'indice 3. On cherche A et B non nulles dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $BA = N$ alors que $(AB)^2 = 0$. Si on prend $A = N = E_{1,2} + E_{2,3}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{2,2} = N'$, alors on a comme attendu $BA = N$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}$ donc $BABA = E_{1,3} \neq 0$ alors que $ABAB = 0$.

• Si $n \geqslant 4$, on construit par blocs $A = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0_{n-3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} N' & 0 \\ 0 & 0_{n-3} \end{pmatrix}$ et on a comme dans le cas $n = 3$, par des calculs par blocs, $AB = E_{1,2}$, $BABA = E_{1,3} \neq 0$ alors que $ABAB = 0$.

6.203 **a.** Par hypothèse $L \neq 0$ et $C \neq 0$ donc, en notant $C = (c_{i,1})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $L = (\ell_{1,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$, il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $c_{i_0,1} \neq 0$ et il existe $j_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $\ell_{1,j_0} \neq 0$. Mais $CL = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = (c_{i,1}\ell_{1,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ donc $m_{i_0,j_0} = c_{i_0,1}\ell_{1,j_0} \neq 0$ et $CL \neq 0$. Par conséquent, $A + I_n = CL \neq 0$ donc $A \neq -I_n$.

b. $A^2 = CLCL - 2CL + I_n$ par le binôme car CL et I_n commutent, or $LC = (\alpha)_{1 \leqslant i,j \leqslant 1} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{k,1}\ell_{1,k} = \mathrm{Tr}\,(CL)$. En assimilant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, $\alpha = \mathrm{Tr}\,(LC) = LC$ donc $A^2 = LC(CL) - 2CL + I_n$ d'où $A^2 = (LC-2)(A+I_n) + I_n = (LC-2)A + (LC-1)I_n$. Ainsi, on a bien $A^2 + (2-LC)A + (1-LC)I_n = 0$.

c. A est une matrice de symétrie si et seulement si $A^2 = I_n \iff (2-LC)A + (1-LC)I_n = -I_n$ d'après **b.** donc $A^2 = I_n \iff (2-LC)(AI_n) = 0$. Mais $A + I_n \neq 0$ d'après **a.** donc $A^2 = I_n \iff LC = 2$.

d. $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ est racine de tout polynôme annulateur de A d'après le cours, or $P = X^2 + (2-LC)X + 1 - LC$ est de degré 2 et il est annulateur de A d'après **b.** donc $P(\lambda) = \lambda^2 + (2-LC)\lambda + 1 - LC = 0$.

e. On factorise $P = (X+1)(X+1-LC)$ et $LC \neq 0$ donc P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ ce qui prouve d'après le cours que A est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, -1+LC\}$.

• $A + I_n = CL$ est clairement de rang 1 car $C \neq 0$ et $L \neq 0$ donc, avec la formule du rang, $E_{-1}(A)$ est un hyperplan. Or L est la matrice dans la base canonique d'une forme linéaire φ non nulle ce qui montre que $\mathrm{Ker}(L) = \mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(CL)$ ce qui montre avec inclusion et égalité des dimensions que l'hyperplan $\mathrm{Ker}(A+I_n) = \mathrm{Ker}(CL) = \mathrm{Ker}(L) = \mathrm{Ker}(\varphi) = E_{-1}(A)$ est d'équation $\sum\limits_{j=1}^{n} \ell_{1,j}x_j = 0$.

• $\mathrm{Ker}(A+(1-LC)I_n) = \mathrm{Ker}(CL - LCI_n) = E_{-1+LC}(A)$ est forcément une droite car $\mathbb{R}^n = E_{-1}(A) \oplus E_{-1+LC}(A)$ puisque A est diagonalisable. Or $(A+(1-LC)I_n)C = CLC - \alpha C$ mais $C(LC) = \alpha C$ donc $E_{-1+LC}(A) = \mathrm{Vect}(C)$.

6.204 **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on effectue dans $\chi_A(\lambda)$ l'opération de Gauss $L_1 \longleftarrow L_1 + \lambda L_2 + \lambda^2 L_3 + \cdots + \lambda^{n-1}L_n$ et on développe par rapport à la ligne n, $\chi_A(\lambda) = (-1)^{n+1}\Big(\lambda^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k\Big) \times (-1)^{n-1} = \lambda^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k$ donc $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ (en fait A est une matrice compagnon).

b. Pour tout complexe λ, le rang de $A - \lambda I_n$ est au moins égal à $n-1$ grâce à la sous-diagonale de 1 échelonnés sur les $n-1$ premières colonnes. Par la formule du rang, la multiplicité géométrique de toute valeur propre λ de A vérifie donc $\dim(E_\lambda(A)) = n - \mathrm{rang}\,(A - \lambda I_n) \leqslant 1$.

($\Longleftarrow$) Si χ_A est scindé à racines simples, d'après le cours, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

($\Longrightarrow$) Réciproquement, si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en écrivant $\chi_A = \prod_{j=1}^{r}(X-\lambda_j)^{m_{\lambda_j}(A)}$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de A, on sait d'après le cours que $\forall j \in [\![1;r]\!]$, $m_{\lambda_j(A)} = \dim(E_{\lambda_j}(A))$. D'après ce qui précède, on a donc $1 \leqslant m_{\lambda_j(A)} = \dim(E_{\lambda_j}(A)) \leqslant 1$ donc $m_{\lambda_j(A)} = 1$. Toutes les valeurs propres de A sont donc simples, on en déduit que $r = n$ et que χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

Par double implication, A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

6.205 **a.** Par construction, comme cette famille $\mathcal{B}$ engendre F, $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F.

Considérons l'application $u : E \to E$ définie par $u(f) = f''$. u est clairement un endomorphisme de E et $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $u(f_k) = k^2 f_k$ donc, comme $f_k \neq 0$, la famille $\mathcal{B}$ est constituée de n vecteurs propres de u associés à des valeurs propres différentes $1, 4, \cdots, n^2$. Ainsi, $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre d'après le cours. De même, comme $u(g_k) = k^2 g_k$ et que $g_k \neq 0$, la famille $(g_1, \cdots, g_n)$ est aussi libre dans E.

Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n + \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_n g_n = 0$, alors la fonction $f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = -(\mu_1 g_1 + \cdots + \mu_n g_n)$ est à la fois paire et impaire donc elle est nulle et on a $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_n g_n = 0$. Mais les libertés de $(f_1, \cdots, f_n)$ et $(g_1, \cdots, g_n)$ prouvées précédemment montrent que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$, ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est libre.

Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une base de F et on a donc $\dim(F) = 2n$.

b. Φ est linéaire par linéarité de la dérivation et va bien de E dans E car si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞, la fonction $f'' - 3f' + 2f$ est aussi C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, Φ est un endomorphisme de E. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a $\Phi(f_k) = k^2 f_k - 3k g_k + 2f_k \in F$ (1) et $\Phi(g_k) = k^2 g_k - 3k f_k + 2g_k \in F$ (2). Ainsi, comme $\mathcal{B}$ engendre F, on constate que F est stable par Φ, ce qui nous permet de définir l'endomorphisme induit $\Psi : F \to F$ défini par $\Psi(f) = \Phi(f) = f'' - 3f' + 2f$ et Ψ est bien un endomorphisme de F.

c. Si on somme (1) et (2), par linéarité de Ψ, on a $\Psi(f_k+g_k) = (k^2-3k+2)(f_k+g_k) = (k-1)(k-2)(f_k+g_k)$ donc, comme $a_k = f_k + g_k : x \mapsto e^{kx} \neq 0$, $\alpha_k = (k-1)(k-2)$ est une valeur propre de F pour tout $k \in [\![1;n]\!]$.

De même, si on soustrait (1) et (2), on obtient $\Psi(f_k - g_k) = (k^2 + 3k + 2)(f_k - g_k) = (k+1)(k+2)$ donc, comme $b_k = f_k - g_k : x \mapsto e^{-kx} \neq 0$, $\beta_k = (k+1)(k+2)$ est une valeur propre de F pour tout $k \in [\![1;n]\!]$.

La famille $\mathcal{B}' = (a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$ est libre car elle est formée de vecteurs propres (non nuls) associés à des valeurs propres différentes de l'endomorphisme de dérivation $D : E \mapsto E$ défini par $D(f) = f'$ car $D(a_k) = ka_k$ et $D(b_k) = -kb_k$. Ainsi, comme $\dim(F) = 2n$, $\mathcal{B}'$ est aussi une base de F et ce qui précède montre que c'est une base formée de vecteurs propres de Ψ donc Ψ est diagonalisable.

Les valeurs propres de Ψ sont (comptées avec leur ordre de multiplicité) les $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n$, soit $0, 0, 2, 6, 12, 20, \cdots, (n-1)(n-2), 6, 12, 20, \cdots, (n-1)(n-2), n(n-1), n(n+1), (n+1)(n+2)$.

Comme 0 est valeur propre de Ψ, $\Psi \notin GL(F)$ donc $\det(\Psi) = 0$. Par contre, $\mathrm{Tr}\,(\Psi) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$ donc $\mathrm{Tr}\,(\Psi) = \sum_{k=1}^{n}((k-1)(k-2) + (k+1)(k+2)) = \sum_{k=1}^{n}(2k^2+4) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3} + 4n = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + 13n}{3}$.

6.206 ($\Longrightarrow$) Supposons A diagonalisable et traitons deux cas :

- Soit A n'admet qu'une seule valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $A = P(\lambda I_2)P^{-1}$ avec P inversible donc $A = \lambda I_2$.

Soit Q un polynôme complexe non constant. D'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, le polynôme $Q-\lambda$ admet une racine complexe puisqu'il n'est pas constant. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Q(\alpha) = \lambda$. Il suffit de prendre $M = \alpha I_2$ pour avoir $Q(M) = Q(\alpha)I_2 = \lambda I_2 = A$.

• Soit A admet deux valeurs propres complexes $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, il existe une matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Soit Q un polynôme complexe non constant, comme ci-dessus il existe des complexes α_1 et α_2 tels que $Q(\alpha_1) = \lambda_1$ et $Q(\alpha_2) = \lambda_2$ (autrement dit $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective). Il suffit de prendre $M = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}P^{-1}$ pour avoir $Q(M) = P\begin{pmatrix} Q(\alpha_1) & 0 \\ 0 & Q(\alpha_2) \end{pmatrix}P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

($\Longleftarrow$) Supposons A non diagonalisable, alors χ_A ne peut pas être scindé à racines simples donc $Sp(A) = \{\lambda\}$, $\chi_A = (X-\lambda)^2$ et $\dim(E_\lambda(A)) = 1$. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, A est trigonalisable donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$.

Pour réduire "à la JORDAN" et avoir 1 à la place de μ : si on note $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a donc par CAYLEY-HAMILTON $(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})^2 = 0$ donc $\mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})$. Puisque $\dim(E_\lambda(A)) = 1$, par le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})) = \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})) = 1$ donc $\mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})$. Si on prend $v_1 \in \mathbb{C}^2$ tel que $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = \mathrm{Vect}(v_1)$, alors il existe donc $v_2 \in \mathbb{C}^2$ tel que $(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})(v_2) = v_1$. Comme $v_2 \notin \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})$, la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est libre donc c'est une base de $\mathbb{C}^2$. Par construction, comme $u(v_1) = \lambda v_1$ et $u(v_2) - \lambda v_2 = v_1$, il vient $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à $\mathcal{B}$, on a par la formule de changement bases : $A = PTP^{-1}$.

Prenons le polynôme non constant $Q = X^2 + \lambda$ et supposons l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $Q(M) = A$. Posons $N = P^{-1}MP$ de sorte que $M = PNP^{-1}$. On a la suite suivante d'équivalences : $Q(M) = M^2 + \lambda I_2 = A \iff P(N^2 + \lambda I_2)P^{-1} = PTP^{-1} \iff N^2 + \lambda I_2 = A \iff N^2 = \mu E_{2,1}$. Comme $E_{2,1}^2 = 0$, on a $N^4 = 0$ donc N est nilpotente. Or, il est classique que $\chi_N = X^2$ (seul 0 est valeur propre de N) donc $N^2 = 0$ par CAYLEY-HAMILTON. Ceci impose donc $E_{2,1} = 0$ qui est absurde. Ainsi, pour ce polynôme $Q = X^2 + \lambda$ et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a $Q(M) \neq A$. On a donc montré que $(\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X],\ \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ Q(M) = A)$ est faux.

Par double implication : A diagonalisable $\iff (\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X],\ \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ Q(M) = A)$.

6.207 **a.** Pour $k = 0$, on a bien $AB^0 - B^0A = 0.B^0$ car $B^0 = I_n$. Pour $k = 1$, $AB^1 - B^1A = AB - BA = B = 1.B^1$ par hypothèse. Soit $k \geqslant 1$, supposons que $AB^k - B^kA = kB^k$, alors $AB^{k+1} = AB^k \times B = (B^kA + kB^k) \times B$ par hypothèse de récurrence donc $AB^{k+1} = AB^k \times B = (B^kA + kB^k) \times B = B^k \times AB + kB^{k+1}$. Mais comme $AB = BA + B$, en reportant, on a $AB^{k+1} = B^k \times (BA + B) + kB^{k+1} = B^{k+1}A + (k+1)B^{k+1}$ qui s'écrit aussi $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (k+1)B^{k+1}$: l'hérédité est établie.

Par principe de récurrence, on a montré que $\forall k \in \mathbb{N},\ AB^k - B^kA = kB^k$.

b. Soit $L : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $L(M) = AM - MA$. Il est clair que L est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Or la question précédente montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ L(B^k) = kB^k$ ce qui prouve que k est une valeur propre de L si $B^k \neq 0$. Comme il est impossible qu'un endomorphisme en dimension finie ($\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = n^2$) ait une infinité de valeurs propres, il existe forcément une valeur $k \in \mathbb{N}^*$ telle que $B^k = 0$, et donc forcément

$B^i = 0$ si $i \geqslant k$. Par conséquent, B est bien nilpotente.

6.208 **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on effectue dans $\chi_A(\lambda)$ l'opération de GAUSS $C_n \longleftarrow C_n + \lambda C_{n-1} + \lambda^2 C_{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1} C_1$ et on développe par rapport à la colonne n, $\chi_A(\lambda) = (-1)^{n+1}\Big(\lambda^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{n-k}\lambda^k\Big) \times (-1)^{n-1} = \lambda^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{n-k}\lambda^k$ donc $\chi_A = X^n - a_1 X^{n-1} - \cdots - a_n$ (en fait A est une matrice compagnon).

b. Pour tout complexe λ, le rang de $A - \lambda I_n$ est au moins égal à $n-1$ grâce à la sous-diagonale de 1 échelonnés sur les $n-1$ premières colonnes. Par la formule du rang, la multiplicité géométrique de toute valeur propre λ de A vérifie donc $\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rang}\,(A - \lambda I_n) \leqslant 1$.

On va montrer que A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

($\Longleftarrow$) Si χ_A est scindé à racines simples, d'après le cours, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

($\Longrightarrow$) Réciproquement, si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en écrivant $\chi_A = \prod\limits_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{m_{\lambda_j}(A)}$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de A, on sait d'après le cours que $\forall j \in [\![1;r]\!]$, $m_{\lambda_j(A)} = \dim(E_{\lambda_j}(A))$. D'après ce qui précède, on a donc $1 \leqslant m_{\lambda_j(A)} = \dim(E_{\lambda_j}(A)) \leqslant 1$ donc $m_{\lambda_j(A)} = 1$. Toutes les valeurs propres de A sont donc simples, on en déduit que $r = n$ et que χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

Par double implication, A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

6.209 **a.** $\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -2 & 1 \\ 1 & X-5 & 1 \\ 0 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)((X-5)(X-2)+1) - (-2(X-2)+1)$ en développement par rapport à la première colonne. Ainsi, $\chi_A = (X-2)(X^2 - 7X + 11) + 2X - 5 = X^3 - 9X^2 + 27X - 27 = (X-3)^3$ (binôme de NEWTON). Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Par contre, comme $E_3(A) = \text{Ker}(A - 3I_3) \neq \mathbb{R}^3$ donc $\dim(E_3(A)) \neq 3$ (l'ordre de multiplicité de 3 dans χ_A) car $A \neq 3I_3$, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (ni bien sûr dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$).

b. Comme $\text{Sp}(A) = \{3\}$ d'après **a.**, si x est un vecteur propre de A, alors $Ax = 3x$ donc la droite $D = \text{Vect}(x)$ est stable par A. Réciproquement, si la droite $D' = \text{Vect}(y)$ est stable par A, on a $y \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ car D' est une droite et $Ay \in D$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $Ay = \lambda y$ donc y est un vecteur propre de A donc $\lambda = 3$ et $y \in D$ ce qui montre que $D' = D$. Par conséquent, la seule droite stable par A est D. Comme $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on voit que $(1,1,1)$ est dans le noyau de $A - 3I_3$ donc $D = \text{Vect}(x)$ avec $x = (1,1,1)$.

c. Soit une base $\mathcal{B}' = (a_1, a_2)$ de P qu'on complète en une base $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Par stabilité de P, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} A' & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(a')$. Ainsi, $\chi_a = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} XI_2 - A' & * \\ 0 & X - \lambda \end{vmatrix}$ donc $\chi_A = (X - \lambda)\chi_{A'}$ ce qui justifie que $\chi_{A'}$ divise χ_A (et en plus que $\lambda = 3$).

d. Comme P est de dimension 2, $\chi_{a'}$ est unitaire et de degré 2 et il divise $\chi_a = (X-3)^3$ donc $\chi_{a'} = (X-3)^2$. Par CAYLEY-HAMILTON, $(a' - 3\text{id}_P)^2 = 0$ donc $\forall x \in P$, $(a' - 3\text{id}_P)^2(x) = (a - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2(x) = 0$ et on a bien l'inclusion $P \subset \text{Ker}\big((a - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2\big)$.

e. Comme $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(A - 3I_3)^2$ et $(a - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ sont de rang 1 ce qui montre avec la formule du rang que $\dim(\text{Ker}((a - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2) = 2$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a $\mathsf{P} = \mathsf{Ker}\left((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\right)$.

Dans cet exemple, il y a seulement quatre sous-espaces stables par a : $\{0\}$ de dimension 0, $\mathsf{D} = \mathsf{Ker}\left(a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)$ de dimension 1, $\mathsf{P} = \mathsf{Ker}\left((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\right)$ de dimension 2 et $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.

6.210 **a.** $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & -3 \\ -2 & X-1 & 3 \\ 2 & -1 & X-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -1 & -3 \\ -2 & X-1 & 3 \\ 0 & X-2 & X-2 \end{vmatrix}$ après avoir effectué $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$. On factorise par $X-2$ dans la troisième ligne ce qui donne $\chi_A = (X-2)\begin{vmatrix} X & -1 & -3 \\ -2 & X-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X & 2 & -3 \\ -2 & X-4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ après $C_2 \longleftarrow C_2 - C_3$. On développe par rapport à la troisième ligne et on a $\chi_A = (X-2)(X(X-4)+4) = (X-2)^3$. Ainsi, comme les valeurs propres de A sont les racines de χ_A, il vient $\mathsf{Sp}(A) = \{2\}$.

b. A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_2(A)) = 3$, ce qui équivaut à $A = 2I_3$, ce n'est visiblement pas le cas. Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

c. $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est visiblement de rang 1 donc, avec la formule du rang, $\dim(E_2(A)) = 2$.

Un simple coup d'œil à $A - 2I_3$ nous permet d'écrire $E_2(A) = \mathsf{Vect}(u, v)$ avec $u = (1,2,0)$ et $v = (0,3,-1)$. Le théorème de la base incomplète montre l'existence de $w \in \mathbb{R}^3$ tel que (u,v,w) soit une base de $\mathbb{R}^3$. Bien sûr 100% des vecteurs w conviennent mais si on prend par exemple $w = (1,0,0)$, la matrice de la famille $\mathcal{B} = (u,v,w)$ dans la base canonique vaut $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\det(P) = 2 \neq 0$ donc P est inversible ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ alors que u et v sont des vecteurs propres de A.

d. Puisque χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, la matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'après le cours. Comme la première colonne de A vaut $Aw = (0,2,-2) = 2v - 2u + 2w$, et comme $Au = 2u$ et $Av = 2v$ par construction, par la formule de changement de base, on a $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ car, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à A, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T = P^{-1}AP$.

6.211 **a.** f_A va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par propriété du produit matriciel et f_A est bien linéaire par distributivité de $\times$ par rapport à $+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $f_A(\lambda M + M') = A(\lambda M + M') = \lambda AM + AM' = \lambda f_A(M) + f_A(M')$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Ainsi f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. ($\Longrightarrow$) Si $A^2 = A$, alors $f_A^2(M) = f_A(f_A(M)) = f_A(AM) = A(AM) = (AA)M = A^2M = AM = f_A(M)$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $f_A^2 = f_A$ et f_A est bien un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

($\Longleftarrow$) Si f_A est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_A^2 = f_A$ donc, en particulier, $f_A^2(I_n) = f_A(I_n)$ d'où $A^2 = A$.

Par double implication, $A^2 = A$ si et seulement si f_A est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Par une récurrence facile, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_A^k(M) = A^kM$. Si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kX^k \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(f_A) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kf_A^k$ donc $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(f_A)(M) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kA^kM = P(A)M$.

- Si P est annulateur de A, la relation précédente montre que $P(f_A) = 0$ donc P est aussi annulateur de f_A.
- Si P est annulateur de f_A, alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(A)M$ d'après ce qui précède donc, en particulier en

prenant $M = I_n$, on a $P(A) = 0$ donc P est aussi annulateur de A.

Par conséquent, A et f_A ont les mêmes polynômes annulateurs. Comme A (ou f_A) est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples : A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.

d. Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors $AX = \lambda X$. Construisons par exemple la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes sont égales à X, alors $f_A(M) = AM = \lambda M$ par calcul matriciel donc, comme $M \neq 0$ car $X \neq 0$, M est un vecteur propre de f_A associé à la valeur propre λ.

e. Si $M \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de f_A associé à la valeur propre λ, alors $f_a(M) = AM = \lambda M$. Comme $M \neq 0$, il existe au moins une colonne, disons la colonne C_j, qui est non nulle. Comme $AM = \lambda M$, on en déduit que $AC_j = \lambda C_j$ donc C_j est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

f. Les deux questions précédentes montrent par double inclusion que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f_A)$.

6.212 **a.** Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme annulateur de M. Il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N},\ M^k X = \lambda^k X$. Ainsi, on peut calculer $0 = P(M)X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k M^k X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \lambda^k X = P(\lambda)X = 0$. Comme $X \neq 0$, on a forcément $P(\lambda) = 0$. Ainsi, toute valeur propre λ de M est racine de tout polynôme annulateur P de M.

b. Si M est symétrique, comme $M^T = M$, on a $M^2 + M - I_n = 0$ donc $P = X^2 + X - 1$ annule M. Classiquement, $P = (X - \alpha)(X - \beta)$ avec $\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ donc P est scindé à racines simples. Par théorème, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c. Si on ne suppose plus M symétrique, on cherche un polynôme annulateur de M de degré supérieur. En transposant la relation, on obtient $(M^T)^2 + M = I_n$ donc $(I_n - M^2)^2 + M - I_n = M^4 - 2M^2 + M = 0$ et le polynôme $Q = X^4 - 2X^2 + X$ annule M. Or $Q = X(X-1)(X^2 + X - 1) = X(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)$ qui est à nouveau scindé à racines simples. Ainsi M est encore diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

d. Puisque $(M^T)^2 = I_n - M$, en passant au déterminant, on a $\det((M^2)^T) = \det(M)^2 = \det(I_n - M) = \chi_M(1)$. Ainsi, $\det(M) \neq 0 \Longleftrightarrow \chi_M(1) \neq 0 \Longleftrightarrow$ (1 n'est pas valeur propre de M).

Ou encore, M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

6.213 **a.** Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme annulateur de A et λ une valeur propre de A, alors il existe un vecteur colonne $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Par une récurrence simple, on montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = \lambda^k X$. Ainsi, $P(A)X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k A^k X = \Big(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k \lambda^k\Big) X = P(\lambda)X = 0$ car $P(A) = 0$ donc, comme $X \neq 0$, on obtient $P(\lambda) = 0$.

Les valeurs propres de A sont racines de tout polynôme annulateur de A.

b. Comme χ_A est unitaire par construction et scindé sur $\mathbb{C}$ par D'ALEMBERT-GAUSS, si $a_1, \cdots, a_r$ sont les valeurs propres distinctes de A, on peut écrire $\chi_A = \prod\limits_{i=1}^{r} (X - a_i)^{m_{a_i}(A)}$ d'où $\chi_A(B) = \prod\limits_{i=1}^{r} (B - a_i I_n)^{m_{a_i}(A)}$. Comme $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe multiplicatif, on a $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1;n]\!],\ B - a_i I_n \in GL_n(\mathbb{C})$. On peut aussi le justifier par le déterminant (qui est une fonction multiplicative), en écrivant que l'on a $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \det(\chi_A(B)) \neq 0 \Longleftrightarrow \prod\limits_{i=1}^{r} (\det(B - a_i I_n))^{m_{a_i}(A)} \neq 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1;r]\!],\ \det(B - a_i I_n) \neq 0$.

Or $B - a_i I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ car $\det(B - a_i I_n) = (-1)^n \chi_B(a_i) \neq 0$ puisque a_i étant une valeur propre de A, elle ne peut pas être une valeur propre de B car on a supposé $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$. On a donc bien $\chi_A(B)$ inversible.

c. Par hypothèse, $AX = XB$. Alors $A^2X = A(AX) = A(XB) = (AX)B = XB^2$. Par une récurrence facile, on montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^kX = XB^k$. Si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k A^k X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X B^k = XP(B)$. En prenant $P = \chi_A$, on obtient donc $\chi_A(A)X = X\chi_A(B)$ ce qui donne, avec Cayley-Hamilton, $X\chi_A(B) = 0$. Or on a vu en **b.** que $\chi_A(B)$ est inversible. Il ne reste donc plus que $X = 0$.

d. On définit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(X) = AX - XB$. Comme φ est visiblement linéaire et qu'on est en dimension finie, φ est un automorphisme si et seulement si elle est injective. Soit $X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $AX = XB$ et, avec la question précédente, $X = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ ce qui montre que φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cette bijectivité s'écrit, comme attendu, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = \varphi(X) = M$.

6.214 **a.** Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a $f(\lambda M + \mu N) = B(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)B$ qu'on développe en $f(\lambda M + \mu N) = \lambda(MB - BM) + \mu(NB - BN) = \lambda f(M) + \mu f(N)$ donc f est linéaire, et comme va bien de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. On a $\mathrm{Tr}\ (A) = \mathrm{Tr}\ (AB - BA) = \mathrm{Tr}\ (AB) - \mathrm{Tr}\ (BA) = 0$ par linéarité de la trace et d'après la propriété classique $\forall (U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \mathrm{Tr}\ (UV) = \mathrm{Tr}\ (VU)$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on pose l'assertion $\mathcal{P}(k) =$ "$A^kB - BA^k = kA^k$".

<u>Initialisation</u> : l'énoncé se traduit par le fait que $\mathcal{P}(1)$ est vraie car $AB - BA = A$.

<u>Hérédité</u> : soit $k \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, $A^{k+1}B - BA^{k+1} = A(A^kB) - BA^{k+1} = A(BA^k + kA^k) - BA^{k+1}$ par hypothèse de récurrence et $A^{k+1}B - BA^{k+1} = (AB - BA)A^k + kA^{k+1} = A^{k+1} + kA^{k+1} = (k+1)A^{k+1}$ donc l'assertion $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on a bien $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^kB - BA^k = kA^k$. Ainsi, par linéarité de la trace, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k\,\mathrm{Tr}\ (A^k) = \mathrm{Tr}\ (A^kB) - \mathrm{Tr}\ (BA^k)$ donc $\mathrm{Tr}\ (A^k) = 0$.

c. Si on suppose que A n'est pas nilpotente, alors $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k \neq 0$ et $f(A^k) = kA^k$ d'après la question précédente. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N},\ k \in Sp(f)$. Ceci est impossible car cela ferait une infinité de valeurs propres pour l'endomorphisme f en dimension finie. Ainsi, la matrice A est bien nilpotente.

6.215 **a.** $\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 3 & -2 \\ 1 & X-5 & 2 \\ 1 & -3 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-3 & 3 & -2 \\ 1 & X-5 & 2 \\ 0 & 2-X & X-2 \end{vmatrix}$ après avoir effectué $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$. On factorise par $X-2$ dans la troisième ligne et on effectue $C_2 \longleftarrow C_2 + C_3$ et on arrive à $\chi_A = (X-2)\begin{vmatrix} X-3 & 1 & -2 \\ 1 & X-3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la troisième ligne, on arrive par identité remarquable à $\chi_A = (X-2)^2(X-4)$ donc $Sp(A) = \{2, 4\}$. Comme $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 1, on a $\dim(E_2(A)) = 3 - 1 = 2 = m_2(A)$ donc A est diagonalisable. D'après la matrice $A - 2I_3$ précédente, une équation du plan $E_2(A)$ est $x - 3y + 2z = 0$ et $E_2(A) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (3, 1, 0)$ et $v_2 = (-2, 0, 1)$ par exemple. De même, $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ est de rang 2 (on le savait car 4 est valeur propre simple de A) et $E_4(A) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (-1, 1, 1)$.

b. D'après la question précédente et avec la formule de changement de base, si on pose $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, on a $A = PDP^{-1}$. Si on pose $D' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $D'^2 = D$ et si on pose $R = PD'P^{-1}$, on a $R^2 = PD'P^{-1}PD'P^{-1} = P(D')^2P^{-1} = PDP^{-1}$ donc $R^2 = A$.

c. Comme A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 4\}$, le polynôme $P = (X-2)(X-4)$ est annulateur de A. Si $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $R^2 = A$, alors $P(R^2) = P(A) = 0$ donc $(R^2 - 2I_3)(R^2 - 4I_3) = 0$ et le polynôme $Q = (X^2-2)(X^2-4) = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-2)(X+2)$ est annulateur de R et scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ donc R est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On peut même dire d'après le cours que $\mathrm{Sp}(R) \subset \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2, 2\}$.

d. Si $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $R^2 = A$, alors $RA = R^3 = AR$ donc les sous-espaces propres de A sont stables par R, ce qui justifie que les sous-espaces $E_2(A)$ et $E_4(A)$ sont stables par R. On en déduit que dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = E_2(A) \oplus E_4(A)$, la matrice de l'endomorphisme associé à R est diagonale par blocs, donc que $R = P\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $R^2 = P\begin{pmatrix} B^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2I_2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1} = A$ si et seulement si $B^2 = 2I_2$ et $\lambda^2 = 4$. On ne peut donc prendre que $\lambda = \pm 2$ mais par contre il existe une infinité de matrices B telles que $B^2 = 2I_2$, par exemple $B = \sqrt{2}S_\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ avec $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ qui est la matrice d'une réflexion du plan $\mathbb{R}^2$.

Il existe donc une infinité de matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$.

6.216 **a.** On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -3 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = X^3 - 3X - 3$ donc, par Cayley-Hamilton, $P = X^3 - 3X - 3$ est un polynôme annulateur de A. Pour $n \in \mathbb{N}$, on multiplie $A^3 - 3A - 3I_3 = 0$ par A^n pour avoir $A^{n+3} - 3A^{n+1} - 3A^n = 0$ et, par linéarité de la trace, $u_{n+3} - 3u_{n+1} - 3u_n = 0$.

b. $u_0 = \mathrm{Tr}\ (I_3) = 3$, $u_1 = \mathrm{Tr}\ (A) = 0$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ donc $u_2 = \mathrm{Tr}\ (A^2) = 6$, $u_3 = 3u_1 + 3u_0 = 9$ et $u_4 = 3u_2 + 3u_1 = 18$. Soit $n \geqslant 2$ tel que $(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}) \in (\mathbb{N}^*)^3$, alors $u_{n+3} = 3u_{n+1} + 3u_n \in \mathbb{N}^*$ car $\mathbb{N}^*$ est stable par somme et produit. Par principe de récurrence, on a bien $\forall n \geqslant 2,\ u_n \in \mathbb{N}^*$.

c. Comme $\chi_A'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t-1)(t+1)$, la fonction χ_A est croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$ et décroissante sur $[-1; 1]$ avec $\lim_{t \to -\infty} \chi_A(t) = -\infty$, $\chi_A(-1) = -1$, $\chi_A(1) = -5$, $\chi_A(2) = -1$, $\chi_A(3) = 15$ et $\lim_{t \to +\infty} \chi_A(t) = +\infty$. Avec le tableau de variations de χ_A, on se rend compte que χ_A n'admet qu'une seule racine réelle $\alpha \in]2; 3[$ et, comme χ_A est réel, ses deux autres racines sont β et $\overline{\beta}$ (deux complexes non réels et conjugués). Comme χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et semblable à $\mathrm{diag}(\alpha, \beta, \overline{\beta})$. Ainsi, A^n est semblable à $\mathrm{diag}(\alpha^n, \beta^n, \overline{\beta}^n)$ donc $u_n = \mathrm{Tr}\ (A^n) = \alpha^n + \beta^n + \overline{\beta}^n$.

d. Comme $\alpha\beta\overline{\beta} = 3$ par les relations coefficients-racines, on a $|\beta|^2 = \frac{3}{\alpha} \leqslant \frac{3}{2}$ donc $|\beta| < 2$. Ainsi, $\beta^n \underset{+\infty}{=} o(\alpha^n)$ et $\overline{\beta}^n \underset{+\infty}{=} o(\alpha^n)$ ce qui montre que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \alpha^n$ donc $\frac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha^n}$. Ainsi, la série numérique $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{u_n}$ à termes positifs converge par comparaison à une série géométrique car $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$.

6.217 **a.** Par blocs, pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a $\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n & -A \\ -I_n & \lambda I_n \end{vmatrix}$. On fait l'opération (par blocs) $C_1 \longleftarrow C_1 + \dfrac{C_2}{\lambda}$ et on a $\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - \dfrac{A}{\lambda} & -A \\ 0 & \lambda I_n \end{vmatrix} = \det(\lambda I_n) \times \det\Big(\lambda I_n - \dfrac{A}{\lambda}\Big) = \lambda^n \times \Big(\dfrac{1}{\lambda}\Big)^n \det(\lambda^2 I_n - A) = \chi_A(\lambda^2)$. On a donc $\chi_B = \chi_A(X^2)$ car ces deux polynômes coïncident sur $\mathbb{C}^*$. Ainsi, le spectre de B est constitué des racines carrées complexes des valeurs propres de A.

b. Soit $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ les valeurs propres de A. Comme $\det(A) = \prod\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont distinctes et non nulles. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, notons λ_k une racine carrée de α_k, alors les valeurs propres de B sont les $\lambda_1, -\lambda_1, \cdots, \lambda_n, -\lambda_n$ d'après **a.** et elles sont distinctes car $\lambda_k \neq -\lambda_k$ et qu'on ne peut pas avoir $\lambda_i = \pm\lambda_j$ car sinon leurs carrés α_i et α_j seraient égaux. Ainsi, B a $2n$ valeurs propres distinctes donc B est diagonalisable.

c. Supposons B diagonalisable, alors $B = Q\Delta Q^{-1}$ avec $\Delta \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ diagonale et $Q \in GL_{2n}(\mathbb{C})$. Alors $B^2 = Q\Delta^2 Q^{-1}$ donc B^2 est aussi diagonalisable. Mais $B^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Soit R un polynôme scindé à racines simples qui annule B^2, alors $R(B^2) = \begin{pmatrix} R(A) & 0 \\ 0 & R(A) \end{pmatrix} = 0$ donc $R(A) = 0$ donc A est diagonalisable car elle a un polynôme annulateur scindé à racines simples.

d. Prenons $A = 0$, alors A est on ne peut plus diagonalisable car elle est diagonale. Mais $\chi_B = X^{2n} = (X-0)^{2n}$ donc, d'après le cours, B est diagonalisable si et seulement $\text{Ker}(B) = E_0(B)$ est de dimension $2n$, c'est-à-dire si et seulement si $B = 0$. Mais non, donc B n'est pas diagonalisable alors que A l'est.

e. Si A est diagonalisable, comme avant, $R(B^2) = \begin{pmatrix} R(A) & 0 \\ 0 & R(A) \end{pmatrix} = 0$ pour un polynôme annulateur R scindé à racines simples de A. Ainsi, B^2 est diagonalisable. Posons $R = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)$ avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ distincts. Aucun des α_k n'est nul car α_k est une valeur propre de A et que A est inversible. Notons δ_k une racine carrée de α_k pour $k \in [\![1;r]\!]$. Alors, comme avant, $\delta_1, -\delta_1, \cdots, \delta_r, -\delta_r$ sont distincts donc le polynôme $Q = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \delta_k)(X + \delta_k)$ annule B car $R(B^2) = \prod\limits_{k=1}^{r} (B^2 - \alpha_k I_{2n}) = \prod\limits_{k=1}^{r} (B - \delta_k I_{2n})(B + \delta_k I_{2n}) = Q(M) = 0$ et Q est scindé à racines simples donc B est diagonalisable.

6.218 **a.** Par définition, ce reste R de l'énoncé a un degré majoré par 3 donc ϕ va bien de E dans E. Pour $(P, Q) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $X^2(\lambda P + \mu Q) = \lambda(X^2 P) + \mu(X^2 Q) = \lambda(UD + \phi(P)) + \mu(VD + \phi(Q)) = (\lambda U + \mu V)D + (\lambda\phi(P) + \mu\phi(Q))$ avec des polynômes réels U, V qui sont des quotients dans la division euclidienne par D. Comme le polynôme $\lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$ est de degré inférieur ou égal à 3 car $\deg(\lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)) \leqslant \text{Max}(\deg(\phi(P), \phi(Q)) \leqslant 3$, il est le reste de la division euclidienne de $X^2(\lambda P + \mu Q)$ par D (et $\lambda U + \mu V$ en est le quotient). Ainsi $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$ et ϕ est bien un endomorphisme de E.

b. Clairement $\phi(1) = X^2$ et $\phi(X) = X^3$ car $X^2.1 = D.0 + 1$ et $X^2.X = D.0 + X^3$. Comme $X^2 X^2 = X^4 = D + 1$, on a $\phi(X^2) = 1$. Enfin $X^2 X^3 = XD + X$ donc $\phi(X^3) = X$. Ainsi, la matrice ϕ dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Après $C_1 \longleftarrow C_1 + XC_3$ et $C_2 \longleftarrow C_2 + XC_4$ puis développement par rapport aux première et dernière colonnes, $\chi_\phi = \chi_A = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X & 0 & -1 \\ -1 & 0 & X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X & 0 & X^2-1 \\ X^2-1 & 0 & X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1)^2$.

Par conséquent, $\mathrm{Sp}(\phi) = \{-1, 1\}$ et ϕ est diagonalisable si et seulement si A l'est, c'est-à-dire si et seulement $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ est annulateur de A. Or $A^2 = I_4$ par calculs donc ϕ est diagonalisable. Bien sûr, on pouvait dire que A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable par le théorème spectral.

Soit $P \in E$, déterminons les sous-espaces propres associés à 1 et -1 :

- $\phi(P) = P \iff (\exists U \in \mathbb{R}[X],\ X^2P = UD + P) \iff (X^2P - P$ est un multiple de $X^4 - 1)$. Avec les congruences, $\phi(P) = P \iff (X^2-1)P \equiv 0\ [D] \iff P \equiv 0\ [X^2+1]$ car $D = (X^2-1)(X^2+1)$ donc $\mathbb{E}_1(\phi) = \mathrm{Vect}(X^2+1, X(X^2+1))$ est un plan (on le savait déjà avec l'égalité des ordres).
- $\phi(P) = -P \iff (X^4 - 1$ divise $X^2P + P)$ d'où $\phi(P) = -P \iff (X^2+1)P \equiv 0\ [D] \iff P \equiv 0\ [X^2-1]$ car $D = (X^2+1)(X^2-1)$ donc $\mathbb{E}_{-1}(\phi) = \mathrm{Vect}(X^2-1, X(X^2-1))$ est encore un plan.

c. $A^2 = I_4$ donc A est inversible et $A^{-1} = A$ donc ϕ est inversible et $\phi^{-1} = \phi$.

6.219 **a.** Si u est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = D$ est diagonale. Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2) = D^2$ est diagonale, $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de u^2 qui est donc diagonalisable.

b. • Si $n = 1$, tout endomorphisme de $\mathbb{C}$ étant une homothétie, u et u^2 sont diagonalisables.

• Si $n \geqslant 2$, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $\mathrm{Mat}_{can}(u) = E_{1,2}$, alors $A^2 = 0$ donc $u^2 = 0$ est diagonalisable alors que $\chi_u = \chi_A = X^n$ puisque A est nilpotente. Si u était diagonalisable, comme 0 est d'ordre algébrique n, on aurait aussi $\dim(E_0(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) = n$ et $u = 0$ ce qui est faux. Ainsi, u n'est pas diagonalisable.

Ainsi, la réciproque de la question précédente est vraie si $n = 1$ et fausse dès que $n \geqslant 2$.

c. $(\supset)$ Si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) + \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$, alors $\exists (y, z) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \times \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$, $x = y + z$ donc $u^2(x) = u^2(y) + u^2(z)$. Or $u(y) = \lambda y$ donc $u^2(y) = u(\lambda y) = \lambda u(y) = \lambda^2 y$ et $u(z) = -\lambda z$ donc $u^2(z) = u(-\lambda z) = -\lambda u(z) = (-\lambda)^2 y = \lambda^2 z$ d'où $u^2(x) = \lambda^2(y+z) = \lambda^2 x$ et on a bien $x \in \mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$.

On a bien établi l'inclusion $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) + \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \subset \mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$.

$(\subset)$ Soit un vecteur $x \in \mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$:

Analyse : supposons que $x = y + z$ (1) avec $(y, z) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \times \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$, par linéarité de u on a $u(x) = \lambda y - \lambda z$ (2) donc $y = \dfrac{u(x) + \lambda x}{2\lambda}$ et $z = \dfrac{\lambda x - u(x)}{2\lambda}$ en combinant (1) et (2) puisque $\lambda \neq 0$.

Synthèse : si $y = \dfrac{u(x) + \lambda x}{2\lambda}$ et $z = \dfrac{\lambda x - u(x)}{2\lambda}$, on a $x = y + z$ et $u(y) = \dfrac{u^2(x) + \lambda u(x)}{2\lambda} = \dfrac{\lambda^2 x + \lambda u(x)}{2\lambda} = \lambda y$ et, de même $u(z) = \dfrac{\lambda u(x) - u^2(x)}{2\lambda} = \dfrac{\lambda x - \lambda^2 x}{2\lambda} = -\lambda z$.

On vient de prouver l'inclusion $\mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) + \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$.

Par double inclusion, on a donc $\mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$ puisque les deux sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$ et $\mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$ sont en somme directe puisqu'associés à des valeurs propres différentes car $\lambda \neq -\lambda$.

d. Méthode 1 : si u^2 est diagonalisable, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u^2, elles sont non nulles car u^2 est inversible. Par définition, $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathsf{Ker}(u^2 - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$. D'après la question précédente, on a donc $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathsf{Ker}(u - \delta_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \oplus \mathsf{Ker}(u + \delta_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$ en notant δ_k une racine carrée complexe de λ_k. Comme $\mathbb{C}^n$ est la somme directe de sous-espaces propres associés à u, par définition, u est diagonalisable.

Méthode 2 : si u^2 est diagonalisable et u inversible, alors $\mathsf{Ker}(u) = \{0\}$ donc $0 \notin \mathsf{Sp}(A)$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u^2 (non nulles car u^2 est aussi inversible). On sait que $P = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)$ est annulateur de u^2 d'où $P(u^2) = \prod_{k=1}^{r} (u^2 - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) = 0$. Notons, pour $k \in [\![1;r]\!]$, δ_k une racine carrée (complexe) de λ_k, alors $\prod_{k=1}^{r} (u^2 - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) = \prod_{k=1}^{r} (u - \delta_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \circ (u + \delta_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) = 0$ donc $Q = \prod_{k=1}^{r} (X - \delta_k)(X + \delta_k)$ est annulateur de u. De plus, $\forall k \in [\![1;r]\!]$, $\delta_k \neq -\delta_k$ car $\lambda_k = \delta_k^2 \neq 0$ et $\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\pm\delta_i \neq \pm\delta_j$ car $\lambda_i = \delta_i^2 \neq \delta_j^2 = \lambda_j$. Ainsi, Q annule u et est scindé à racines simples donc u est diagonalisable.

6.220 **a.** L'application φ est bien définie de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$ et elle est clairement linéaire (il suffit de l'écrire). Comme $\mathrm{dim}(\mathbb{K}_{n-1}[X]) = \mathrm{dim}(\mathbb{K}^n) = n$, φ est un isomorphisme si et seulement si φ est injective. Or, si $P \in \mathsf{Ker}(\varphi)$, on a $\varphi(P) = (P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n)) = (0, \cdots, 0)$ donc $P(\lambda_1) = \cdots = P(\lambda_n) = 0$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des racines de P. Il y a donc n racines distinctes d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, on sait d'après le cours que ceci implique $P = 0$ ce qui prouve que φ est injective.

Par conséquent, φ est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$.

Pour $(\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$, l'unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui vérifie $\varphi(P) = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange et on a classiquement $P = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$.

b. En général, si deux endomorphismes f et g commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. En effet, si $v \in E_\lambda(f)$ pour une valeur propre λ de f, alors $f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$ donc $g(v) \in E_\lambda(f)$, ce qui prouve que $E_\lambda(f)$ est stable par g.

Plus spécifiquement ici, soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, comme λ est valeur propre simple de f, on sait d'après le cours que $E_\lambda(f) = \mathsf{Vect}(v)$. Alors, $f\big(g(v)\big) = g\big(f(v)\big) = \lambda g(v)$ donc $g(v) \in \mathsf{Vect}(v) = E_\lambda(f)$. Alors $\exists \beta \in \mathbb{R}$, $g(v) = \beta v$ donc v est un vecteur propre pour g (associé à la valeur propre β). Tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g (la réciproque n'est pas forcément vraie).

c. Comme f est diagonalisable puisqu'il admet n valeurs propres distinctes en dimension n, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de E composée par des vecteurs propres de f. D'après la question **b.**, ces vecteurs sont aussi des vecteurs propres pour g donc la base $\mathcal{B}$ est composée de vecteurs propres communs à f et à g.

d. Avec $\mathcal{B}$ une des bases de codiagonalisation de la question précédente, il existe donc deux matrices diagonales $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $D' = \mathrm{diag}(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ telles que $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$ et $D' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$. Pour $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on a $g = P(f) \iff D' = P(D) \iff (\forall k \in [\![1;n]\!],\ \beta_k = P(\lambda_k)) \iff (\beta_1, \cdots, \beta_n) = \varphi(P)$. D'après la question **a.**, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui vérifie ceci donc tel que $g = P(f)$.

e. $\mathcal{C}(f) \subset \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{C}(f)$ est non vide car $\mathrm{id}_E \in \mathcal{C}(f)$. De plus, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(g,h) \in \mathcal{C}(f)^2$, alors $\lambda g + h \in \mathcal{C}(f)$

car $f \circ (\lambda g + h) = \lambda f \circ g + f \circ h = \lambda g \circ f + h \circ f = (\lambda g + h) \circ f$. Ainsi, $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ (même une sous-algèbre) et la question précédente montre que l'application $\psi : \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathcal{C}(f)$ définie par $\psi(P) = P(f)$ est un isomorphisme. Ainsi, $\dim(\mathcal{C}(f)) = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X]) = n$.

6.221 **a.** Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathrm{Ker}(u^k)$, alors $u^k(x) = 0_E$ donc $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+1})$. On a bien montré l'inclusion $\mathrm{Ker}(u^k) \subset_k er(u^{k+1})$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

b. On a clairement $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^p)$, et $\mathrm{Ker}(u^{p+1}) = \mathrm{Ker}(u^p)$ par hypothèse, donc $\mathrm{Ker}(u^{p+\ell}) = \mathrm{Ker}(u^p)$ est vrai pour $\ell = 0$ et $\ell = 1$: voilà pour l'initialisation. Si on suppose, pour un entier $\ell \geqslant 1$, que $\mathrm{Ker}(u^{p+\ell}) = \mathrm{Ker}(u^p)$, alors on sait déjà, par transitivité de l'inclusion et avec la question précédente, que $\mathrm{Ker}(u^p) \subset \mathrm{Ker}(u^{p+\ell+1})$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^{p+\ell+1})$, alors $u^{p+\ell+1}(x) = u^{p+\ell}(u(x)) = 0_E$ donc il vient $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^{p+\ell})$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^p)$ donc $u^p(u(x)) = u^{p+1}(x) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u^{p+1}) = \mathrm{Ker}(u^p)$. On a établi l'autre inclusion $\mathrm{Ker}(u^{p+\ell+1}) \subset \mathrm{Ker}(u^p)$. Par double inclusion, on a donc $\mathrm{Ker}(u^{p+\ell+1}) = \mathrm{Ker}(u^p)$ et l'hérédité est prouvée.

Par principe de récurrence, on peut conclure que $\forall \ell \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(u^{p+\ell}) = \mathrm{Ker}(u^p)$.

c. Comme u est nilpotent, $A = \{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 0\}$ n'est pas vide, cette partie non vide et minorée de $\mathbb{N}$ admet donc un minimum noté q par l'énoncé. Ainsi, $u^q = 0$ car $q \in A$ et $u^{q-1} \neq 0$ car $q - 1 \notin A$.

Soit M la matrice de u dans une base quelconque $\mathcal{B}$ de E. Alors $M^q = 0$ donc X^q annule M. Soit λ une valeur propre complexe de M, elle fait donc partie des racines de X^q, elle ne peut donc valoir que 0. Ainsi, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ car un spectre complexe ne peut pas être vide par D'ALEMBERT-GAUSS. On en déduit que $\chi_M = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} (X - \lambda)^{m_\lambda(M)} = X^n$ donc $\chi_u = \chi_M = X^n$.

d. Par CAYLEY-HAMILTON, on a $u^n = 0$ donc $n \in A$. Comme $q = \mathrm{Min}(A)$, on a donc $q \leqslant n$.

6.222 **a.** $B^2 = 3B$ donc $B^3 = 3B^2 = 9B$. Si on suppose que $B^n = 3^{n-1}B$ pour $n \geqslant 1$, on a $B^{n+1} = B^n B$ donc $B^{n+1} = 3^{n-1}B.B = 3^{n-1}B^2 = 3^{n-1}(3B) = 3^n B$. Par principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = 3^{n-1}B$.

b. Comme $A = aB + I_3$ et que I_3 et B commutent, on a $A^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a^k \binom{n}{k} B^k = I_3 + \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a^k \binom{n}{k} 3^{k-1}\Big) B$ par le binôme de NEWTON et d'après la question précédente. Or $\sum\limits_{k=1}^{n} a^k \binom{n}{k} 3^{k-1} = \dfrac{1}{3} \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (3a)^k$ qu'on transforme en $\sum\limits_{k=1}^{n} a^k \binom{n}{k} 3^{k-1} = \dfrac{(1+3a)^n - 1}{3}$ donc $A^n = I_3 + \dfrac{(1+3a)^n - 1}{3} B$.

c. Si $a = 0$, on a $A = I_3$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = I_3$ est très simple. On suppose dans la suite que $a \neq 0$. Comme $B^2 = 3B$, on a $A^2 = (aB + I_3)^2 = a^2B^2 + 2aB + I_3 = (3a^2 + 2a)B + I_3 = (3a + 2)(aB) + I_3$ donc $A^2 = (3a+2)(A - I_3) + I_3 = (3a+2)A - (3a+1)I_3$. Ainsi, $P = X^2 - (3a+2)X + (3a+1) = (X - (3a+1))(X - 1)$ annule A. Comme $a \neq 0$, P est annulateur de A et scindé à racines simples donc A est diagonalisable, ce qui se déduisait aussi directement du théorème spectral car A est réelle et symétrique.

Mais pour les puissances de A, on écrit la division euclidienne de X^n par P, à savoir $X^n = Q_n P + R_n$ avec $R_n = a_n X + b_n$ et on évalue en 1 et $3a + 1$ pour avoir $1 = a_n + b_n$ et $(3a+1)^n = a_n(3a+1) + b_n$ donc $a_n = \dfrac{(3a+1)^n - 1}{3a}$ et $b_n = \dfrac{(3a+1) - (3a+1)^n}{3a}$. Et comme $P(A) = 0$, en remplaçant X par A dans la division euclidienne, on a $A^n = \dfrac{(3a+1)^n - 1}{3a}A + \dfrac{(3a+1)-(3a+1)^n}{3a}I_3$.

6.223 **a.** Pour $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $\Phi_2(P) = \displaystyle\int_X^{X+1}(at^2+bt+c)dt = \left[\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} + ct\right]_X^{X+1}$ donc $\Phi_2(P) = \frac{a}{3}\big((X+1)^3 - X^3\big) + \frac{b}{2}\big((X+1)^2 - X^2\big) + c(X+1-X) = \frac{a}{3}(3X^2+3X+1) + \frac{b}{2}(2X+1) + c \in \mathbb{R}_2[X]$. La linéarité de Φ, donc de Φ_2, provient de la linéarité de l'intégrale. Ainsi, Φ_2 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
b. Comme $\Phi_2(X^2) = X^2 + X + \frac{1}{3}$, $\Phi_2(X) = X + \frac{1}{2}$ et $\Phi_2(1) = 1$, si on note $\mathcal{B}_2 = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\Phi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\chi_{\Phi_2} = (X-1)^3$ donc 1 est la seule valeur propre de Φ_2. Comme $E_1(\Phi_2) \neq \mathbb{R}_2[X]$ car $\Phi_2 \neq \text{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, Φ_2 n'est pas diagonalisable.
c. Comme en **a.**, la linéarité de Φ_n provient de celle de Φ, qui découle de la linéarité de l'intégrale. En notant $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\Phi_n(P) = \Phi(P) = \displaystyle\int_X^{X+1}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\Big)dt = \Big[\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k t^{k+1}}{k+1}\Big]_X^{X+1}$ qui s'écrit aussi $\Phi_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_k\big((X+1)^{k+1} - X^{k+1}\big)}{k+1} \in \mathbb{R}_n[X]$ car $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $(X+1)^{k+1} - X^{k+1} \in \mathbb{R}_n[X]$ après simplification des termes en X^{k+1}. Ainsi, Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme en question **b.**, puisque $\Phi_n(X^k) = \dfrac{(X+1)^{k+1} - X^{k+1}}{k+1} = \sum\limits_{i=0}^{k} \dbinom{k+1}{i} \dfrac{X^i}{k+1} = X^k + \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dbinom{k+1}{i} \dfrac{X^i}{k+1}$ car $\dbinom{k+1}{k} = k+1$, la matrice de Φ_n dans la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Ainsi, $\chi_{\Phi_n} = (X-1)^n$ alors que $\Phi_n \neq \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ dès que $n \geqslant 1$ car par exemple $\Phi_n(X) \neq X$. On a donc deux cas :

- si $n = 0$, $\Phi_0 = \text{id}_{\mathbb{R}_0[X]}$ donc Φ_0 est diagonalisable.
- si $n \geqslant 1$, Φ_n n'est plus diagonalisable mais seulement trigonalisable.

6.224 **a.** $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 1 \\ 0 & X-1 & -3 \\ -1 & 1 & X-4 \end{vmatrix} = X((X-1)(X-4)+3) - (3-(X-1)) = X^3 - 5X^2 + 7X - 4 + X$ donc $\chi_A = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ en développant par rapport à la première ligne. 1 est une racine évidente de χ_A donc $\chi_A = (X-1)(X^2-4X+4) = (X-1)(X-2)^2$. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, A est déjà trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après le cours, A est diagonalisable $\iff \text{dim}(E_2(A)) = 2 \iff (X-1)(X-2)$ annule A.

• $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car 2 est valeur propre de A et clairement pas de rang 1 (les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles) donc $A - 2I_3$ de rang 2 donc, par la formule du rang, $E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I_3)$ est de dimension 1 donc A n'est pas diagonalisable.

• On aurait aussi pu, comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, calculer $(A - I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$ avec la même conclusion : A n'est pas diagonalisable.

b. Dans la matrice $A - 2I_3$, en notant C_1, C_2, C_3 ses colonnes, on a $C_1 + 3C_2 + C_3 = 0$ donc, comme on sait déjà que $E_2(A)$ est une droite, on a $E_2(A) = \text{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (1, 3, 1)$.

c. La matrice $A - I_3$ est de rang 2 donc $\text{dim}(E_1(A)) = 3 - 2 = 1$ par la formule du rang ; on le savait déjà étant donné que 1 est racine simple de χ_A. Comme la somme des deux premières colonnes de $A - I_3$ est nulle, on a $E_1(A) = \text{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1,1,0)$.

Si on veut effectivement trigonaliser la matrice A, on cherche un vecteur v_3 tel que $Av_3 = 2v_3 + v_2$, ce qui revient à résoudre le système $(A - 2I_3)X = V_2$ ou $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = V_2$ et on trouve sans peine parmi l'infinité de solutions, par exemple $v_3 = (-1,0,1)$. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, comme $\det(P) = 1 \neq 0$, P est inversible donc $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$. Par formule de changement de base, $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Analyse</u> : soit F un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par A. En notant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, on peut induire u dans F et on note u_F l'endomorphisme induit. On sait que χ_{u_F} divise χ_u. Ainsi, on n'a que deux possibilités, $\chi_{u_F} = (X-1)(X-2)$ ou $\chi_{u_F} = (X-2)^2$.

- Si $\chi_{u_F} = (X-1)(X-2)$, comme χ_{u_F} est scindé à racines simples, u_F est diagonalisable donc $F = E_1(u_F) \oplus E_2(u_F)$. Or $E_1(u_F) \subset E_1(u)$ et $E_2(u_F) \subset E_2(u)$ donc, par inclusion et égalité des dimensions, $E_1(u_F) = E_1(u) = \text{Vect}(v_1)$ et $E_2(u_F) = E_2(u) = \text{Vect}(v_2)$ donc $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$.
- Si $\chi_{u_F} = (X-2)^2$, par Cayley-Hamilton, $(u_F - 2\text{id}_F)^2 = 0$ donc $F = \text{Ker}((u_F - 2\text{id}_F)^2)$. Or $\text{Ker}((u_F - 2\text{id}_F)^2) \subset \text{Ker}((u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2)$ et $(A - 2I_3)^2 = P(T - 2I_3)^2P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ est de rang 1 (ou directement $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$) donc, par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}((A - 2I_3)^2) = 2$.

  Par inclusion et égalité des dimensions, $F = \text{Ker}((u_F - 2\text{id}_F)^2) = \text{Ker}((u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2) = \text{Vect}(v_2, v_3)$.

<u>Synthèse</u> : comme on a montré que $u(v_1) = v_1$, $u(v_2) = 2v_2$ et $u(v_3) = 2v_3 + v_2$, les plans $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_2, v_3)$ sont stables par u.

Il existe donc exactement deux plans stables par A, ce sont $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_2, v_3)$.

6.225 Soit λ une valeur propre de A, il existe donc un vecteur $u \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $Au = \lambda u$. Considérons un indice $p \in [\![1;n]\!]$ tel que $|u_p| = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} |u_i| = ||u||_\infty > 0$. Si on écrit la ligne p du système $Au = \lambda u$, on a $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{p,j}u_j = \lambda u_p$ qui s'écrit aussi $(\lambda - a_{p,p})u_p = -\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{p,j}u_j$. En passant au module, par inégalité triangulaire, on a donc $|\lambda - a_{p,p}|\,|u_p| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{p,j}|\,|u_j| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{p,j}|\,|u_p|$ par définition de p. Comme $|u_p| > 0$, il vient $|\lambda - a_{p,p}| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{p,j}|$ et on a $\lambda \in \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{p,p}| < \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{p,j}| \right\}$. Mais comme p dépend de λ et n'est pas unique, on peut juste dire que le spectre de A est inclus dans une réunion de disque fermés, $\text{Sp}(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{i,i}| < \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \right\}$. C'est le théorème de Gerschgorin.

$\boxed{\textbf{6.226}}$ Notons s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à S.

a. Comme $\chi_S = \begin{vmatrix} X-5 & 3 \\ 3 & X+5 \end{vmatrix} = (X-5)(X+5)-9 = X^2-25-9 = X^2-34$, on a $\mathrm{Sp}(S) = \{-\sqrt{34}, \sqrt{34}\}$. χ_S est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et S est semblable à $D_1 = D(\sqrt{34}, -\sqrt{34})$. D'après le théorème spectral, comme S est symétrique réelle, elle est même orthosemblable à D_1.

b. Soit $v_1 = e_1$ et $v_2 = Sv_1 = Se_1 = 5e_1 - 3e_2$. La famille $\mathcal{B} = (v, v_2)$ est clairement libre donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$ car $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. Comme $Sv_2 = 5Se_1 - 3Se_2 = 5(5e_1 - 3e_2) - 3(-3e_1 - 5e_2) = 34e_1 = 34v_1$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = N = \begin{pmatrix} 0 & 34 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par formule de changement de base, $S = PNP^{-1}$ en notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}$. Ainsi, S est semblable à N qui est à diagonale nulle.

c. L'application ϕ est clairement linéaire, ce n'est pas un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car $D(1,2) \neq 0 \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Par contre, $N \in \mathrm{Im}(\phi)$ car $N = \begin{pmatrix} 0 & 34 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \phi(A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -34 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puisque si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\phi(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 34 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

En notant $C = PD(1,2)P^{-1}$ et $D = PAP^{-1}$, on a $CD - DC = PD(1,2)P^{-1}PAP^{-1} - PAP^{-1}PD(1,2)P^{-1}$ donc $CD - DC = P\big(D(1,2)A - AD(1,2)\big)P^{-1} = P\phi(A)P^{-1} = PNP^{-1}$ d'où $S = CD - DC$ avec $(C, D) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$.

$\boxed{\textbf{6.227}}$ **a.** Comme $u^2 = \mathrm{id}_E$, on a $\mathrm{Tr}\,(v) = \mathrm{Tr}\,(v \circ u \circ u) = \mathrm{Tr}\,((v \circ u) \circ u) = \mathrm{Tr}\,((-u \circ v) \circ u) = -\mathrm{Tr}\,(u \circ v \circ u)$ donc $\mathrm{Tr}\,(v) = -\mathrm{Tr}\,((u \circ v) \circ u) = -\mathrm{Tr}\,(u \circ (u \circ v))) = -\mathrm{Tr}\,(v)$ (car $\mathrm{Tr}\,(f \circ g) = \mathrm{Tr}\,(g \circ f)$ pour tout endomorphismes f et g d'un espace de dimension finie) d'où $\mathrm{Tr}\,(v) = 0$. Bien sûr, par symétrie, $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$.

b. Par hypothèse, u et v sont des symétries donc elles sont diagonalisables car $X^2 = (X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et annulateur de u et de v et $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ et $\mathrm{Sp}(v) \subset \{-1, 1\}$. Comme la trace est la somme des valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité, 1 et -1 sont donc valeurs propres doubles de u et de v. Ainsi, $E_1(u), E_{-1}(u), E_1(b)$ et $E_{-1}(v)$ sont des plans.

c. On a $u(v(x)) = u \circ v(x) = -v \circ u(x) = -v(u(x)) = -v(x)$ car $u(x) = x$ donc $v(x) \in E_{-1}(u)$. De même, $v(y) \in E_{-1}(u)$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\lambda v(x) + \mu v(y) = 0_E$, il vient $-\lambda x - \mu y = 0_E$ en appliquant u ce qui donne $\lambda = \mu = 0$ car (x, y) libre. Ainsi, $(v(x), v(y))$ est une famille libre de $E_{-1}(u)$ qui est un plan donc $(v(x), v(y))$ est une base de $E_{-1}(u)$.

Comme $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$ puisque u est une symétrie de E, et que (x, y) est une base de $E_1(u)$ et $(v(x), v(y))$ une base de $E_{-1}(u)$, la famille $\mathcal{B} = (x, y, v(x), v(y))$ est une base de E adaptée à la décomposition précédente. De plus, on a déjà vu que $u \circ v(x) = -v(x)$ et $u \circ v(y) = -v(y)$ et on a aussi $u \circ v(v(x)) = u(x) = x$ car $v^2 = \mathrm{id}_E$ et, de même, $u \circ v(v(y)) = y$. Ainsi, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\chi_A = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X & 0 & -1 \\ 1 & 0 & X & 0 \\ 0 & 1 & 0 & X \end{vmatrix}$. En effectuant $C_1 \longleftarrow C_1 + XC_3$ et $C_2 \longleftarrow C_2 + XC_4$, on a $\chi_A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ X^2+1 & 0 & X & 0 \\ 0 & X^2+1 & 0 & X \end{vmatrix}$ puis on développe par rapport à la première colonne deux fois et on a $\chi_A = (X^2+1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (X^2+1)^2$ donc $\mathrm{Sp}(u \circ v) = \{-i, i\}$.

Comme $A+iI_4=\begin{pmatrix} i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ -1 & 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & i \end{pmatrix}$ est de rang 2 car $C_3=-iC_1$, $C_4=-iC_2$ et que (C_1,C_2) libre, $E_{-i}(u\circ v)=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ avec $v_1=ix+v(x)$ et $v_2=iy+v(y)$. De même, $A-iI_4=\begin{pmatrix} -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{pmatrix}$ avec $C_3=iC_1$, $C_4=iC_2$ et (C_1,C_2) libre, donc $E_i(u\circ v)=\mathrm{Vect}(v_3,v_4)$ avec $v_3=ix-v(x)$, $v_4=iy-v(y)$. Comme $\dim(E_i(A))+\dim(E_{-i}(A))=4=\dim(\mathbb{C}^4)$, l'endomorphisme $u\circ v$ est diagonalisable. On pouvait aussi constater que $(u\circ v)^2=(u\circ v)\circ(u\circ v)=u\circ(v\circ u)\circ v=-u\circ(u\circ v)\circ v=-u^2\circ v^2=-\mathrm{id}_E$ donc que $X^2+1=(X+i)(X-i)$ est annulateur de $u\circ v$ et scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc $u\circ v$ est diagonalisable.

6.228 **a.** Par hypothèse, pour tout $x\in\mathbb{R}$, comme f est continue et intégrable en $-\infty$, $F(x)$ existe donc la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\int_{-\infty}^{0}f(t)t+\int_0^x f(t)dt$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ donc, par le théorème fondamental de l'intégration, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)$ car $x\mapsto\int_0^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en 0.

b. Pour une fonction polynomiale P, $t\mapsto P(t)e^t$ est continue sur $]-\infty;x]$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $P(t)e^t\underset{-\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc $L(P)(x)$ existe ce qui montre que L est bien définie sur E. La linéarité de L provient de la linéarité de l'intégrale. Soit, pour tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction $p_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $p_k(t)=t^k$ de sorte que $E=\mathrm{Vect}_{k\in\mathbb{N}}(p_k)$. On a $L(p_0)(x)=e^{-x}\int_{-\infty}^x t^0e^tdt=e^{-x}[e^t]_{-\infty}^x=1$ donc $L(p_0)=p_0$. De plus, pour $k\in\mathbb{N}^*$, en posant $u=p_k$ et $v:t\mapsto e^t$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]-\infty;x]$ et $\lim\limits_{t\to-\infty}u(t)v(t)=0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, on a la relation $\forall x\in\mathbb{R}$, $L(p_k)(x)=e^{-x}\left([t^ke^t]_{-\infty}^x-\int_{-\infty}^x kt^{k-1}e^tdt\right)=x^k-kL(p_{k-1})(x)$ d'où $L(p_k)=p_k-kL(p_{k-1})$ (1). Comme $L(p_0)\in E$, la relation (1) permet de montrer par récurrence que $\forall k\in\mathbb{N}$, $L(p_k)\in E$. Ainsi, comme la famille $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre E, ceci montre bien que L est un endomorphisme de E.

c. La relation (1) permet aussi de montrer par récurrence que si on note E_n le sous-espace des fonctions polynomiales de degrés inférieurs ou égaux à n, alors E_n est stable par L. En effet, E_0 est stable par L car $L(p_0)=p_0$. De plus, pour $n\in\mathbb{N}^*$, si E_{n-1} est stable par L, et si $P=a_np_n+q_{n-1}$ avec $a_n\in\mathbb{R}$, $q_{n-1}\in E_{n-1}$, $L(P)=a_nL(p_n)+L(q_{n-1})=a_n(p_n+nL(p_{n-1}))+L(q_{n-1})=a_np_n+(na_nL(p_{n-1})+L(q_{n-1}))\in E_n$ d'après (1) et par hypothèse de récurrence.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ une valeur propre de L, alors il existe une fonction polynomiale $P\in E$ telle que $L(P)=\lambda P$. Si on note $n=\deg(P)$, on a $P\in E_n$ et on peut considérer l'application induite $L_n:E_n\to E_n$ définie par $L_n(P)=L(P)$ et $L(P)=\lambda P=L_n(P)$ donc λ est valeur propre de L_n. D'après la relation (1), la matrice de L_n dans la base canonique $\mathcal{B}_n=(p_0,\cdots,p_n)$ de E_n est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale car $L(p_k)=p_k-kL(p_{k-1})$. Ainsi, $\chi_{L_n}=(X-1)^{n+1}$ et $\mathrm{Sp}(L_n)=\{1\}$. Ainsi, la seule valeur propre de L est 1 car $L(p_0)=p_0$ et que $p_0\neq 0$.

Soit $P\in E$ tel que $L(P)=P$, alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}\int_{-\infty}^x P(t)e^tdt=P(x)$. Avec la même intégration par parties qu'en **b.**, $e^{-x}\left([P(t)e^t]_{-\infty}^x-\int_{-\infty}^x P'(t)e^tdt\right)=P(x)$ qui se simplifie en $\forall x\in\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^x P'(t)e^tdt=0$. Il suffit de dériver cette relation avec la question **a.** et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x)e^x = 0$ donc $P'(x) = 0$ et P est constante car $\mathbb{R}$ est un intervalle. Par conséquent, 1 est la seule valeur propre de L et $E_1(L) = \mathrm{Vect}(p_0)$.

6.229 **a.** Dans le calcul de $\det(A)$, on développe par rapport à la dernière colonne et, si $D = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_{q-1})$, on a $\det(A) = (-1)^{q+1}a_q\det(D)$ donc $\det(A) = (-1)^{q+1}a_q \prod_{k=1}^{q-1} b_k \neq 0$ car les réels $a_q, b_1, \cdots, b_{q-1}$ sont strictement positifs. Ainsi, A est inversible et 0 n'est pas valeur propre de A.

b. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2b_1 & a_1a_2 + a_3b_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_1a_q \\ b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & b_1a_q \\ b_1b_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{q-1}b_{q-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on se rend compte que les deux premières lignes de A^2 ne contiennent que des termes strictement positifs tout comme la première ligne de A ne contient que des termes strictement positifs. Soit $k \in [\![1; q-1]\!]$ tel que les k premières lignes de A^k ne contiennent que des termes strictement positifs. Avec des notations évidentes, en écrivant $A^{k+1} = AA^k$, $L_1(A^{k+1}) \geqslant a_1L_1(A^k) > 0$ et $\forall j \in [\![2; k+1]\!],\ L_j(A^{k+1}) = b_{j-1}L_{j-1}(A^k) > 0$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, les $k+1$ premières lignes de A^{k+1} ne contiennent que des termes strictement positifs. Par principe de récurrence, cette propriété est vraie pour tout $k \in [\![1; q]\!]$ donc A^q a tous ses coefficients strictement positifs.

c. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_q)$ le sous-espace propre associé. Comme les $q-1$ premières colonnes de la matrice $A - \lambda I_q = \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & \cdots & \cdots & a_q \\ b_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{q-1} & -\lambda \end{pmatrix}$ forment une famille libre (grâce aux $b_k \neq 0$ échelonnés), on a $\mathrm{rang}\,(A - \lambda I_q) \geqslant q-1$. Puisque $\mathrm{rang}\,(A - \lambda I_q) < q$ car $A - \lambda I_q$ n'est pas inversible par hypothèse, $\mathrm{rang}\,(A - \lambda I_q) = q-1$. D'après la formule du rang, $q = \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_q)) + \mathrm{rang}\,(A - \lambda I_q)$ donc $\dim(E_\lambda(A)) = 1$. Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres complexes de A sont des droites. On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

d. Dans le calcul de $\chi_A = \begin{vmatrix} X - a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_q \\ -b_1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -b_{q-1} & X \end{vmatrix}$, on ne change pas le déterminant en effectuant l'opération de Gauss $C_q \longleftarrow C_q + \dfrac{X}{b_{q-1}}C_{q-1} + \dfrac{X^2}{b_{q-2}b_{q-1}}C_{q-2} + \cdots + \dfrac{X^{q-1}}{b_1 \cdots b_{q-1}}C_1$ et on obtient la valeur $\chi_A = \begin{vmatrix} X - a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & P \\ -b_1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -b_{q-1} & 0 \end{vmatrix}$ avec $P = \dfrac{X^{q-1}}{b_1 \cdots b_{q-1}}(X - a_1) - \Big(\sum_{j=2}^{q-1} \dfrac{X^{q-j}}{b_j \cdots b_{q-1}}a_j\Big) - a_q$. On développe ensuite par rapport à la dernière colonne et, comme en **a.**, on a $\chi_A = (-1)^{q+1}\Big(\prod_{j=1}^{q-1}(-b_j)\Big)P$ donc $\chi_A = X^q - \sum_{j=1}^{q}\Big(\prod_{k=1}^{j-1} b_k\Big)a_j X^{q-j}$.

<u>Méthode 1</u> : on constate que χ_A a son premier coefficient (celui en X^q) qui est strictement positif et tous les autres sont strictement négatifs. Les dérivées successives $\chi_A', \cdots, \chi_A^{(q-1)}$ de χ_A vont avoir la même propriété. Par exemple $\chi_A^{(q-1)} = q!X - (q-1)!a_1$. Ainsi, $\chi_A^{(q-1)}$ s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$ (en $\alpha_{q-1} = \frac{a_1}{q}$). Ceci montre que $\chi_A^{(q-2)}$ est strictement décroissante sur $[0;\alpha_{q-2}]$ et strictement croissante sur $[\alpha_{q-1};+\infty[$ alors que $\chi_A^{(q-1)}(0) < 0$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} \chi_A^{(q-2)}(t) = +\infty$. Ceci montre que $\chi_A^{(q-2)}$ ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en $\alpha_{q-2} > \alpha_{q-1}$. On continue les tableaux de variations de $\chi_A^{(q-1)}, \chi_A^{(q-2)}, \cdots, \chi_A', \chi_A$ avec la même conclusion à chaque fois, $\chi_A^{(k)}$ ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $k \in [\![0;q-1]\!]$.

<u>Méthode 2</u> : posons $Q = X^q\chi_A(1/X) = 1 - \sum_{j=1}^{q}\Big(\prod_{k=1}^{j-1} b_k\Big)a_j X^j$. Comme $Q' = -\sum_{j=1}^{q} j\Big(\prod_{k=1}^{j-1} b_k\Big)a_j X^{j-1}$ et que tous les $a_1, \cdots, a_q, b_1, \cdots, b_{q-1}$ sont strictement positifs, la fonction polynomiale Q' reste strictement négative sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ donc Q y est strictement décroissante. Puisque $Q(0) = 1 > 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t) = -\infty$ car le coefficient dominant de Q est strictement négatif, la fonction Q s'annule une unique fois en α_0 sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\forall t > 0,\ Q(t) = 0 \iff \chi_A(1/t) = 0$, χ_A s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en $1/\alpha_0$.

Quelle que soit la méthode, χ_A ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, comme les valeurs propres de A sont les racines de χ_A, A admet une unique valeur propre strictement positive.

6.230 **a.** Soit $P \in E$, on a $\deg(P(1)(X^2-X) + P(-1)(X^2+X)) \leqslant 2$ donc le polynôme $T(P)$ appartient bien à E. De plus, si $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a par définition $T(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1)(X^2 - X) + (\lambda P + Q)(-1)(X^2 + X)$ qui devient $T(\lambda P + Q) = (\lambda P(1) + Q(1))(X^2 - X) + (\lambda P(-1) + Q(-1))(X^2 + X)$ et on a enfin la relation $T(\lambda P + Q) = \lambda(P(1)(X^2 - X) + P(-1)(X^2 + X)) + (P(1)(X^2 - X) + P(-1)(X^2 + X)) = \lambda T(P) + T(Q)$ donc T est bien un endomorphisme de E. Comme $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $T(X^k) = X^2 - X + (-1)^k(X^2 + X)$, on a $T(X^k) = 2X^2$ si k est pair et $T(X^k) = -2X$ si k est impair. Ainsi, en notant $\mathcal{B}_0 = (1, X, \cdots, X^n)$ la base canonique de E, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(T) = A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & \cdots & \cdots \\ 2 & 0 & 2 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Les colonnes d'indice pairs (resp. impairs) sont égales.

b. Visiblement, rang(T) = rang$(A) = 2$ donc $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(E) - 2 = n + 1 - 2 = n - 1$ avec la formule du rang. On sait que Im(T) est engendré par les images par T des vecteurs de $\mathcal{B}_0$ donc $\text{Im}(T) = \text{Vect}(X, X^2)$ et il est clair que les vecteurs $P_k = X^{2k} - 1$ pour $2k \leqslant n$ et $Q_k = X^{2k+1} - X$ pour $2k + 1 \leqslant n$ sont dans le noyau de T car $T(X^{2k}) = T(1) = 2X^2$ et $T(X^{2k+1}) = T(X) = -2X$. Ainsi, selon la parité de n :

- Si $n = 2p$ est pair, $\mathcal{B} = (P_1, Q_1, \cdots, Q_{p-1}, P_p)$ est une famille de degrés échelonnés donc libre de $n - 1 = 2p - 1$ vecteurs de $\text{Ker}(T)$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\text{Ker}(T)$.
- Si $n = 2p+1$ est impair, $\mathcal{B} = (P_1, Q_1, \cdots, P_p, Q_p)$ est une famille de degrés échelonnés donc libre de

$n-1=2p$ vecteurs de $\text{Ker}(T)$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\text{Ker}(T)$.

c. On a déjà vu que 0 était valeur propre de T. Comme on a vu que $T(X^2)=2X^2$, 2 est valeur propre de T. De même, $T(X)=-2X$ donc -2 est aussi valeur propre de T. Ainsi, $\text{Sp}(T)=\{-2,0,2\}$ et $E_0(T)=\text{Ker}(T)$ est de dimension $n-1$, $E_2(T)=\text{Vect}(X^2)$ et $E_{-2}(T)=\text{Vect}(X)$ sont des droites. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $\dim(E)$, T est diagonalisable.

6.231 **a.** La deuxième colonne de A vaut j fois la première car $j^3=1$ et la troisième vaut j^2 fois la première, ceci justifie que rang$(A)=1$ car la matrice A est non nulle. Ainsi, d'après la formule du rang, on a $\dim(\text{Ker}(A))=3-\text{rang}(A)=2$ donc $\dim(E_0(A))=2$ ce qui montre d'après le cours que 0 est racine au moins double de χ_A. Ainsi, $\chi_A=X^3-\text{Tr}(A)X^2$ car X^2 divise χ_A. Comme $\text{Tr}(A)=1+j+j^2=0$, on a $\chi_A=X^3$ donc $\text{Sp}(A)=\{0\}$ et A est nilpotente d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Comme $\dim(E_0(A))=2\neq 3=m_0(A)$, A n'est pas diagonalisable (par ce raisonnement, la seule matrice nilpotente diagonalisable est la matrice nulle).

b. Comme $\text{Im}(A)=\text{Vect}(v_1)$ avec $v_1=(1,j,j^2)$ et que $v_1\in\text{Ker}(A)$, on a $\text{Im}(A)\subset\text{Ker}(A)$ et $A^2=0$. On peut compléter (v_1) en une base de $\text{Ker}(A)$, prenons par exemple $v_3=(j,-1,0)$ de sorte que $v_3\in\text{Ker}(A)$ et que (v_1,v_3) est une base de $\text{Ker}(A)$ car on a clairement (v_1,v_3) libre. Comme $Av_2=v_1$ en prenant $v_1=(1,0,0)$ en regardant la première colonne de A, et que $\mathcal{B}=(v_1,v_2,v_3)$ car (v_1,v_3) libre et $v_2\notin\text{Vect}(v_1,v_3)=\text{Ker}(A)$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a)=E_{1,2}$ en notant a l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A. En notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ à $\mathcal{B}$, on a par formule de changement de base $A=PE_{1,2}P^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}1&1&j\\ j&0&-1\\ j^2&0&0\end{pmatrix}$ ($\mathcal{B}$ est à nouveau une base de $\mathbb{C}^3$ car $\det(P)=-j^2\neq 0$).

c. Soit $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on pose $C=P^{-1}BP$ d'où $B=PCP^{-1}$ et on a l'équivalence $AB=BA\iff E_{1,2}C=CE_{1,2}$. Or en notant $C=\begin{pmatrix}c_{1,1}&c_{1,2}&c_{1,3}\\ c_{2,1}&c_{2,2}&c_{2,3}\\ c_{3,1}&c_{3,2}&c_{3,3}\end{pmatrix}$, on a $E_{1,2}C=\begin{pmatrix}c_{2,1}&c_{2,2}&c_{2,3}\\ 0&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}$ et $CE_{1,2}=\begin{pmatrix}0&c_{1,1}&0\\ 0&c_{2,1}&0\\ 0&c_{3,1}&0\end{pmatrix}$ donc $E_{1,2}C=CE_{1,2}\iff(c_{2,1}=c_{1,1}-c_{2,2}=c_{2,3}=c_{3,1}=0)$. Ainsi, les matrices qui commutent avec $E_{1,2}$ sont de la forme $C=\begin{pmatrix}c_{1,1}&c_{1,2}&c_{1,3}\\ 0&c_{1,1}&0\\ 0&c_{3,2}&c_{3,3}\end{pmatrix}$ donc l'ensemble des matrices qui commutent avec $E_{1,2}$, noté $C(E_{1,2})$, vérifie $C(E_{1,2})=\text{Vect}(E_{1,1}+E_{2,2},E_{3,3},E_{1,2},E_{1,3},E_{3,2})$ est de dimension 5 car la famille $(E_{1,1}+E_{2,2},E_{3,3},E_{1,2},E_{1,3},E_{3,2})$ est clairement libre. De plus, l'application $\varphi:C(E_{1,2})\to C(A)$ définie par $\varphi(C)=P^{-1}CP$ est linéaire, injective car $P^{-1}CP=0\Longrightarrow C=0$ et surjective d'après l'équivalence qui précède. Comme φ est un isomorphisme, il conserve la dimension donc $\dim(C(A))=\dim(C(E_{1,2}))=5$.

6.232 **a.** En transposant la relation $M^2+M^T=I_n$, $(M^T)^2+M=I_n$ donc $(I_n-M^2)^2+M-I_n=M^4-2M^2+M=0$ et le polynôme $Q=X^4-2X^2+X$ annule M. Or $Q=X(X-1)(X^2+X-1)=X(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)$ avec $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ donc Q est scindé à racines simples. Ainsi M est encore diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\text{Sp}(M)\subset\{0,1,\alpha,\beta\}$ d'après le cours.

b. Étant donnée la question, on s'attend à un réponse négative. On va commencer par le cas simple $n=2$. Soit $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $M\neq M^T$ et $M^2+M^T=I_2$. Distinguons selon les valeurs propres de M avec **a.**.

Si $\underline{\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda\}}$ avec $\lambda \in \{0, 1, \alpha, \beta\}$, alors comme M est diagonalisable d'après **a.**, M est semblable à λI_2 donc $M = \lambda I_2$ ce qui est impossible car M n'est pas symétrique.

Si $\underline{\mathrm{Sp}(M) = \{0, 1\}}$, comme M est diagonalisable, $M = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $M^2 = PD^2P^{-1} = M$ car $D^2 = D$. Ainsi, $M^2 + M^T = M + M^T = I_2$ ce qui montre que $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -a \\ a & 1/2 \end{pmatrix}$. Or $M^2 = M = \begin{pmatrix} (1/4) - a^2 & -a \\ a & (1/4) - a^2 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\frac{1}{4} - a^2 = \frac{1}{2}$ donc $a^2 = -\frac{1}{4}$ d'où $a = \pm\frac{i}{2}$. Il y a donc deux matrices vérifiant ces conditions, $M_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

Si $\underline{\mathrm{Sp}(M) = \{\alpha, \beta\}}$, comme M est diagonalisable, $(X - \alpha)(X - \beta) = X^2 + X - 1$ est annulateur de M donc $M^2 + M - I_2 = 0$. Mais ceci est impossible car $M^2 - I_2 = -M^T \neq -M$.

Si $\underline{\mathrm{Sp}(M) = \{0, \alpha\}}$, de même, $X(X - \alpha) = X^2 - \alpha X$ annule M d'où $M^2 = \alpha M$ et $\alpha M + M^T = I_2$ (1). En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relation (1) montre que $M = \frac{1}{\alpha + 1} I_2$, absurde car M non symétrique.

Si $\underline{\mathrm{Sp}(M) = \{0, \beta\}}$, de même, $X(X - \beta) = X^2 - \beta X$ annule M d'où $M^2 = \beta M$ et $\beta M + M^T = I_2$ (1). En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relation (1) montre que $M = \frac{1}{\beta + 1} I_2$, absurde car M non symétrique.

Si $\underline{\mathrm{Sp}(M) = \{1, \alpha\}}$, comme avant, $(X-1)(X-\alpha) = X^2 - (\alpha+1)X + \alpha$ annule M, d'où $M^2 = (\alpha+1)M + \alpha I_2$ et $(\alpha+1)M + M^T = (1-\alpha)I_2$ (1). En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relation (1) montre que $M = \frac{1}{\alpha + 2} I_2$, absurde car M non symétrique.

Si $\underline{\mathrm{Sp}(M) = \{1, \beta\}}$, comme avant, $(X-1)(X-\beta) = X^2 - (\beta+1)X + \beta$ annule M, d'où $M^2 = (\beta+1)M + \beta I_2$ et $(\beta+1)M + M^T = (1-\beta)I_2$ (1). En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relation (1) montre que $M = \frac{1}{\beta + 2} I_2$, absurde car M non symétrique.

Les seules $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $M \neq M^T$ et $M^2 + M^T = I_2$ sont $M_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

Si $\underline{n = 2p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, il suffit de poser $M = \mathrm{diag}(M_{i_1}, \cdots, M_{i_p})$ avec $(i_1, \cdots, i_p) \in \{1, 2\}^p$ et on a $M^2 = \mathrm{diag}(I_n - M_{i_1}^T, \cdots, I_2 - M_{i_p}^T) = I_n - \big(\mathrm{diag}(M_{i_1}, \cdots, M_{i_p})\big)^T = I_n - M^T$ et M n'est pas symétrique.

Si $\underline{n = 2p + 1}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, il suffit de poser $M = \mathrm{diag}(\alpha, M_{i_1}, \cdots, M_{i_p})$ avec $(i_1, \cdots, i_p) \in \{1, 2\}^p$ et on a $M^2 = \mathrm{diag}(\alpha^2, I_n - M_{i_1}^T, \cdots, I_2 - M_{i_p}^T) = I_n - \big(\mathrm{diag}(\alpha, M_{i_1}, \cdots, M_{i_p})\big)^T = I_n - M^T$ car $\alpha^2 + \alpha = 1$ et M n'est pas symétrique.

La réponse à la question posée est :

Si $\underline{n = 1}$, oui, car toutes les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sont symétriques.

Si $\underline{n \geqslant 2}$, non, la matrice M n'est pas forcément symétrique si elle vérifie les conditions $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$, avec les contre-exemples vus ci-dessus dans les cas n pair ou n impair.

6.233 **a.** Si $f \in E$, par opérations, comme $x \mapsto \frac{x}{2}$ et $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ sont de classe C^∞ de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$, la fonction $T(f)$ est bien définie et de classe C^∞ sur $[0; 1]$ donc $T(f) \in E$. Pour $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on calcule $\forall x \in [0; 1]$, $T(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{2}\Big((\lambda f + g)\Big(\frac{x}{2}\Big) + (\lambda f + g)\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big) = \frac{\lambda}{2}\Big(f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big) + \frac{1}{2}\Big(g\Big(\frac{x}{2}\Big) + g\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big)$ ce qui donne $T(\lambda f + g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$ donc $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$: T est en endomorphisme de E.

b. Pour $f \in E$ et $x \in [0; 1]$, $T^2(f)(x) = T(T(f))(x) = \frac{1}{2}\Big(T(f)\Big(\frac{x}{2}\Big) + T(f)\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big)$ et, par définition de $T(f)$, on a $T^2(f)(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\left(f\left(\dfrac{x}{4}\right)+f\left(\dfrac{x+1}{4}\right)\right)+\dfrac{1}{2}\left(f\left(\dfrac{x+2}{4}\right)+f\left(\dfrac{x+3}{4}\right)\right)\right)$ ce qui donne l'initialisation suivante : $T^2(f)(x)=\dfrac{1}{4}\left(f\left(\dfrac{x}{4}\right)+f\left(\dfrac{x+1}{4}\right)+f\left(\dfrac{x+2}{4}\right)+f\left(\dfrac{x+3}{4}\right)\right)$.

Soit $n\geqslant 1$ tel que $\forall f\in E,\ \forall x\in[0;1],\ T^n(f)(x)=\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}f\left(\dfrac{x+k}{2^n}\right)$. Par définition, comme $T^{n+1}=T^n\circ T$, on obtient $T^{n+1}(f)(x)=T^n(T(f))(x)=\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}T(f)\left(\dfrac{x+k}{2^n}\right)$ par hypothèse de récurrence puis, par définition de T, $T^{n+1}(f)(x)=\dfrac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}\left(f\left(\dfrac{x+k}{2^{n+1}}\right)+f\left(\dfrac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\right)\right)=\dfrac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}f\left(\dfrac{x+k}{2^{n+1}}\right)+\dfrac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}f\left(\dfrac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\right)$.
En posant $j=k+2^n$ dans le seconde somme, on a $\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}f\left(\dfrac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\right)=\sum\limits_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}f\left(\dfrac{x+j}{2^{n+1}}\right)$ donc, en changeant j en k et en regroupant les deux sommes, on arrive bien à $T^{n+1}(f)(x)=\dfrac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^{n+1}-1}f\left(\dfrac{x+k}{2^{n+1}}\right)$.

Par principe de récurrence, $\forall f\in E,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0;1],\ T^n(f)(x)=\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}f\left(\dfrac{x+k}{2^n}\right)$, cette formule étant même valable quand $n=0$ car $T^0(f)(x)=f(x)=\dfrac{1}{2^0}\sum\limits_{k=0}^{2^0-1}f\left(\dfrac{x+k}{2^0}\right)$ puisque $T^0=\mathrm{id}_E$.

c. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons la somme de RIEMANN $R_n(f)=\dfrac{1-0}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\left(0+k\dfrac{1-0}{n}\right)$ associée à $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ continue. D'après un théorème du cours, $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(f)=\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$. D'après **b.**, $T^n(f)(0)=R_{2^n}(f)$. Comme $(R_{2^n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}T^n(f)(0)=\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

d. Pour $x\in[0;1]$ et $n\in\mathbb{N}$, $T^n(f)(x)-T^n(f)(0)=\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}\left(f\left(\dfrac{x+k}{2^n}\right)-f\left(\dfrac{x+k}{2^n}\right)\right)$ donc, par inégalité triangulaire, $|T^n(f)(x)-T^n(f)(0)|\leqslant\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}\left|f\left(\dfrac{x+k}{2^n}\right)-f\left(\dfrac{k}{2^n}\right)\right|$. Or, par inégalité des accroissements finis, en posant $M=||f'||_{\infty,[0;1]}$ qui existe puisque la fonction f' est continue sur le segment $[0;1]$ d'après le théorème des bornes atteintes, on a $\left|f\left(\dfrac{x+k}{2^n}\right)-f\left(\dfrac{k}{2^n}\right)\right|\leqslant\dfrac{Mx}{2^n}$. Ainsi, $|T^n(f)(x)-T^n(f)(0)|\leqslant\dfrac{2^nMx}{2^{2n}}\leqslant\dfrac{M}{2^n}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(T^n(f)(x)-T^n(f)(0))=0$ dont on déduit que $\forall x\in[0;1],\ \lim\limits_{n\to+\infty}T^n(f)(x)=\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ en écrivant $T^n(f)(x)=\big(T^n(f)(x)-T^n(f)(0)\big)+T^n(f)(0)$. On peut donc affirmer que la suite de fonctions $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante $c:x\mapsto\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ sur $[0;1]$. D'ailleurs, avec ce qui précède, $|T^n(f)(x)-c(x)|=|T^n(f)(x)-T^n(f)(0)+T^n(f)(0)-c(x)|\leqslant|T^n(f)(x)-T^n(f)(0)|+|T^n(f)(0)-c(x)|$ donc $|T^n(f)(x)-c(x)|\leqslant\dfrac{M}{2^n}+\left|T^n(f)(0)-\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right|$. Ainsi, $||T^n(f)-c||_{\infty,[0;1]}\leqslant\dfrac{M}{2^n}+\left|T^n(f)(0)-\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{M}{2^n}+\left|T^n(f)(0)-\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right|\right)=0$ donc $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers c sur $[0;1]$.

e. Si 1 est la fonction constante égale à 1 sur $[0;1]$, $T(1)=1$ donc, comme $1\neq 0$, 1 est valeur propre de T. Soit $f\in E_1(T)$, alors $T(f)=f$ donc, par une récurrence simple, on a $\forall n\in\mathbb{N},\ T^n(f)=f$. Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}T^n(f)(x)=\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ ce qui prouve que f est constante. Ainsi, $E_1(T)=\mathrm{Vect}(1)$.

f. Soit $k\in\mathbb{R}$ tel que $|k|>1$. Supposons qu'il existe $f\in E$ telle que $T(f)=kf$. Par une autre récurrence simple, pour $x\in[0;1]$, il vient $\forall n\in\mathbb{N},\ T^n(f)=k^nf(x)$. Comme $(T^n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'après **d.** et que $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, ceci impose que $f(x)=0$. Seule la fonction nulle est dans $E_k(f)$ donc k n'est pas valeur propre de f si $|k|>1$. Par le même argument, comme $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on en déduit aussi que $E_1(T)=\{0\}$ donc que -1 n'est pas valeur propre de T.

g. Pour $f\in E$ et $x\in[0;1]$, on a $T(f)'(x)=\dfrac{1}{4}\Big(f'\Big(\dfrac{x}{2}\Big)+f'\Big(\dfrac{x+1}{2}\Big)\Big)=\dfrac{T(f')(x)}{2}$ donc $T(f)'=\dfrac{T(f')}{2}$. Soit $f\in E_{1/2}(T)$, alors $T(f)=\dfrac{f}{2}$ donc $\dfrac{f'}{2}=T(f)'=\dfrac{T(f')}{2}$ et $T(f')=f'$ ce qui, d'après **e.**, montre que f' est constante. Ainsi, f est une fonction affine. Réciproquement, si on pose $f:x\mapsto ax+b$, alors $f\in E$ et $\forall x\in[0;1]$, $T(f)(x)=\dfrac{1}{2}\Big(a\dfrac{x}{2}+b+a\dfrac{x+1}{2}+b\Big)=\dfrac{ax}{2}+\dfrac{a}{4}+b=\dfrac{ax+b}{2}=\dfrac{f(x)}{2}$ si et seulement si $a+2b=0$ ce qui montre que $f(x)=b(1-2x)$. Ainsi, $E_{1/2}(T)=\mathrm{Vect}(g)$ avec $g:x\mapsto 1-2x$ et $\dfrac{1}{2}\in\mathrm{Sp}(T)$.

6.234 **a.** Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, on écrit $1+\dfrac{i\alpha}{n}=r_ne^{i\theta_n}$ sous forme trigonométrique en posant $r_n=\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2}{n^2}}>0$ et $\theta_n=\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{\alpha}{n}\Big)\in\Big]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\Big[$ car $\dfrac{\sin(\theta_n)}{\cos(\theta_n)}=\tan(\theta_n)=\dfrac{r_n\sin(\theta_n)}{r_n\cos(\theta_n)}=\dfrac{\alpha}{n}$. On a donc $\Big(1+\dfrac{i\alpha}{n}\Big)^n=r_n^ne^{in\theta_n}$.
Comme $r_n^n=\exp\Big(\dfrac{n}{2}\ln\Big(1+\dfrac{\alpha^2}{n^2}\Big)\Big)$ et que $\ln\Big(1+\dfrac{\alpha^2}{n^2}\Big)\underset{+\infty}{=}\dfrac{\alpha^2}{n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, on a $\dfrac{n}{2}\ln\Big(1+\dfrac{\alpha^2}{n^2}\Big)\underset{+\infty}{=}\dfrac{\alpha^2}{2n}+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2}\ln\Big(1+\dfrac{\alpha^2}{n^2}\Big)=0$ et, comme $\lim\limits_{t\to0}e^t=1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n^n=1$.
De plus, $n\theta_n=n\,\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{\alpha}{n}\Big)\underset{+\infty}{=}n\Big(\dfrac{\alpha}{n}+o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)\Big)\underset{+\infty}{=}\alpha+o(1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}n\theta_n=\alpha$. Par continuité de $\cos$ et $\sin$, comme $e^{in\theta_n}=\cos(n\theta_n)+i\sin(n\theta_n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{in\theta_n}=e^{i\alpha}$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(1+\dfrac{i\alpha}{n}\Big)^n=e^{i\alpha}$.

b. <u>Si $a=0$</u>, $A_n=I_2$ est déjà diagonale.
<u>Si $a\neq0$</u>, on a $\chi_{A_n}=\begin{vmatrix}X-1 & a/n\\ -a/n & X-1\end{vmatrix}=(X-1)^2+\Big(\dfrac{a}{n}\Big)^2=\Big(X-1+\dfrac{ia}{n}\Big)\Big(X-1-\dfrac{ia}{n}\Big)$ donc on obtient $\mathrm{Sp}(A_n)=\Big\{1+\dfrac{ia}{n},1-\dfrac{ia}{n}\Big\}$. Comme A_n admet deux valeurs propres distinctes, A_n est diagonalisable et il existe un matrice inversible $P\in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A_n=PD_nP^{-1}$ avec $D_n=\mathrm{diag}\Big(1+\dfrac{ia}{n},1-\dfrac{ia}{n}\Big)$.
Comme $A_n-\Big(1+\dfrac{ia}{n}\Big)I_2=\begin{pmatrix}-ia/n & -a/n\\ a/n & -ia/n\end{pmatrix}$, on constate qu'un vecteur propre associé à la valeur propre $1+\dfrac{ia}{n}$ est $v_1=(1,-i)$. De même, $v_2=(1,i)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $1+\dfrac{ia}{n}$ car $A_n-\Big(1-\dfrac{ia}{n}\Big)I_2=\begin{pmatrix}ia/n & -a/n\\ a/n & ia/n\end{pmatrix}$. On peut donc prendre $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}$ ci-dessus.

c. <u>Si $a=0$</u>, $A_n^n=I_2$ donc la suite $(A_n^n)_{n\geqslant1}$ converge vers $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=R_0$.
<u>Si $a\neq0$</u>, d'après **b.**, $A_n^n=PD_n^nP^{-1}$ et $D_n^n=\mathrm{diag}\Big(\Big(1+\dfrac{ia}{n}\Big)^n,\Big(1-\dfrac{ia}{n}\Big)^n\Big)$ donc la suite $(D_n^n)_{n\geqslant1}$ converge vers la matrice $D=\mathrm{diag}(e^{ia},e^{-ia})$ d'après **a.**. Comme $\varphi:M\mapsto PMP^{-1}$ est linéaire en dimension finie, elle est continue (c'est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) donc, par caractérisation séquentielle de la continuité, $(\varphi(D_n^n))_{n\geqslant1}=(A_n^n)_{n\geqslant1}$ converge vers $\varphi(A)=PDP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{ia} & 0\\ 0 & e^{-ia}\end{pmatrix}\Big(\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}\Big)$ donc la suite $(A_n^n)_{n\geqslant1}$ converge vers $\begin{pmatrix}\cos(a) & -\sin(a)\\ \sin(a) & \cos(a)\end{pmatrix}=R_a$.

6.235 <u>(i) $\Longrightarrow$ (iv)</u> : supposons (i). Par l'absurde, si λ était une valeur propre commune à A et à B, λ serait aussi une valeur propre de B^T car $\mathrm{Sp}(B^T)=\mathrm{Sp}(B)$ et il existerait deux vecteurs non nuls $U\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AU=\lambda U$ et $V\in\mathcal{M}n,1(\mathbb{C})$ tel que $B^TV=\lambda V$. Alors, en posant $X=UV^T\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on aurait

$AX-XB=AUV^T-UV^TB=(AU)V^T-U(B^TV)^T=\lambda UV^T-U(\lambda V^T)=0$ donc $UV^T=0$ d'après (i). Mais ceci est impossible car si $U^T=(u_1\ \cdots u_n)$ et $V^T=(v_1\ \cdots\ v_n)$, $\exists(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$, $u_i\neq 0$ et $v_j\neq 0$ et alors, si $X=(x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $x_{i,j}=u_iv_j\neq 0$. On conclut ce raisonnement par l'absurde : il n'existe aucune valeur propre commune à A et à B.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) : supposons (iv). En posant $\lambda_1,\cdots\lambda_r$ les valeurs propres distinctes de la matrice B, on écrit $\chi_B=\prod\limits_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{m_{\lambda_k}(B)}$ donc, par les propriétés des polynômes de matrices, $\chi_B(A)=\prod\limits_{k=1}^{r}(A-\lambda_kI_n)^{m_{\lambda_k}(B)}$. Or, pour un complexe λ, la matrice $A-\lambda I_n$ est inversible si et seulement si λ n'est pas une valeur propre de A. Ici, $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ n'étant pas des valeurs propres de A puisque ce sont des valeurs propres de B, les matrices $A-\lambda_1I_n,\cdots,A-\lambda_rI_n$ sont toutes inversibles. En tant que produit de puissances de matrices inversibles, $\chi_B(A)$ est donc inversible ($GL_n(\mathbb{C})$ est une groupe multiplicatif).

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : supposons la matrice $\chi_A(B)$ inversible. Soit $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX=XB$. On a alors $A^0X=XB^0=X$ et $A^1X=XB^1$ par hypothèse. Si on suppose que $A^kX=XB^k$ pour un entier $k\geqslant 1$, alors $A^{k+1}X=A(A^kX)=A(XB^k)=(AX)B^k=(XB)B^k=XB^{k+1}$. Par principe de récurrence, $\forall k\in\mathbb{N}$, $A^kX=XB^k$. Si on écrit $\chi_B=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kX^k$, alors $\chi_B(A)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kA^k$ donc $\chi_B(A)X=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kA^kX=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kXB^k=X\chi_B(B)$. Or $\chi_B(B)=0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton donc $\chi_B(A)X=0$. Comme $\chi_B(A)$ est inversible, on en déduit que $X=0$ comme attendu.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : supposons (ii) et soit l'application $\varphi:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(X)=AX-XB$. φ est clairement linéaire donc c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'hypothèse $\forall X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AX=XB\Longrightarrow X=0$ traduit le fait que $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$ donc que φ est injective. Comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))=n^2$ est fini, φ est donc un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ce qui se traduit bien par (i).

6.236 **a.** Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB=BA$. On va considérer différents cas :

- Si χ_A admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2, on sait d'après le cours qu'alors A est diagonalisable et il existe donc $P\in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A=PDP^{-1}$ avec $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$. Posons $D'=P^{-1}BP$, on a l'équivalence $AB=BA\Longleftrightarrow PDD'P^{-1}=PD'DP^{-1}\Longleftrightarrow DD'=D'D$. Or, par un calcul matriciel direct, on montre que $DD'=D'D$ équivaut à $D'=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2)$ diagonale. En posant Q l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que $Q(\lambda_1)=\mu_1$ et $Q(\lambda_2)=\mu_2$, on a $Q(D)=D'$ donc $Q(A)=PQ(D)P^{-1}=PD'P^{-1}=B$ et B est bien un polynôme en A.
- Si χ_B admet deux racines distinctes, on conclut par symétrie que A est un polynôme en B.
- Si χ_A admet une racine double λ mais que A est diagonalisable, alors $\dim(E_\lambda(A))=m_\lambda(A)=2$ donc $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_2)=\mathbb{C}^2$ et $A=\lambda I_2$ de sorte que $A=Q(B)$ avec $Q=\lambda$.
- Si χ_B admet une racine double μ mais que B est diagonalisable, $B=\mu I_2$ et $B=Q(A)$ avec $Q=\mu$.
- Si χ_A, χ_B admettent respectivement pour racine double λ, μ et que ni A ni B ne sont diagonalisables, on sait néanmoins que A et B sont trigonalisables car χ_A et χ_B sont scindés sur $\mathbb{C}$ et il existe une matrice $P\in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A=PTP^{-1}$ avec $T=\begin{pmatrix}\lambda & a\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ avec $a\neq 0$. En notant $\mathcal{B}=(v_1,v_2)$ la base de $\mathbb{C}^2$ telle que P est la matrice de passage entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$, on a donc $Av_1=\lambda v_1$ donc, comme $AB=BA$, $ABv_1=BAv_1=\lambda Bv_1$ donc $Bv_1\in E_\lambda(A)=\mathrm{Vect}(v_1)$ ce qui prouve

qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Bv_1 = \alpha v_1$. Mais comme μ est la seule valeur propre de B, on a forcément $\alpha = \mu$. Comme $\mathrm{Tr}\,(B) = 2\mu$, on a forcément, par la formule de changement de base, $B = PT'P^{-1}$ avec $T' = \begin{pmatrix} \mu & b \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$. Par exemple, comme $T' = \frac{b}{a}T + \left(\mu - \frac{b\lambda}{a}\right)I_2$, on a aussi en multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite, $B = \frac{b}{a}A + \left(\mu - \frac{b\lambda}{a}\right)I_2 = Q(A)$ avec $Q = T' = \frac{b}{a}X\mu - \frac{b\lambda}{a}$ donc B est un polynôme en A (mais A est aussi dans ce cas un polynôme en B).

Dans tous les cas, si $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$, B est un polynôme en A ou A un polynôme en B.

b. Prenons $A = E_{1,2}$ et $B = E_{1,3}$, alors $AB = BA = 0$. Comme $A^2 = 0$, si $Q = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $Q(A) = q_0 I_3 + q_1 A \in \mathrm{Vect}(I_3, A)$ donc l'ensemble des polynômes en A, noté $\mathbb{C}[A]$, vérifie $\mathbb{C}[A] = \mathrm{Vect}(I_3, A)$ car il est clair que $\mathrm{Vect}(I_3, A) \subset \mathbb{C}[A]$. De même, comme $B^2 = 0$, on a $\mathbb{C}[B] = \mathrm{Vect}(I_3, B)$. Par conséquent, $A \notin \mathbb{C}[B]$ et $B \notin \mathbb{C}[A]$ donc A n'est pas un polynôme en B et B n'est pas un polynôme en A.

c. Prenons à nouveau $A = E_{1,2}$ et $B = E_{1,3}$, alors $AB = BA = 0$, $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_3, A)$ et $\mathbb{R}[B] = \mathrm{Vect}(I_3, B)$ donc, puisque $A \notin \mathrm{Vect}(I_3, B)$ et $B \notin \mathrm{Vect}(I_3, A)$, donc A (resp. B) n'est pas un polynôme en B (resp. A).

6.237 Le polynôme $P = X^2 - 6X + 8 = (X-2)(X-4)$ est annulateur de A donc, d'après le cours, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{2, 4\}$.

De plus, comme P est scindé à racines simples, A est diagonalisable, donc $\det(A) = 2^{m_2(A)} 4^{m_4(A)}$ d'après le cours. Comme $\det(A) = 32 = 2^1 \times 4^2$ par hypothèse, on a forcément $m_2(A) = 1$ et $m_4(A) = 2$. Il existe donc une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(2, 4, 4)$.

Comme $\psi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\psi(M) = QMQ^{-1}$ est clairement linéaire et qu'elle est bijective car $QMQ^{-1} = N \iff N = Q^{-1}MQ$ pour $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, φ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, qui transforme donc une base en base, donc la base canonique $\mathcal{B}_0 = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ en une base $\mathcal{B} = (QE_{1,1}Q^{-1}, QE_{1,2}Q^{-1}, QE_{1,3}Q^{-1}, QE_{2,1}Q^{-1}, QE_{2,2}Q^{-1}, QE_{2,3}Q^{-1}, QE_{3,1}Q^{-1}, QE_{3,2}Q^{-1}, QE_{3,3}Q^{-1})$.

L'application φ_A est aussi un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(R)$ et on sait que sa trace est la trace de sa matrice dans n'importe quelle base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en particulier en notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A)$, on a $\mathrm{Tr}\,(\varphi_A) = \mathrm{Tr}\,(M)$. Or,

- $\varphi_A(QE_{1,1}Q^{-1}) = QDE_{1,1}Q^{-1} = 2QE_{1,1}Q^{-1}$ car $DE_{1,1} = 2E_{1,1}$.
- $\varphi_A(QE_{1,2}Q^{-1}) = QDE_{1,2}Q^{-1} = 2QE_{1,2}Q^{-1}$ car $DE_{1,2} = 2E_{1,2}$.
- $\varphi_A(QE_{1,3}Q^{-1}) = QDE_{1,3}Q^{-1} = 2QE_{1,3}Q^{-1}$ car $DE_{1,3} = 2E_{1,3}$.
- $\varphi_A(QE_{2,1}Q^{-1}) = QDE_{2,1}Q^{-1} = 4QE_{2,1}Q^{-1}$ car $DE_{2,1} = 4E_{1,1}$.
- $\varphi_A(QE_{2,2}Q^{-1}) = QDE_{2,2}Q^{-1} = 4QE_{2,2}Q^{-1}$ car $DE_{2,2} = 4E_{1,2}$.
- $\varphi_A(QE_{2,3}Q^{-1}) = QDE_{2,3}Q^{-1} = 4QE_{2,3}Q^{-1}$ car $DE_{2,3} = 4E_{1,3}$.
- $\varphi_A(QE_{3,1}Q^{-1}) = QDE_{3,1}Q^{-1} = 4QE_{3,1}Q^{-1}$ car $DE_{3,1} = 4E_{3,1}$.
- $\varphi_A(QE_{3,2}Q^{-1}) = QDE_{3,2}Q^{-1} = 4QE_{3,2}Q^{-1}$ car $DE_{3,2} = 4E_{3,2}$.
- $\varphi_A(QE_{3,3}Q^{-1}) = QDE_{3,3}Q^{-1} = 4QE_{3,3}Q^{-1}$ car $DE_{3,3} = 4E_{3,3}$.

Ainsi, $M = \mathrm{diag}(2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$ donc $\mathrm{Tr}\,(\varphi_A) = 30$.

6.238 **a.** Si $k \in \mathbb{R}$, la matrice A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral.

Comme les colonnes 1, 3 et 4 de A sont les mêmes et que les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires, on a rang$\,(A) = 2$ donc , par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 4 - 2 = 2$ et 0 est valeur propre double de A. Comme on sait que les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles appartiennent à $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = e_2$ et $v_2 = e_1 + ke_2 + e_3 + e_4$, on cherche les vecteurs propres sous la forme $v = (1, \alpha, 1, 1) = v_2 + (\alpha - k)v_1$ (parce que v_1 n'est pas vecteur propre de A). Ainsi, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $Av = \lambda v \iff (\alpha = \lambda,\ k\alpha + 3 = \lambda\alpha) \iff (\alpha = \lambda,\ \alpha^2 - k\alpha - 3 = 0)$. Les racines de $X^2 - kX - 3$ sont $\lambda_1 = \dfrac{k + \sqrt{k^2+12}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{k - \sqrt{k^2+12}}{2}$. D'après l'équivalence précédente, les vecteurs $v_1 = (1, \lambda_1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, \lambda_2, 1, 1)$ sont propres pour A respectivement associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2. Par conséquent, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ et 0 est valeur propre double de Aet comme $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(v_3, v_4)$ avec $v_3 = (1, 0, -1, 0)$ et $v_4 = (1, 0, 0, -1)$ par exemple, on a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On peut bien sûr choisir $P \in O(4)$, c'est garanti par le théorème spectral, dans ce cas, comme $||v_1||^2 = 3 + \lambda_1^2 = 6 + k\lambda_1$, $||v_2||^2 = 3 + \lambda_2^2 = 6 + k\lambda_2$ et $\mathrm{Ker}(A) = E_0(A) = \mathrm{Vect}(w_3, w_4)$ avec $w_3 \perp w_4$ si $w_3 = v_3$ et $w_4 = (1, 0, 1, -2)$ on peut prendre $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{k\lambda_1+6} & \frac{1}{k\lambda_2+6} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\lambda_1}{k\lambda_1+6} & \frac{\lambda_2}{k\lambda_2+6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k\lambda_1+6} & \frac{1}{k\lambda_2+6} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{k\lambda_1+6} & \frac{1}{k\lambda_2+6} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

b. Si $k \in \mathbb{C}$, on effectue les opérations $C_1 \longleftarrow C_1 - C_4$ et $C_3 \longleftarrow C_3 - C_4$ dans $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ -1 & X-k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & X \end{vmatrix}$ et, par linéarité par rapport aux colonnes 1 et 3, on a $\chi_A = X^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X-k & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & X \end{vmatrix}$ puis, en développant par rapport à la dernière colonne, $\chi_A = X^2 \left((-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-k & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right)$ qui se calcule en $\chi_A = X^2(-3 + X(X-k)) = X^2(X^2 - kX - 3)$. Soit $\Delta = k^2 + 12$ le discriminant de $X^2 - kX - 3$:

- Si $\Delta \neq 0$, alors A a une racine double 0 alors que $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 2 avec la formule du rang car $\mathrm{rang}(A) = 2$, et A a aussi deux racines simples $\dfrac{k+\delta}{2}$ et $\dfrac{k-\delta}{2}$ où δ est une racine carrée de Δ. Comme ces deux nouvelles valeurs propres de A sont distinctes et non nulles, les sous-espaces propres associés sont des droites. Ainsi, A est diagonalisable.
- Si $\Delta = 0$, ce qui équivaut à $k = \pm 2\sqrt{3}\,i$, A admet toujours 0 pour valeur propre double avec $E_0(A)$ qui est un plan. Il y a une autre valeur propre double de A qui est $\dfrac{k}{2} = \pm\sqrt{3}\,i$. Par exemple si $k = 2\sqrt{3}\,i$, comme $A - \dfrac{k}{2} I_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\,i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3}\,i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3}\,i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{3}\,i \end{pmatrix}$ est de rang 3 car ses trois premières colonnes forment une famille libre, on a $\dim(E_{k/2}(A)) = 1$ alors que $\dfrac{k}{2}$ est d'ordre 2, ce qui montre que A n'est pas diagonalisable.

Par conséquent, A est diagonalisable si et seulement si $k \neq \pm 2\sqrt{3}\,i$.

$\boxed{\textbf{6.239}}$ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on constate que la somme des trois colonnes de A donne la colonne $\begin{pmatrix} \sin(\alpha)+\sin(2\alpha) \\ \sin(\alpha)+\sin(2\alpha) \\ \sin(\alpha)+\sin(2\alpha) \end{pmatrix}$ donc on effectue l'opération de Gauss $C_1 \longleftarrow C_1+C_2+C_3$ dans $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -\sin(2\alpha) & -\sin(\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & X & -\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & 0 & X-\sin(2\alpha) \end{vmatrix}$ et on obtient $\chi_A = \begin{vmatrix} X-\sin(2\alpha)-\sin(\alpha) & -\sin(2\alpha) & -\sin(\alpha) \\ X-\sin(2\alpha)-\sin(\alpha) & X & -\sin(\alpha) \\ X-\sin(2\alpha)-\sin(\alpha) & 0 & X-\sin(2\alpha) \end{vmatrix}$ et on utilise la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne pour avoir $\chi_A = \big(X-\sin(2\alpha)-\sin(\alpha)\big)\begin{vmatrix} 1 & -\sin(2\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 1 & X & -\sin(\alpha) \\ 1 & 0 & X-\sin(2\alpha) \end{vmatrix}$. Ensuite $L_2 \longleftarrow L_2-L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3-L_1$ et $\chi_A = \big(X-\sin(2\alpha)-\sin(\alpha)\big)\begin{vmatrix} 1 & -\sin(2\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & X+\sin(2\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(2\alpha) & X-\sin(2\alpha)+\sin(\alpha) \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la première colonne, $\chi_A = \big(X-\sin(2\alpha)-\sin(\alpha)\big)\big(X+\sin(2\alpha)\big)\big(X-\sin(2\alpha)+\sin(\alpha)\big)$. Posons $\lambda_1 = -\sin(2\alpha)$, $\lambda_2 = \sin(2\alpha)+\sin(\alpha)$ et $\lambda_3 = \sin(2\alpha)-\sin(\alpha)$ de sorte que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les trois valeurs propres réelles de A.

- $\lambda_1 = \lambda_2 \iff 2\sin(2\alpha)+\sin(\alpha) = 0 \iff \sin(\alpha)\big(4\cos(\alpha)+1\big) = 0 \iff \big(\alpha \equiv 0\ [\pi]$ ou $\alpha \equiv \pm\alpha_0\ [2\pi]\big)$ en posant $\alpha_0 = \text{Arccos}\Big(-\dfrac{1}{4}\Big)$ car $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$.
- $\lambda_1 = \lambda_3 \iff 2\sin(2\alpha)-\sin(\alpha) = 0 \iff \sin(\alpha)\big(4\cos(\alpha)-1\big) = 0 \iff \big(\alpha \equiv 0\ [\pi]$ ou $\alpha \equiv \pm\alpha_1\ [2\pi]\big)$ en posant $\alpha_1 = \text{Arccos}\Big(\dfrac{1}{4}\Big) \sim 1,32$ (ou $\sim 76^o$) et $\alpha_0 = \pi - \alpha_1$ par les propriétés de la fonction Arccos.
- $\lambda_2 = \lambda_3 \iff \sin(\alpha) = 0 \iff \alpha \equiv 0\ [\pi]$.

Nous pouvons maintenant distinguer plusieurs cas :

- Si $\alpha \not\equiv 0, \pi, \pm\alpha_0, \pm\alpha_1\ [2\pi]$, alors d'après les équivalences précédentes, A possède trois valeurs propres réelles distinctes donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Si $\alpha \equiv 0\ [\pi]$, alors $A = 0$ donc A est diagonalisable.
- Si $\alpha \equiv \alpha_0\ [2\pi]$, $\cos(\alpha) = -\dfrac{1}{4}$ et $\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ donc $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{15}}{8} \sim 0,48$ et $\lambda_3 = -\dfrac{\sqrt{15}}{8} - \dfrac{\sqrt{15}}{4} = -\dfrac{3\sqrt{15}}{8} \sim -1,45$ alors $\text{Sp}(A) = \Big\{\dfrac{\sqrt{15}}{8}, -\dfrac{3\sqrt{15}}{8}\Big\}$ et λ_1 est valeur propre double de A. Or $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ -\frac{\sqrt{15}}{8} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{15}}{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} \end{pmatrix}$ donc $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{15}}{8} & -\frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ -\frac{\sqrt{15}}{8} & -\frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2 car les lignes 1 et 2 sont égales et les deux dernières sont indépendantes. Par la formule du rang $\dim(\text{Ker}(A-\lambda_1 I_3)) = 1$ donc A n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.
- Si $\alpha \equiv -\alpha_0\ [2\pi]$, la matrice A est l'opposée de celle du cas précédent donc elle n'est pas non plus

diagonalisable mais seulement trigonalisable.

• Si $\alpha \equiv \alpha_1\ [2\pi]$, $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{4}$ et $\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$ donc $\lambda_1 = -\dfrac{\sqrt{15}}{8} \sim -0,48$ et $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{8} + \dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{3\sqrt{15}}{8} \sim 1,45$ alors $\mathrm{Sp}(A) = \Big\{ -\dfrac{\sqrt{15}}{8}, \dfrac{3\sqrt{15}}{8}\Big\}$ et λ_1 est valeur propre double de A. Or $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} \end{pmatrix}$ donc $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix}$ est encore de rang 2 car les lignes 1 et 2 sont égales et les deux dernières sont indépendantes. Par la formule du rang $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_3)) = 1$ donc A n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

• Si $\alpha \equiv -\alpha_1\ [2\pi]$, la matrice A est l'opposée de celle du cas précédent donc elle n'est pas non plus diagonalisable mais seulement trigonalisable.

En conclusion, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour toute valeur de α réelle sauf si $\alpha = \pm \mathrm{Arccos}\Big(\pm\dfrac{1}{4}\Big)$ (4 valeurs) auquel cas A n'est que trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

6.240 **a.** Soit $(A,B) \in G^2$ tel que $\varphi(A) = \varphi(B)$. Soit une matrice $M \in F$ qu'on écrit $M = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k M_k$, alors $\mathrm{Tr}\,(AM) = \mathrm{Tr}\,\Big(\sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k A M_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \mathrm{Tr}\,(AM_k)$ par linéarité de la trace donc $\mathrm{Tr}\,(AM) = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \mathrm{Tr}\,(BM_k)$ car $\varphi(A) = \varphi(B)$ donc $\forall k \in [\![1;r]\!]$, $\mathrm{Tr}\,(AM_k) = \mathrm{Tr}\,(BM_k)$. Comme on a aussi $\mathrm{Tr}\,(BM) = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \mathrm{Tr}\,(BM_k)$, on en déduit que $\mathrm{Tr}\,(AM) = \mathrm{Tr}\,(BM)$. En particulier, en posant $M = B^{-1}$, on a $M \in G \subset F$ par hypothèse donc $\mathrm{Tr}\,(AB^{-1}) = \mathrm{Tr}\,(BB^{-1}) = \mathrm{Tr}\,(I_n) = n$. Or toute matrice de G est diagonalisable car le polynôme $X^p - 1$ scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ est annulateur de toute matrice de G. Comme les racines de $X^p - 1$ sont les éléments de $\mathbb{U}_p$ qui sont de module 1 et que $\mathrm{Tr}\,(AB^{-1}) = n = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(AB^{-1})} m_\lambda(AB^{-1})\lambda$ est la somme de toutes les valeurs propres de AB^{-1}, $n = \Big|\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(AB^{-1})} m_\lambda(AB^{-1})\lambda\Big| = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(AB^{-1})} m_\lambda(AB^{-1})|\lambda| = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(AB^{-1})} m_\lambda(AB^{-1}) = n$. D'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, les valeurs propres de AB^{-1} sont positivement colinéaires, la seule possibilité est qu'on ait $\mathrm{Sp}(AB^{-1}) = \{1\}$ et $m_1(AB^{-1}) = n$, ce qui montre que $AB^{-1} = I_n$ donc que $A = B$. Par conséquent, l'application φ est bien injective.

b. Par définition d'un sous-espace engendré, pour tout $k \in [\![1;r]\!]$, il existe une famille finie $\mathcal{F}_k$ de vecteurs de G telle que $M_k = \sum\limits_{M \in \mathcal{F}_k} \lambda_M M$. Pour $A \in G$ et $k \in [\![1;r]\!]$, on a $AM_k = \sum\limits_{M \in \mathcal{F}_k} \lambda_M AM$ et $AM \in G$ par hypothèse. Comme $X^p - 1$ annule AM par hypothèse, AM est diagonalisable et sa trace vaut la somme de ses valeurs propres. Comme ces valeurs propres sont toutes incluses dans $\mathbb{U}_p$ qui a p éléments, $\mathrm{Tr}\,(AM)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Ainsi, $\mathrm{Tr}\,(AM_k) = \sum_{M\in\mathcal{F}_k} \lambda_M \mathrm{Tr}\,(AM)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs car $\mathcal{F}_k$ est fini et que les λ_M sont fixés. Comme $\varphi(A) = \big(\mathrm{Tr}\,(AM_1), \cdots, \mathrm{Tr}\,(AM_r)\big)$ pour tout $A \in G$ et que $\mathrm{Tr}\,(AM_k)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs pour tout $k \in [\![1;r]\!]$, $\varphi(A)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs donc $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ est fini.

c. Comme φ est injective, sa restriction $\widetilde{\varphi} : G \to \mathrm{Im}\,(\varphi)$ est toujours injective mais devient aussi surjective donc $\widetilde{\varphi}$ est bijective. Ceci montre, comme $\mathrm{Im}\,(\widetilde{\varphi}) = \mathrm{Im}\,(\varphi)$ est fini d'après la question **b.**, que l'ensemble G est aussi fini et qu'on a $\mathrm{card}\,(G) = \mathrm{card}\,(\mathrm{Im}\,(\varphi))$.

6.241 **a.** Si f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$ est diagonale. Comme on a aussi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = D^2$ est diagonale, $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de f^2 qui est donc diagonalisable.

b. Si $n = 1$, tout endomorphisme de E étant une homothétie, f et f^2 sont diagonalisables. Ainsi, dans ce cas particulier, f^2 diagonalisable $\Longrightarrow$ f diagonalisable.

Si $n \geqslant 2$, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = E_{1,2}$, alors $E_{1,2}^2 = 0$ donc $f^2 = 0$ est diagonalisable. De plus, $\chi_f = \chi_{E_{1,2}} = X^n$ puisque $E_{1,2}$ est triangulaire supérieure. Comme, par la formule du rang, on obtient $\dim(E_0(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - \mathrm{rang}\,(f) = n - 1 \neq n$ qui est l'ordre de multiplicité algébrique de 0 dans χ_f, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

Dès que $n \geqslant 2$, on n'a donc plus forcément f diagonalisable si f^2 l'est.

c. Une inclusion : si $x \in \mathrm{Ker}(f-\mu\mathrm{id}_E)+\mathrm{Ker}(f+\mu\mathrm{id}_E)$, alors $\exists (y,z) \in \mathrm{Ker}(f-\mu\mathrm{id}_E)\times\mathrm{Ker}(f+\mu\mathrm{id}_E)$, $x = y+z$ donc $f^2(x) = f^2(y) + f^2(z)$. Or $f(y) = \mu y$ donc $f^2(y) = f(\mu y) = \mu f(y) = \mu^2 y = \lambda y$ et $f(z) = -\mu z$ donc $u^2(z) = u(-\mu z) = -\mu u(z) = (-\mu)^2 y = \lambda z$ d'où $f^2(x) = \mu^2(y+z) = \lambda x$ et on a bien $x \in \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda\mathrm{id}_E)$. On a bien établi l'inclusion $\mathrm{Ker}(f-\mu\mathrm{id}_E) + \mathrm{Ker}(f+\mu\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2-\lambda\mathrm{id}_E)$.

L'autre inclusion : si $x \in \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda\mathrm{id}_E)$, $x = y + z$ (1) avec $(y,z) \in \mathrm{Ker}(f-\mu\mathrm{id}_E) \times \mathrm{Ker}(f+\mu\mathrm{id}_E)$, on a donc $f(x) = \mu y - \mu z$ (2) donc $y = \dfrac{f(x)+\mu x}{2\mu}$ et $z = \dfrac{\mu x - f(x)}{2\lambda}$ en combinant les deux équations (1) et (2) puisque $\mu \neq 0$. Réciproquement, si on pose $y = \dfrac{f(x)+\mu x}{2\mu}$ et $z = \dfrac{\mu x - f(x)}{2\mu}$, on a la relation $x = y+z$ et $f(y) = \dfrac{f^2(x)+\mu f(x)}{2\mu} = \dfrac{\mu^2 x + \mu f(x)}{2\mu} = \mu y$ et, de même $f(z) = -\mu z$. On vient de prouver l'inclusion $\mathrm{Ker}(f^2-\lambda\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f-\mu\mathrm{id}_E) + \mathrm{Ker}(f+\mu\mathrm{id}_E)$. Pour cette dernière inclusion, on aurait pu dire que $X^2 - \lambda = (X-\mu)(X+\mu)$ était un polynôme annulateur scindé à racines simples de l'endomorphisme $\tilde{f}$ induit par f dans $E_\lambda(f^2)$ donc que $E_\lambda(f^2) = E_\mu(\tilde{f}) \oplus E_{-\mu}(\tilde{f})$ et on conclut car $E_\mu(\tilde{f}) = E_\mu(f)$ puisque $E_\mu(f) \subset E_\lambda(f^2)$ et $E_{-\mu}(\tilde{f}) = E_{-\mu}(f)$ puisque $E_{-\mu}(f) \subset E_\lambda(f^2)$ d'après la première inclusion.

Par double inclusion, on a donc $\mathrm{Ker}(f^2-\lambda\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f-\mu\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(f+\mu\mathrm{id}_E)$ puisque les deux sous-espaces propres sont en somme directe car $\mu \neq -\mu$.

d. Méthode 1 : si f^2 est diagonalisable, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f^2, elles sont non nulles car f^2 est inversible. Par définition, $E = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda_k\mathrm{id}_E)$. D'après la question précédente, on a donc $E = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(f-\mu_k\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f+\mu_k\mathrm{id}_E)$ en notant μ_k une racine carrée complexe de λ_k. Comme E est la somme directe de sous-espaces propres associés à f, par définition, f est diagonalisable.

Méthode 2 : si f^2 est diagonalisable et f^2 inversible, alors f est aussi inversible et $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f^2. On sait que $P = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)$ est annulateur de f^2 d'où $P(f^2) = \prod_{k=1}^{r} (f^2 - \lambda_k \mathrm{id}_E) = 0$. Notons, pour $k \in [\![1;r]\!]$, μ_k une racine carrée (complexe) de λ_k, alors $\prod_{k=1}^{r} (f^2 - \lambda_k \mathrm{id}_E) = \prod_{k=1}^{r} (f - \mu_k \mathrm{id}_E) \circ (f + \mu_k \mathrm{id}_E) = 0$ donc le polynôme $Q = \prod_{k=1}^{r} (X - \mu_k)(X + \mu_k)$ est annulateur de f. De plus, $\forall k \in [\![1;r]\!]$, $\mu_k \neq -\mu_k$ car $\lambda_k = \mu_k^2 \neq 0$ et $\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\pm\mu_i \neq \pm\mu_j$ car $\lambda_i = \mu_i^2 \neq \mu_j^2 = \lambda_j$. Ainsi, Q annule f et est scindé à racines simples donc f est diagonalisable.

6.242 **a.** Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$, on dit que p est un projecteur de E si $p \circ p = p^2 = p$.

b. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on sait que $E_{i,j}^2 = E_{i,j}E_{i,j} = \delta_{i,j}E_{i,j}$. On a deux cas :

- Si $i = j$, on a donc $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$ donc $E_{i,i}$ est une matrice de projecteur.
- Si $i \neq j$, on a donc $E_{i,j}^2 = 0 \neq E_{i,j}$ donc $E_{i,j}$ n'est pas une matrice de projecteur.

c. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ diagonale telles que $M = PDP^{-1} = P\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k}\Big)P^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P E_{k,k} P^{-1}$. Posons, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P_k = PE_{k,k}P^{-1}$, alors $P_k^2 = PE_{k,k}^2P^{-1} = PE_{k,k}P^{-1} = P_k$ donc P_k est une matrice de projecteur et, grâce à la relation $M = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$, donc M est une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

d. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = A$ donc A est, d'après le cours, la matrice de la projection sur $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(I_2 - A)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(A)$. Comme $I_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}((1,1))$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}((0,1))$.

De même, si on pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule $B^2 = B$ donc, d'après le cours, B est la matrice de la projection sur $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(I_2 - B) = \mathrm{Vect}((1,0))$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Vect}((1,-1))$.

e. Si $n = 1$, toutes les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ étant diagonalisables car diagonales, une matrice écrite comme combinaison de matrices de projecteurs est toujours diagonalisable dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Si $n \geqslant 2$, la matrice $M = A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de matrices de projecteurs d'après la question précédente mais $\chi_M = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Plus généralement, si on pose $M' = \begin{pmatrix} M & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ (par blocs), alors $M' = A' - B'$ avec $A' = \begin{pmatrix} A & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ donc $A'^2 = A'$ et $B'^2 = B'$ par calcul par blocs et $\chi'_M = X^{n-2}(X^2 + 1)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc M' n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ bien que combinaison linéaire de matrices de projecteurs. Ainsi, si $n \geqslant 2$, une matrice écrite comme combinaison de matrices de projecteurs n'est pas toujours diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6.243 **a.** Soit λ une valeur propre de A, alors il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. Si on pose $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a d'abord $A^k X = \lambda^k X$ par une récurrence classique et simple ce qui donne $0 = 0X = P(A)X = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k X$ ou encore $\Big(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k\Big)X = P(\lambda)X = 0$. Comme $X \neq 0$, on a $P(\lambda) = 0$ donc λ est une racine de P.

b. χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS et ses racines sont les valeurs propres de A d'où $\chi_A = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}(A)}$ avec $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ donc $\chi_A(B) = \prod\limits_{k=1}^{r} (B - \lambda_k I_n)^{m_{\lambda_k}(A)}$. Comme les λ_k ne sont pas des valeurs propres de B par hypothèse, les matrices $B - \lambda_k I_n$ sont inversibles (en effet $B - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{C}) \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(B)$) donc $\chi_A(B)$ l'est aussi (l'ensemble des matrices inversibles est stable par multiplication car $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe). Ainsi, $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$.

c. ($\Longleftarrow$) Si $M = 0$, on a clairement $AM = MB = 0$.

($\Longrightarrow$) Si $AM = MB$, on a $A^2M = A(AM) = A(MB) = (AM)B = (MB)B = MB^2$. Soit $k \geqslant 2$ tel que $A^kM = MB^k$, alors $A^{k+1}M = A(A^kM) = A(MB^k) = (AM)B^k = (MB)B^k = MB^{k+1}$ et, par principe de récurrence, on peut conclure que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kM = MB^k$ (clair pour $k = 0$). Si $P = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)M = \Big(\sum\limits_{k=0}^{m} p_k A^k\Big)M = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k A^k M = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k M B^k = M\Big(\sum\limits_{k=0}^{m} p_k B^k\Big) = MP(B)$. Si on prend $P = \chi_A$, d'après CAYLEY-HAMILTON, on obtient $M\chi_A(B) = 0$ Or $\chi_A(B)$ est inversible d'après **b.** donc $M = 0$.

d. L'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(M) = AM - MB$ est clairement linéaire, est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, on sait alors que φ est un automorphisme si et seulement si elle est injective. Soit $M \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a donc $AM = MB$ donc $M = 0$ d'après **c.**. Ceci prouve que φ est injective donc que $\varphi \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. Ainsi, pour une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ antécédent de C par φ, c'est-à-dire une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM - MB = C$.

6.244 **a.** Si $\alpha \in \mathbb{R}$, A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

b. Par définition, pour $j \in [\![2; n]\!]$, la colonne j-ième colonne de A, notée C_j, vaut α fois la $(j-1)$-ième colonne de A, c'est-à-dire $C_j = \alpha C_{j-1}$. Comme la première colonne de A n'est pas nulle car $\alpha^{1+1-2} = \alpha^0 = 1$, on a donc rang $(A) = 1$. D'après la formule du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - 1 > 0$ et 0 est de multiplicité au moins $n-1$ de sorte que $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ puisque χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$ par le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS. Puisque $\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}\,(A)X^{n-1}$ grâce au cours et que $\mathrm{Tr}\,(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^{2i-2}$, la dernière valeur propre est $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^{2i-2}$. Ainsi, les valeurs propres de A sont $\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1 \text{ fois}}, \mathrm{Tr}\,(A)$.

c. Traitons deux cas :

$\underline{\mathrm{Tr}\,(A) = 0}$: dans ce cas, $\chi_A = X^n$ donc $A^n = 0$ par le théorème de CAYLEY-HAMILTON. Comme $A \neq 0$, on a vu ci-dessus que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - 1 \neq n$ donc A n'est pas diagonalisable (la seule matrice nilpotente diagonalisable est la matrice nulle).

$\underline{\mathrm{Tr}\,(A) \neq 0}$: comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et que les ordres de multiplicité des deux valeurs propres de A sont égales aux dimensions des sous-espaces propres associés donc Aest diagonalisable, c'est-à-dire semblable à $\mathrm{Tr}\,(A)E_{n,n}$ par exemple.

Ainsi, A est diagonalisable $\iff$ $\mathrm{Tr}\,(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^{2i-2} \neq 0$. On a $\mathrm{Tr}\,(A) = n \neq 0$ si $\alpha = \pm 1$ et, si $\alpha^2 \neq 1$, on a $\mathrm{Tr}\,(A) = \dfrac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1}$ donc A est diagonalisable si et seulement si α est un racine $(2n)$-ième de l'unité différente de 1 et de -1. En conclusion, A diagonalisable $\iff$ $\alpha \in \mathbb{U}_{2n} \setminus \{1, -1\}$.

6.245 **a.** On calcule $\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 3 & -2 \\ 1 & X-5 & 2 \\ 1 & -3 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-3 & 3 & 2(2-X) \\ 1 & X-5 & 0 \\ 1 & -3 & X-2 \end{vmatrix}$ avec l'opération $C_3 \longleftarrow C_3 - 2C_1$ et après avoir factorisé par $X-2$ dans la troisième colonne et effectué l'opération $L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_3$, on trouve $\chi_A = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & -3 & 0 \\ 1 & X-5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (X-2)\big[(X-1)(X-5)+3\big] = (X-2)(X^2-6X+8) = (X-2)^2(X-4)$ après développement par rapport à la dernière colonne. Comme $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 1, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(A-2I_3)) = 2$ avec la formule du rang donc l'ordre de multiplicité algébrique de 2 est égal à la dimension du sous-espace propre $E_2(A)$, ce qui permet de conclure par le cours que la matrice A est diagonalisable (car $\dim(E_2(A)) + \dim(E_4(A)) = 3$).

b. On constate que $C_1 = C_2 + C_3$ dans $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Comme 4 est une valeur propre simple de A, $E_4(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1,-1,-1)$. De plus, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ donc $E_2(A)$ est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 3y + 2z = 0$ et, par exemple, $E_2(A) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ avec $v_2 = (3,1,0)$ et $v_3 = (2,0,-1)$.

c. Comme $\mathbb{R}^3 = E_4(A) \oplus E_4(A)$ car A est diagonalisable, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc, en notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(4,2,2)$.

Il suffit de prendre $R = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(2, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ et on a $\Delta^2 = D$ donc $R^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Si $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $R^2 = A$, comme $(X-2)(X-4)$ est annulateur de A car $\mathrm{Sp}(A) = \{2,4\}$ et A diagonalisable, $(R^2-2I_3)(R^2-4I_3) = (R-\sqrt{2}I_3)(R+\sqrt{2}I_3)(R-2I_3)(R+2I_3) = 0$ donc le polynôme $(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-2)(X+2)$ scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ est annulateur de R donc R est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

6.246 **a.** $\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -2 & 1 \\ 1 & X-5 & 1 \\ 0 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)((X-5)(X-2)+1) - (-2(X-2)+1)$ en développement par rapport à la première colonne. Ainsi, $\chi_A = (X-2)(X^2-7X+11) + 2X - 5 = X^3 - 9X^2 + 27X - 27 = (X-3)^3$ (binôme de Newton). Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Par contre, comme $E_3(A) = \mathrm{Ker}(A - 3I_3) \neq \mathbb{R}^3$ donc $\dim(E_3(A)) \neq 3$ (l'ordre de multiplicité de 3 dans χ_A) car $A \neq 3I_3$, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (ni bien sûr dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$).

b. Comme $\mathrm{Sp}(A) = \{3\}$ d'après **a.**, si x est un vecteur propre de A, alors $Ax = 3x$ donc la droite $D = \mathrm{Vect}(x)$ est stable par A. Réciproquement, si la droite $D' = \mathrm{Vect}(y)$ est stable par A, on a $y \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ car D' est une droite et $Ay \in D'$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $Ay = \lambda y$ donc y est un vecteur propre de A donc $\lambda = 3$ et $y \in E_3(A)$. Par conséquent, les seules droites stables par A sont celles qui sont incluses dans $E_3(A)$. Comme $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, et qu'on constate que $(1,1,1)$ est dans le noyau de $A - 3I_3$, on a $E_3(A) = \mathrm{Vect}(x)$ avec $x = (1,1,1)$. Il existe donc une seule droite stable par A, et c'est $D = \mathrm{Vect}(x)$.

c. Soit une base $\mathcal{B}' = (a_1, a_2)$ de P qu'on complète en une base $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Par stabilité de

P, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} A' & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(a')$. Ainsi, $\chi_a = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} XI_2 - A' & * \\ 0 & X - \lambda \end{vmatrix}$ donc $\chi_A = (X - \lambda)\chi_{A'}$ ce qui justifie que $\chi_{A'}$ divise χ_A (et en plus que $\lambda = 3$).

d. Comme P est de dimension 2, $\chi_{a'}$ est unitaire et de degré 2 et il divise $\chi_a = (X-3)^3$ donc $\chi_{a'} = (X-3)^2$. Par CAYLEY-HAMILTON, $(a' - 3\mathrm{id}_P)^2 = 0$ donc $\forall x \in P,\ (a' - 3\mathrm{id}_P)^2(x) = (a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2(x) = 0$ et on a bien l'inclusion $P \subset \mathrm{Ker}\left((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\right)$.

e. Comme $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(A - 3I_3)^2$ et $(a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ sont de rang 1 ce qui montre avec la formule du rang que $\dim(\mathrm{Ker}((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2) = 2$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a $P = \mathrm{Ker}\left((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\right)$.

Dans cet exemple, il y a seulement quatre sous-espaces stables par a : $\{0\}$ de dimension 0, $D = \mathrm{Ker}\left(a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)$ de dimension 1, $P = \mathrm{Ker}\left((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\right)$ de dimension 2 et $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.

6.247 **a.** La matrice A_n symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

b. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\chi_{A_2} = (X-1)(X-2) - 1 = X^2 - 3X + 1$. Les racines de χ_{A_2} sont classiquement $\lambda_1 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \sim 2,61$ et $\lambda_2 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \sim 0,38$ donc, d'après le cours, $\mathrm{Sp}(A_2) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

c. Pour $n \geqslant 3$, dans le calcul du déterminant $P_n = \chi_{A_n}$, on effectue les opérations de GAUSS $C_k \longleftarrow C_k - C_1$ pour $k \in [\![2; n]\!]$ et on a $P_n = \begin{vmatrix} X-1 & -X & \cdots & \cdots & -X \\ -1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & X-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & X-n+1 \end{vmatrix}$. On développe ensuite par rapport à la dernière colonne et on a $P_n = (X - n + 1)P_{n-1} + (-1)^{n+1}(-X)\begin{vmatrix} -1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & X-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & X-n+2 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Dans ce dernier déterminant, après développement par rapport à la dernière ligne pour obtenir la relation $P_n = (X - n + 1)P_{n-1} + (-1)^n X (-1)^{n-1+1}(-1)\prod_{k=1}^{n-2}(X - k)$ donc $P_n = (X - n + 1)P_{n-1} - \prod_{k=0}^{n-2}(X - k)$.

d. <u>Initialisation</u> : d'après la question **b.**, $P_2 = X^2 - 3X + 1$ vérifie bien $(-1)^0 P_2(0) = 1$, $(-1)^1 P_2(1) = 1$ ont le même signe que $P_2(0) = 1$ qui est du signe de $(-1)^2$ et on a $P_2(1) = -1$ et $P_2(2) = -1 < 0$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 3$, supposons que $\forall k \in [\![0; n-2]\!]$, le réel $(-1)^k P_{n-1}(k)$ a le même signe que $P_{n-1}(0)$ qui est du signe de $(-1)^{n-1}$ et que $P_n(n-1) < 0$ et $P_n(n) < 0$. D'après **c.**, $P_n(0) = -(n-1)P_{n-1}(0)$ a un signe opposé à celui de $P_{n-1}(0)$, donc du signe de $(-1)^n$. Pour $k \in [\![1; n-2]\!]$, $(-1)^k P_n(k) = -(-1)^k(n - k - 1)P_{n-1}(k)$ donc $(-1)^k P_n(k) = -(n - k - 1)(-1)^k P_{n-1}(k)$ est du signe opposé à celui de $(-1)^k P_{n-1}(k)$, donc du signe opposé à celui de $(-1)^{n-1}$ par hypothèse de récurrence, donc du signe de $(-1)^n$. De plus, pour $k = n - 1$, $(-1)^{n-1}P_n(n-1) = -(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\cdots 1 = (-1)^n (n-1)!$ est bien du signe de $(-1)^n$. Enfin, $P_n(n-1) = -(n-1)! < 0$ et $P_n(n) = P_{n-1}(n) - n! < 0$.

Conclusion : on a montré par principe de récurrence que $\forall n \geqslant 2$, $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $(-1)^k P_n(k)$ a le même signe que $P_n(0)$ qui a le même signe que $(-1)^n$ et $P_n(n-1) < 0$ et $P_n(n) < 0$.

e. Comme P_n est une fonction continue et que P_n change strictement de signe sur tous les intervalles $]0;1[$, $]1;2[$, ...,$]n-2;n-1[$ d'après ce qui précède, par le théorème des valeurs intermédiaires, P_n s'annule au moins une fois sur tous les intervalles $]0;1[$, $]1;2[$, ...,$]n-2;n-1[$, ce qui fait déjà $n-1$ racines distinctes de P_n. De plus, $P_n(n) < 0$ et, comme P_n est unitaire et de degré n, $\lim\limits_{t \to +\infty} P_n(t) = +\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires encore, P_n s'annule au moins une fois sur $]n; +\infty[$, ce qui fait en tout n racines distinctes de P_n qui est de degré n.
Comme $P_n = \chi_{A_n}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, la matrice A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tous ses sous-espaces propres sont des droites.

6.248 Par hypothèse, le polynôme $P = X^3 - 3X - 5$ est annulateur de A. Comme $P' = 3(X^2 - 1)$, la fonction polynomiale P est croissante sur $]-\infty; -1]$ et $[1; +\infty[$ et elle est décroissante sur $[-1; 1]$. Comme $P(-1) = 3$ et $P(1) = -7$, d'après le théorème de la bijection, la fonction P ne s'annule qu'une seule fois en α sur $\mathbb{R}$ car elle est strictement négative sur $]-\infty; 1[$ et qu'elle réalise une bijection de $]1; +\infty[$ dans $]-7; +\infty[$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = +\infty$. De plus, comme $P(2) = -3 < 0 = P(\alpha) < 13 = P(3)$, on a $\alpha \in]2;3[$. Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note β et $\overline{\beta}$ (avec $\mathrm{Re}(\beta) > 0$) les deux autres racines complexes de P. Or on sait que les valeurs propres de A sont des racines de P donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\alpha, \beta, \overline{\beta}\}$. Puisque P est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\det(A) = \alpha^{m_\alpha(A)} \beta^{m_\beta(A)} \overline{\beta}^{m_{\overline{\beta}}(A)}$ (en notant $m_\lambda(A)$ la multiplicité de λ dans χ_A) d'après le cours. Comme A est une matrice réelle, $m_{\overline{\beta}}(A) = m_\beta(A)$ donc $\det(A) = \alpha^{m_\alpha(A)} (\beta\overline{\beta})^{m_\beta(A)} = \alpha^{m_\alpha(A)} |\beta|^{2m_\beta(A)} > 0$.

6.5 Officiel de la Taupe

6.249 Les matrices triangulaires réelles par exemple (les diagonales en particulier) vérifient cette propriété.
Supposons que A proposée dans l'énoncé vérifie cette propriété, puisque les éléments diagonaux de A sont $\alpha+1$, 3 et -1, et qu'ils doivent être valeur propre de A : $\det(A - 3I_3) = \det(A + I_3) = \det(A - (\alpha+1)I_3) = 0$. Or $\det(A + I_3) = -4\alpha(\alpha - 1)$ donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Réciproquement que ces deux valeurs conviennent.
On aurait aussi pu calculer $\chi_A = (3 - X)\big((X - \alpha - 1)(X + 1) - \alpha(\alpha - 1)\big) = (3 - X)(X^2 - \alpha X - \alpha^2 - 1)$ en développant par rapport à la seconde colonne.
Or nous avons l'équivalence : $\big(A \text{ vérifie } (P)\big) \iff \big(\chi_A = (3-X)(X+1)(X-\alpha-1) = (3-X)(X^2 - \alpha X - \alpha - 1\big)$ donc $\big(A \text{ vérifie } (P)\big) \iff \alpha = \alpha^2 \iff \big(\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1\big)$.
Si A est diagonale, bien sûr qu'elle vérifie la propriété (P).
Réciproquement, si A est symétrique réelle qui vérifie (P), d'après le théorème spectral elle est orthosemblable à la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \cdots, a_{n,n})$ par hypothèse : $A = QD{}^tQ$ avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathrm{Tr}\,(A^2) = \mathrm{Tr}\,({}^tAA) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$ (classique) mais on a aussi $\mathrm{Tr}\,(A^2) = \mathrm{Tr}\,(QD^2{}^tQ) = \mathrm{Tr}\,(D^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,k}^2$ donc $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et la matrice A est bien diagonale.

6.250 $A = {}^t({}^tA) = {}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = A^4$ donc $X^4 - X$ est annulateur de A. Si $\lambda_1 = 0$ est valeur propre de A, comme on sait que $\mathrm{Tr}\,(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ où λ_1 et λ_2 sont les deux valeurs propres (éventuellement complexes) de A, alors $\lambda_2 = \mathrm{Tr}\,(A) \in \mathbb{R}$. Or les valeurs propres sont des racines de tout polynôme annulateur, donc de $X^4 - X = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$ et ce sont donc 0 et 1.

Si on avait $\lambda_2 = 0$, on aurait $\chi_A = X^2$ car $\det(A) = 0$ donc $A^2 = 0$ d'après CAYLEY-HAMILTON puis $A = 0$ avec ${}^tA = A^2$ et ceci contredit l'hypothèse.
Par conséquent $\lambda_2 = 1$ et comme A possède 2 valeurs propres distinctes : A est diagonalisable et donc semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ car c'est une symétrie et $\chi_A = X^2 - X$.

Pour aller plus loin, comme $A^2 = A$, on a ${}^tA = A$ donc A est une symétrie orthogonale du plan $\mathbb{R}^2$.

6.251 Tout d'abord, pour $n = 1$, il est clair que si $\mathrm{Tr}\ (A) = 0$, alors $A = A^1 = 0$.

D'après CAYLEY-HAMILTON, on a $\chi_A(A) = 0$, or $\chi_A(A) = (-1)^n A^n + \cdots + \det(A)I_n$. Ainsi, il vient : $\mathrm{Tr}\ (\chi_A(A)) = n\det(A) = 0$ donc $\det(A) = 0$. Ceci assure que 0 est valeur propre de A.
En notant f l'endomorphisme canoniquement associé à A, il existe donc une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $v_n \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ L & 0 \end{pmatrix}$ où $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$. Comme on sait que A et A' sont semblables et que la trace de deux matrices semblables est la même, on a donc aussi $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\mathrm{Tr}\ (A'^k) = 0$. Or, par calculs par blocs, on a $A'^k = \begin{pmatrix} B^k & 0 \\ L_k & 0 \end{pmatrix}$ donc $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\mathrm{Tr}\ (B^k) = 0$.

Si on suppose donc la propriété vraie pour les matrices de taille $n - 1$, $B^{n-1} = 0$ donc $A'^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ et en multipliant par A', $A'^n = 0$. Ainsi, comme A^n et A'^n sont semblables, $A^n = 0$ et l'hérédité est établie.

6.252 Cet entier existe car l'ensemble A est non vide : $F = \{0\} \in A$; les dimensions sont majorées par n^2.

De plus, $F = S_n(\mathbb{R})$ (matrices symétriques) fait partie de A d'après le théorème spectral. Ainsi $d \geqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Si F est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $m > \dfrac{n(n+1)}{2}$, alors posons $G = T_n^+(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices triangulaires supérieures avec des 0 sur la diagonale. On sait que $\dim(G) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Ainsi, d'après la formule de GRASSMANN : $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) \geqslant m + \dfrac{n(n-1)}{2} - n^2 > 0$ car $F + G \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent : $F \cap G \neq \{0\}$ et il existe donc une matrice $M \neq 0$ qui est à la fois dans F et dans G. Mais comme $\chi_M = (-X)^n$, on a $M^n = 0$ d'après CAYLEY-HAMILTON. Si M était diagonalisable, comme elle n'admet que 0 comme valeur propre, elle serait semblable à la matrice nulle donc elle serait elle-même nulle, or $M \neq 0$. Ainsi, M n'est pas diagonalisable et $F \notin A$.
En conclusion, tout sous-espace de dimension $m > \dfrac{n(n+1)}{2}$ n'est pas dans A donc $d = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

6.253 Si on a $PDP^{-1} = QD'Q^{-1}$, alors en élevant à la puissance n, on : $\forall m \in \mathbb{N}$, $PD^mP^{-1} = QD'^mQ^{-1}$. On somme ces relations et on obtient : $PS_mP^{-1} = QS'_mQ^{-1}$ avec $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{D^k}{k!}$ et $S'_m = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{D'^k}{k!}$. Mais comme $D^k = \mathrm{diag}(d_1^k, \cdots, d_n^k)$, on a $S_n = \mathrm{diag}\Big(\sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{d_1^k}{k!}, \cdots, \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{d_n^k}{k!}\Big)$ donc, comme la convergence d'une suite de matrices équivaut à la convergence la suite de ses coefficients : $\lim\limits_{m\to+\infty} S_m = \mathrm{diag}(e^{d_1}, \cdots, e^{d_n}) = \exp(D)$ par définition. De même, on a bien sûr $\lim\limits_{m\to+\infty} S'_m = \exp(D')$. Mais l'application $u : A \to PAP^{-1}$ est linéaire, donc continue (en dimension finie) et on en déduit que $\lim\limits_{m\to+\infty} u(S_m) = u\Big(\lim\limits_{m\to\infty} S_m\Big)$ ce qui se traduit par $\lim\limits_{m\to+\infty} PS_mP^{-1} = P\exp(D)P^{-1}$. Bien sûr, on a aussi : $\lim\limits_{m\to+\infty} QS'_mQ^{-1} = Q\exp(D)Q^{-1}$. Comme on a pour tout $m \in \mathbb{N}$ la relation $PD^mP^{-1} = QD'^mQ^{-1}$, en passant à la limite, il vient $P\exp(D)P^{-1} = Q\exp(D)Q^{-1}$ par unicité de la limite : ceci prouve la définition correcte de $\exp(M)$ si $M \in D_n(\mathbb{C})$.
Si $D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ est une matrice diagonale, en dérivant case par case (on décompose dans la base canonique), on a $\big(\exp(tD)\big)' = \mathrm{diag}(d_1e^{td_1}, \cdots, d_ne^{td_n}) = D\exp(tD) = \exp(tD)D$. De plus, encore une fois, l'application $u : A \to PAP^{-1}$ est linéaire et on vient de voir que $f : t \mapsto \exp(tD)$ est dérivable donc, d'après la proposition 13.7 (survolée en effet mais ça sert), comme $\exp(tM) = u(\exp(tD))$ si $M = PDP^{-1}$ par définition,

l'application $g : t \mapsto \exp(tM)$ est aussi dérivable car $g = u \circ f$ et :

$$g'(t) = (u \circ f)'(t) = u(f'(t)) = PD\exp(tD)P^{-1} = P\exp(tD)DP^{-1} = M\exp(tM) = \exp(tM)M\,.$$

Avec $(M, N, R) \in D_n(\mathbb{C})^2 \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Y(t) = \exp(tM)R\exp(tN)$, on a $g : t \mapsto \exp(tM)$ et $h : t \to \exp(tN)$ dérivables et $B : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $B(A, A') = ARA'$ qui est bilinéaire. D'après la proposition 13.8 : Y est dérivable et $Y'(t) = B(g'(t), h(t)) + B(g(t), h'(t)) = M\exp(tM)R\exp(tN) + MR\exp(tN)N$ d'après les calculs précédents. Ainsi : $Y(t) - Y(0) = \int_0^t Y'(s)ds$ d'après la proposition 13.28 car Y est de classe C^1.

Comme $Y'(s) = MY(s) + Y(s)N$, $Y(0) = R$ et $\exp(0.M) = I_n$: $Y(t) - R = \int_0^t (MY(s) + Y(s)N)ds$ puis par linéarité $Y(t) = \int_0^t MY(s)ds + \int_0^t Y(s)Nds$. Par linéarité du produit matriciel par une matrice fixée ($A \mapsto MA$ et $A \mapsto AN$), on a d'après la proposition 13.21 (ii) : $Y(t) - R = M\int_0^t Y(s)ds + \left(\int_0^t Y(s)ds\right)N$.

Le fait que $||.||$ (c'est la norme 1) est une norme est classique. De plus, avec $||AB|| = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right|$, on a $||AB|| \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} |a_{i,k}|\Big)|b_{k,j}| = ||A|| \sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \leqslant ||A||\,||B||$.
$M = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ et que $d_1, \cdots, d_n$ sont tous strictement négatifs par hypothèse, on a $\exp(tM) = P\text{diag}(e^{td_1}, \cdots, e^{td_n})P^{-1}$ mais $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\lim_{t \to +\infty} e^{td_k} = 0$ donc $\lim_{t \to +\infty} \exp(tD) = 0$ (passage par les composantes). Mais on a $||\exp(tM)|| \leqslant ||P||\,||\exp(tD)||\,||P^{-1}||$ d'après ce qui précède donc $\lim_{t \to +\infty} \exp(tM) = 0$. De même : $\lim_{t \to +\infty} \exp(tN) = 0$ et on a bien $\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0$ avec la majoration $||Y(t)|| = ||\exp(tM)R\exp(tN)|| \leqslant ||\exp(tM)||\,||R||\,||\exp(tN)||$.
Même si ce n'est pas explicitement au programme, on va se servir ici du fait que si l'intégrale d'une fonction vectorielle est absolument convergente sur un intervalle, alors elle y est convergente : c'est la généralisation de la notion d'intégrabilité d'une fonction aux fonctions vectorielles. Or en ordonnant les valeurs propres de M par $d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_n < 0$, on a $||\text{diag}(e^{td_1}, \cdots, e^{td_n})|| \underset{+\infty}{=} O(e^{td_n})$ donc $||\exp(tM)|| \underset{+\infty}{=} O(e^{td_n})$. De même avec $N = QD'Q^{-1}$ dont les valeurs propres sont $d'_1 \leqslant \cdots \leqslant d'_n < 0$ et $||\exp(tN)|| \underset{+\infty}{=} O(e^{td'_n})$. On en déduit que, $||Y(t)|| \underset{+\infty}{=} O(e^{(d_n + d'_n)t})$ et comme $d_n + d'_n < 0$, $||Y||$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après ce qu'on a admis : Y est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc l'intégrale $X_0 = \int_0^{+\infty} Y(t)dt$ est convergente ce qui assure la limite finie voulue.

Passons à la limite (par continuité des applications linéaires) dans $Y(t) - R = M\int_0^t Y(s)ds + \left(\int_0^t Y(s)ds\right)N$, on obtient d'après les derniers renseignements : $-R = MX_0 + X_0N$. Avec $X = -X_0$, on a déjà l'existence.
L'application : $f : Z \to MZ + ZN$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on vient de montrer ci-dessus qu'il est surjectif (le résultat ne dépendait pas de la valeur de R). Comme on est en dimension finie, f est un automorphisme et on a bien : $\exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $MX + XN = R$ avec une expression intégrale de l'unique solution. Par ailleurs, on aurait pu écrire : soit $\mathcal{B}_M = (X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de vecteurs propres (associés aux λ_i) de M et $\mathcal{B}_N = (Y_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de vecteurs propres (associés aux μ_j) de ${}^tN$ (par les ordres de multiplicité de N qui sont égaux à ceux de ${}^tN$, la matrice ${}^tN$ est aussi diagonalisable). Posons $\mathcal{B} = (X_i{}^tY_j)$, alors $f(X_i{}^tY_j) = \lambda_i X_i{}^tY_j - \mu_j X_i{}^tY_j = (\lambda_i - \mu_j)X_i{}^tY_j$ donc $\mathcal{B}$ contient n^2 vecteurs propres de f. Comme dans la première partie du DS7, comme $\mathcal{B}_M$ et $\mathcal{B}_N$ sont des bases, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est constituée de vecteurs propres de f. f est ainsi diagonalisable avec pour valeurs propres les $\lambda_i - \mu_j$ qui par hypothèse sont de partie réelle strictement négative donc certainement non nuls. Par conséquent f est un automorphisme ce qui montre le résultat final indépendamment de tout ce qui a été fait avant.

6.254 $\chi_f = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$ où les λ_k sont les valeurs propres de f comptées avec leur multiplicité algébrique.
• Comme $\dim(E_0(f)) = n - 2$ grâce au théorème du rang, l'ordre de multiplicité algébrique de 0 est supérieur ou égal à son ordre géométrique donc $\chi_f = (-1)^n X^{n-2}(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = (-1)^n X^{n-2}(X^2 - \sigma_1 X + \sigma_2)$ où λ_1 et λ_2 sont les deux dernières valeurs propres de f (peut-être 0 encore) et $\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2$. Or on sait que f

est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc la matrice de f dans une base est triangulaire avec $n-2$ fois 0 puis λ_1, λ_2 sur la diagonale. Par conséquent, la matrice de f^2 est de la même forme (avec des carrés) et $\mathrm{Tr}\ (f^2) = \lambda_1^2+\lambda_2^2$ Alors $\lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{2}\Big((\lambda_1+\lambda_2)^2 - (\lambda_1^2+\lambda_2^2)\Big)$. Finalement : $\chi_f = (-1)^n X^{n-2}\Big(X^2 - \mathrm{Tr}\ (f)X + \frac{1}{2}\big(\mathrm{Tr}\ (f)^2 - \mathrm{Tr}\ (f^2)\big)\Big)$.

• Ici $\dim(E_0(f)) = n-3$, donc $\chi_f = (-1)^n X^{n-3}(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3) = (-1)^n X^{n-3}(X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3)$ où λ_1, λ_2 et λ_3 sont les trois dernières valeurs propres de f (peut-être 0 encore) et $\sigma_1 = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, $\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3$ et $\sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Comme f est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{Tr}\ (f^2) = \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$ et $\mathrm{Tr}\ (f^3) = \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3$ comme avant. On trouve à nouveau $\sigma_2 = \frac{1}{2}\Big((\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 - (\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\Big)$.

Mais on a aussi $(\lambda_1+\lambda_2+t\lambda_3)^3 = \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+3(\lambda_1\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_3^2+\lambda_2\lambda_1^2+\lambda_2\lambda_3^2+\lambda_3\lambda_1^2+\lambda_3\lambda_2^2)+6\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ et $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2) = \lambda_1\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_3^2+\lambda_2\lambda_1^2+\lambda_2\lambda_3^2+\lambda_3\lambda_1^2+\lambda_3\lambda_2^2+\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3$ ce qui permet d'affirmer $\mathrm{Tr}\ (f)^3 = \mathrm{Tr}\ (f^3) + 3(\mathrm{Tr}\ (f)\mathrm{Tr}\ (f^2) - \mathrm{Tr}\ (f^3)) + 6\sigma_3$.

Finalement : $\chi_f = (-1)^n X^{n-3}\Big(X^3 - \mathrm{Tr}\ (f)X^2 + \frac{1}{2}\big(\mathrm{Tr}\ (f)^2 - \mathrm{Tr}\ (f^2)\big)X + \frac{1}{6}\big(\mathrm{Tr}\ (f)^3 + 2\mathrm{Tr}\ (f^3) - 3\mathrm{Tr}\ (f)\mathrm{Tr}\ (f^2)\big)\Big)$.

6.255 En identifiant matrice et endomorphisme canoniquement associé, on a $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}(Y)$ avec $Y \neq 0$ car $\mathrm{rang}\,(A) = 1$. Comme toutes les colonnes de A sont proportionnelles à Y car elles représentent $C_j = AE_j$ où $(E_1, \cdots, E_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, il existe des scalaires $x_1, \cdots, x_n$ tels que $C_j = x_j Y$. Mais alors en notant X la matrice colonne telle que ${}^tX = (x_1\ \cdots\ x_n)$ on a $A = Y{}^tX$.

Ainsi $A^2 = Y{}^tXY{}^tX$ mais ${}^tXY \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ donc, en identifiant les scalaires et les matrices 1×1, on obtient : ${}^tXY = \mathrm{Tr}\ ({}^tXY) = \mathrm{Tr}\ (Y{}^tX) = \mathrm{Tr}\ (A)$ donc $A^2 = \mathrm{Tr}\ (A)Y{}^tX = \mathrm{Tr}\ (A)A$.

Comme l'ordre géométrique de 0 (qui vaut $n-1$ par hypothèse) est inférieur à son ordre algébrique, on a $\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X-\lambda_1)$ où λ_1 est la dernière valeur propre de A (qui vaut peut-être aussi 0). Mais on sait que $\chi_A = (-1)^n(X^n - \mathrm{Tr}\ (A)X^{n-1} + \cdots)$. En identifiant, on a $\lambda_1 = \mathrm{Tr}\ (A)$ d'où $\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}\ (A))$.

$A + I_n \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \det(A+I_n) \neq 0 \iff \chi_A(-1) \neq 0 \iff \mathrm{Tr}\ (A) + 1 \neq 0$ d'après ce qui précède.

Si $\mathrm{Tr}\ (A) \neq -1$, les deux polynômes $X+1$ et $X^2 - \mathrm{Tr}\ (A)X$ (annulateur de A) sont premiers entre eux donc on peut trouver un couple de BÉZOUT : $(X^2 - \mathrm{Tr}\ (A)X) - (X+1)(X - (\mathrm{Tr}\ (A)+1)) = \mathrm{Tr}\ (A)+1$. En "évaluant" en la matrice A (polynômes de matrices) et en divisant par $\mathrm{Tr}\ (A)+1 \neq 0$, on a $(A+I_n)^{-1} = I_n - \dfrac{A}{\mathrm{Tr}\ (A)+1}$.

6.256 **a.** Considérons le reste de la division euclidienne de χ_A par $X - \lambda$: $\chi_A = (X-\lambda)P + P\chi_A(\lambda)$.

Alors $\chi_A(A) = (A - \lambda I_n)P(A) + \chi_A(\lambda)I_n$. Or d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON : $\chi_A(A) = 0$.

De plus $\chi_A(\lambda) \neq 0$ car λ n'est pas valeur propre de A. Ainsi : $(A - \lambda I_n)\Big(\dfrac{P(A)}{\chi_A(\lambda)}\Big) = I_n$ ce qui garantit que $(A - \lambda I_n)^{-1} = \dfrac{P(A)}{\chi_A(\lambda)}$ est bien un polynôme en A (et même de degré inférieur ou égal à $n-1$). On pouvait aussi utiliser $\chi_{A-\lambda I_n}$ et se servir du fait qu'un polynôme en $A - \lambda I_n$ est un polynôme en A.

b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ qui ne sont pas dans le spectre de A. Posons, pour $i \in [\![1;k]\!]$, le polynôme d'interpolation de LAGRANGE $P_i = \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\Big(\dfrac{X-\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}\Big)$. Notons aussi $P = \prod\limits_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. Alors comme toutes les matrices $(A - \lambda_i I_n)_{1\leqslant i\leqslant k}$ sont inversibles car les $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ ne sont pas des valeurs propres de A : la matrice $P(A) = \prod\limits_{i=1}^{k}(A - \lambda_i I_n)$ est inversible et $\forall i \in [\![1;k]\!]$, $(A - \lambda_i I_n)P_i(A) = P(A)$ donc $(A - \lambda_i I_n)^{-1} = P(A)^{-1}P_i(A)$.

La famille $(P_1, \cdots, P_k)$ constitue une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ car si $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i P_i = 0$, en évaluant en λ_i, on trouve $\alpha_i = 0$.

Par conséquent, en notant π un polynôme annulateur unitaire de A de degré k, le polynôme $P - \pi$ est dans $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ car ces deux polynômes sont de degré k et unitaires. Ainsi il existe des constantes $(c_1, \cdots, c_k)$ telles que $P - \pi = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i P_i$. En évaluant en la matrice A, cela donne $P(A) - \pi(A) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i P_i(A) = P(A)$. Il suffit de multiplier tout ceci par $P(A)^{-1}$ pour obtenir grâce à ce qui précède $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(A - \lambda_i I_n)^{-1} = I_n$.

6.257 **a.** On constate qu'avec L telle que $l_{i,j} = 1$ si $i \leqslant j$ et $l_{i,j} = 0$ sinon, on a $A = LU$ en prenant $U = {}^tL$.

b. On a clairement $L = \sum_{k=0}^{n-1} N^k$ et comme $N^n = 0$, on a classiquement $L^{-1} = I_n - N$.

Ainsi $U^{-1} = ({}^tL)^{-1} = {}^t(L^{-1}) = I_n - {}^tN$. Par conséquent, on a $A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = (I_n - {}^tN)(I_n - N)$

c. Après calculs, on constate que $A^{-1} = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $b_{1,1} = 1$, $b_{k,k} = 2$ si $k \in [\![2;n]\!]$, $b_{i,j} = -1$ si $|i-j| = 1$ et $b_{i,j} = 0$ sinon. Il faut calculer le polynôme caractéristique de A^{-1} par une récurrence d'ordre 2.

6.258 Si A est inversible et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comme on travaille dans $\mathbb{C}$, la matrice $N = MA^{-1}$ possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ donc $\chi_N(\lambda) = \det(\lambda I_n - N) = \det(A^{-1})\det(\lambda A - M) = 0$ donc $\mathcal{P}$ est fausse.

Si A n'est pas inversible, son rang r vérifie $r \leqslant n-1$ et on sait que A est équivalente à J_r d'où l'existence de deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PJ_rQ^{-1}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour $\lambda \neq 0$, on a $\det(\lambda A - M) = \dfrac{\det(P)}{\det(Q)}\det(\lambda J_r - N)$ avec $N = P^{-1}MQ$.

Comme $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ et alors $\det(\lambda J_r - N) = \lambda^r \neq 0$. Ainsi $\mathcal{P}$ est vraie.

6.259 **a.** On calcule en développant χ_M par rapport à la seconde ligne et on trouve $\chi_M = (X-1)^2(X-2)^2$. On sait que M est diagonalisable ssi $\operatorname{rang}(M - I_4) = 2$ et $\operatorname{rang}(M - 2I_4) = 2$ (les ordres de multiplicité algébriques sont égaux aux ordres de multiplicité géométriques). Or $\operatorname{rang}(M - I_4) = 2 \iff a = b + c$ et $\operatorname{rang}(M - 2I_4) = 2$ dans tous les cas. Ainsi M est diagonalisable si et seulement si $a = b + c$.

b. Si $a = b + c$, $M^2 = 3M - 2I_4$ car $U = (X-1)(X-2)$ est annulateur de M. Division euclidienne de X^n par U : $X^n = QU + R$ avec $\deg(R) \leqslant 1$ donc $R = a_nX + b_n$ et $M^n = Q(M)U(M) + a_nM + b_nI_4 = a_nM + b_nI_4$. Or on a $R(2) = 2^n$ et $R(1) = 1$ donc $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$.

6.260 **a.** Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors $M = \lim\limits_{n \to +\infty} M$ avec $M \in GL_n(\mathbb{C})$.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas inversible, alors 0 est racine de χ_M et en notant $\alpha = \{|\lambda| \mid \lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(M),\ \lambda \neq 0\} > 0$, on a pour tout p suffisamment grand (tel que $\dfrac{1}{p} < \alpha$) $M_p = M - \dfrac{1}{p}I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ car $\chi_M\left(\dfrac{1}{p}\right) \neq 0$ par construction de α. Ainsi : $M = \lim\limits_{p \to +\infty} M_p$.

Dans les deux cas, M est la limite d'une suite de matrices inversibles donc $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. On considère deux cas :

- Si A est inversible, on a $BA = A^{-1}(AB)A$ donc BA et AB sont semblables et $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ donc les spectres de ces deux matrices sont les mêmes.
- Si A n'est pas inversible, $A_p = A - \dfrac{1}{p}I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ (si p assez grand). Par le premier cas : $\chi_{A_pB} = \chi_{BA_p}$.

Il reste à passer à la limite en constatant que les applications $M \mapsto MB$ et $M \mapsto BM$ sont continues car linéaires en dimension finie donc $\lim\limits_{p \to +\infty} A_pB = AB$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} BA_p = BA$, que le déterminant est continue donc que pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé : $\lim\limits_{p \to +\infty} \det(A_pB - \lambda I_n) = \det(AB - \lambda I_n)$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} \det(BA_p - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$. De tout ceci on déduit que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$ donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

6.261 **a.** Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, la fonction $f : t \mapsto P(t)e^t$ est continue sur $]-\infty; x]$ et on a $f(t) \underset{t \to -\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées car, si $P \neq 0$, $P(t) \underset{+\infty}{=} O(t^d)$ où $d = \deg(P)$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} t^{d+2}e^t = 0$. Ainsi, f est intégrable sur $]-\infty; x]$ d'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)e^t dt$.

b. L'énoncé confond par un abus de notation habituel le polynôme $L(P)$ et la fonction polynomiale $L(P)$ (on va le montrer). L'existence, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, de la fonction $x \mapsto L(P)(x)$ a été établie en **a.** mais on ne sait pas encore que c'est une fonction polynomiale, et encore moins qu'elle est de degré inférieur ou égal à n. La linéarité de L provient de la linéarité de l'intégrale ; toutes les intégrales sont convergentes quand on calcule $L(\lambda P+\mu Q)(x)$ quand on prend $(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$. Reste à vérifier que L va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

Pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, $L(X^k)(x)=e^{-x}\int_{-\infty}^{x}t^ke^tdt$. On pose $u:t\mapsto t^k$ et $v:t\mapsto e^t$ qui sont bien de classe C^1 sur $]-\infty;x]$ et vérifient $\lim\limits_{t\to-\infty}u(t)v(t)=0$ par croissances comparées et on obtient, par intégration par parties, $L(X^k)(x)=e^{-x}\left(\Big[t^ke^t\Big]_{-\infty}^{x}-\int_{-\infty}^{x}kt^{k-1}e^tdt\right)=x^k-ke^{-x}\int_{-\infty}^{x}t^{k-1}e^tdt=x^k-L(X^{k-1})(x)\quad(R)$.

Étant donné que $\forall x\in\mathbb{R},\ L(X^0)(x)=e^{-x}\int_{-\infty}^{x}e^tdt=e^{-x}[e^t]_{-\infty}^{x}=1$, donc que $L(X^0)$ est la fonction constante qu'on identifie au polynôme $L(X^0)=1=X^0$, la relation (R) permet, par récurrence, de montrer que toutes fonctions $L(X^k)$ sont bien polynomiales et qu'on peut écrire $\forall k\geqslant 1,\ L(X^k)=X^k-kL(X^{k-1})$. La récurrence précédente permet aussi d'établir que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $L(X^k)$ est de degré k et unitaire (car $kL(X^{k-1})$ ne participe pas au terme de plus haut degré de $L(X^k)$).

Au final, L est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, la matrice A de L dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale car $L(X^k)=X^k-kL(X^{k-1})$ et que $kL(X^{k-1})$ est de degré inférieur ou égal à $k-1$ donc strictement inférieur à k.

Comme $\chi_L=\chi_A=(X-1)^n$ est scindé sur $\mathbb{R}$, L est diagonalisable si et seulement si l'ordre de multiplicité géométrique de la valeur propre 1 est égal à n : c'est-à-dire $\dim(\mathrm{Ker}(L-\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}))=n$. Or ceci équivaut à $L=\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Or $L(X^0)=L(1)=1=X^0$ et $L(X^1)=L(X)=X-1\neq X^1$ donc on peut conclure finalement que L est diagonalisable si $n=0$ et non diagonalisable si $n\geqslant 1$.

6.262 **a.** Il est clair que R est un endomorphisme de $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Il est aussi clair que $R^4=\mathrm{id}_E$ donc $U=X^4-1=(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$ est annulateur de R et comme U est scindé à racines simples, R est diagonalisable.

c. La matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Si $n=1$ bien sûr 1 est la seule valeur propre de R. Supposons dorénavant $n\geqslant 2$.

La matrice ne possédant que des coefficients nuls sauf $a_{1,1}=a_{n,n}=1$ et $a_{1,n}=a_{n,1}=-1$ est vecteur propre associé à la valeur propre -1.

La matrice ne possédant que des coefficients nuls sauf $a_{1,1}=1$, $a_{n,n}=-1$, $a_{1,n}=-i$ et $a_{n,1}=i$ est vecteur propre associé à la valeur propre $-i$.

La matrice ne possédant que des coefficients nuls sauf $a_{1,1}=1$, $a_{n,n}=-1$, $a_{1,n}=i$ et $a_{n,1}=-i$ est vecteur propre associé à la valeur propre i.

Ainsi, si $n\geqslant 2$, le spectre de R est $\mathbb{U}_4$.

6.263 On sait que A est trigonalisable donc il existe P inversible et T triangulaire supérieure telles que $A=PTP^{-1}$.

On décompose $T=D+N$ avec $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ (avec $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ strictement positif) et N nilpotente. Comme $M\mapsto P^{-1}MP$ est linéaire donc lipschitzienne, $\{A^p\mid p\in\mathbb{Z}\}$ bornée implique que $\{P^{-1}A^pP\mid p\in\mathbb{Z}\}$ est bornée. Or $P^{-1}A^pP=(D+N)^p$. Or les coefficients diagonaux de $(D+N)^p$ sont les $\lambda_1^p,\cdots,\lambda_n^p$; pour que cet ensemble soit borné, il est nécessaire que tous les λ_k soient égaux à 1 (si $\lambda_k>1$ on a $\lim\limits_{p\to+\infty}\lambda_k^p=+\infty$ et si $\lambda_k<1$, alors $\lim\limits_{p\to-\infty}\lambda_k^p=+\infty$).

Alors $T=I_n+N$ or N est nilpotente et on a donc $\forall p\geqslant n,\ T^p=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{p}{k}N^k$.

S'il existe un terme non nul $c_{i,j}$ dans la matrice N^{n-1}, alors dans la case (i,j) de T^p, on aura un coefficient équivalent à $\binom{p}{n-1}c_{i,j}$ qui n'est pas borné. Alors $N^{n-1}=0$ et on montre de même que $N=N^2=\cdots=$

$N^{n-2}=0$. Ainsi $T=I_n$ et $A=I_n$.

6.264 **a.** Si $P\in\mathbb{R}_{p-1}[X]$, on écrit $P=\sum_{i=0}^{p-1}p_iX^i$ et on a alors :

$$P(u)=\sum_{i=0}^{p-1}p_i\sum_{k=1}^{p}\lambda_k^iv_k=\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{i=0}^{p-1}p_i\lambda_k^i\Big)v_k=\sum_{k=1}^{p}P(\lambda_k)v_k.$$

b. Si on prend $P_0=\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)\in\mathbb{R}_p[X]$, alors $P_0(u)=0$ d'après ce qui précède. On en déduit que u annule un polynôme scindé à racines simples donc que u est diagonalisable. De plus, si $P\in\mathbb{R}[X]$, on écrit sa division euclidienne par P_0 : $P=P_0Q+R$ donc $P(u)=R(u)=\sum_{k=1}^{p}R(\lambda_k)v_k=\sum_{k=1}^{p}P(\lambda_k)v_k$ car $R\in\mathbb{R}_p[X]$.

c. P_0 annule u donc $\mathrm{Sp}(u)\subset\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p\}$. Soit $P_i=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}(X-\lambda_j)$, alors $P_i(u)=P_i(\lambda_i)v_i\neq 0$ par hypothèse et $(u-\lambda_i\mathrm{id}_E)\circ P_i(u)=0$ donc $u-\lambda_i\mathrm{id}_E$ n'est pas inversible et λ_i est bien valeur propre de u. Par conséquent $\mathrm{Sp}(u)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p\}$. Classiquement, l'idéal annulateur de u est $P_0\,\mathbb{R}[X]$.

d. À faire.

6.265 Le polynôme $P=X^3-4X^2+4X=X(X-2)^2$ est annulateur de A donc $\mathrm{Sp}(A)\subset\{0,2\}$. Comme A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est semblable à une matrice triangulaire avec des 0 et des 2 sur la diagonale. Mais comme $\mathrm{Tr}\,(A)=2$, il n'y a qu'un 2 sur la diagonale et donc $\dim(E_2(A))=1$.

6.266 **a.** Posons $C=\begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix}$, alors $\chi_C=X^2-2X-3=(X+1)(X-3)$ est scindé à racines simples donc C est diagonalisable. Comme $E_{-1}(C)=\mathrm{Vect}((-2,1))$ et $E_3(C)=\mathrm{Vect}((2,1))$, on a $C=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}-2&2\\1&1\end{pmatrix}$. Posons $Q=\begin{pmatrix}-2I_n&2I_n\\I_n&I_n\end{pmatrix}$, comme $P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&2\\1&2\end{pmatrix}$, on vérifie (par blocs) que Q est inversible avec $Q^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}I_n&2I_n\\I_n&-2I_n\end{pmatrix}$ et $Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}-A&0\\0&3A\end{pmatrix}$ donc B est semblable à $B'=\begin{pmatrix}-A&0\\0&3A\end{pmatrix}$.

b. Si A est diagonalisable, il existe une matrice inversible U telle que $A=UDU^{-1}$ et avec $V=\begin{pmatrix}U&0\\0&U\end{pmatrix}$, $V^{-1}=\begin{pmatrix}U^{-1}&0\\0&U^{-1}\end{pmatrix}$, on a $V^{-1}\begin{pmatrix}-A&0\\0&3A\end{pmatrix}V=\begin{pmatrix}-D&0\\0&3D\end{pmatrix}$ diagonale donc B est diagonalisable.
Si B est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racines simples R tel que $R(B)=0$. Comme B et B' sont semblables, on a aussi $R(B')=\begin{pmatrix}R(-A)&0\\0&R(3A)\end{pmatrix}=0$ donc en posant $S(X)=R(-X)$, S est aussi scindé à racines simples et annule A donc A est diagonalisable.

c. Puisque B est semblable à B', $\chi_B=\chi_{B'}=\det(XI_n+A)\det(XI_n-3A)=(-1)^n3^n\chi_A(-X)\chi_A(X/3)$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(B)=(-\mathrm{Sp}(A))\cup(3\,\mathrm{Sp}(A))$. Supposons que $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors il existe une base (X_1,X_2) de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A : par exemple $AX_1=\lambda_1X_1$ et $AX_2=\lambda_2X_2$. Alors en notant $Y_1=\begin{pmatrix}X_1\\0\end{pmatrix}$, $Y_2=\begin{pmatrix}X_2\\0\end{pmatrix}$, $Y_3=\begin{pmatrix}0\\X_1\end{pmatrix}$, $Y_4=\begin{pmatrix}0\\X_2\end{pmatrix}$, on a $B'Y_1=-\lambda_1Y_1$, $B'Y_2=-\lambda_2Y_2$, $B'Y_3=3\lambda_1Y_3$ et $B'Y_4=3\lambda_2Y_4$ et il est facile de vérifier que (Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) est libre dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ donc que c'en est une base qui est une base de vecteurs propres de B', et une base de vecteurs propres de B est donc, d'après ce qui précède, (QY_1,QY_2,QY_3,QY_4) (qui est une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^4$ car Q est inversible).

6.267 f est clairement linéaire ! En notant $H=\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\,)$ l'hyperplan des matrices de trace nulle, on $f|_H=\mathrm{id}_H$. De plus, $f(I_n)=(1-n)I_n$ donc I_n est vecteur propre associé à a valeur propre $1-n\neq 1$. Ainsi, $\dim(E_1(f))=n^2-1$ et $\dim(E_{1-n}(f))=1$ et f est diagonalisable.

6.268 f est clairement linéaire.

Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(M) = \lambda M \Longleftrightarrow d - \lambda a = 2b - \lambda b = 2c - \lambda c = a - \lambda d = 0$. On traite deux cas :

Si $\lambda = 2$, on a b et c quelconque et $a = d = 0$ donc $\dim(E_2(f)) = 2$.
Si $\lambda \neq 2$, $b = c = 0$ et $a = \lambda^2 a$ donc si $\lambda \neq \pm 1$, on a $a = d = 0$ et $E_\lambda(f) = \{0\}$. Si $\lambda = 1$, on a $a = d$ et $E_1(f)$ est la droite engendrée par I_n Si $\lambda = -1$, on a $a = -d$ et $E_{-1}(f)$ est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Comme $\dim(E_2(f)) + \dim(E_1(f)) + \dim(E_{-1}(f)) = 2 + 1 + 1 = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, f est diagonalisable et inversible car 0 n'est pas valeur propre de f.

6.269 En transposant $({}^tM)^2 + M = I_n$ donc $(I_n - M^2)^2 + M - I_n = M^4 - 2M^2 + M = 0$ donc $P = X^4 - 2X^2 + X$ annule M. Or $P = X(X-1)(X^2+X-1)$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$. Ainsi M est diagonalisable.
Comme $\det(M^2) = \det(I_n - {}^tM) = \det(I_n - M)$, on a $I_n - M$ inversible car M l'est pas hypothèse. On en déduit que $M(M - I_n)(M^2 + M - I_n) = 0$ et en se servant de l'inversibilité de M et $M - I_n$, on a $M^2 = I_n - M = I_n - {}^tM$ donc M est symétrique. M est donc une matrice orthosemblable à une matrice diagonale avec des $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ sur la diagonale.

6.270 **a.** On calcule $\chi_A = (X-2)^2(X-4)$ avec l'indication. Comme $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 1, l'ordre de multiplicité géométrique de 2 est 2 avec le théorème du rang et la matrice A est diagonalisable car $\dim(E_2(A)) + \dim(E_4(A)) = 3$.

b. Par l'indication, $E_4(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1,-1,-1)$ et avec la matrice $A - 2I_3$, $E_2(A)$ est le plan d'équation $x - 3y + 2z = 0$ donc $E_2(A) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ avec $v_2 = (3,1,0)$ et $v_3 = (2,0,-1)$.

c. En notant P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3), on a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(4,2,2)$ donc il suffit de prendre $R = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(2, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Si R vérifie $R^2 = A$, alors comme $(X-2)(X-4)$ est annulateur de A, on a $(R^2 - 2I_3)(R^2 - 4I_3) = 0$ donc $(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-2)(X+2)$ est annulateur de R et scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ donc R est diagonalisable.

6.271 Cette matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable. Elle est de rang 1 si $n = 1$.

Si $n \geqslant 2$, A est de rang 2 donc 0 est valeur propre d'ordre $n-2$ avec le théorème du rang et le théorème spectral. On note λ_1 et λ_2 les deux autres valeurs propres réelles. On a $\mathrm{Tr}\ (A) = n = \lambda_1 + \lambda_2$ et comme A est semblable à $D = \mathrm{diag}(0, \cdots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$, on a $\mathrm{Tr}\ (A^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. On trouve λ_1, λ_2 car ce sont les racines de $X^2 - (\lambda_1+\lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2$ avec $\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^2 - (\lambda_1^2+\lambda_2^2)}{2} = \dfrac{6n^2 - n(n-1)(2n-1)}{12}$.

6.272 **a.** Soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. $f(g(x)) = g(f(x)) = \lambda g(x)$ donc $g(x) \in E_\lambda(f)$ qui est une droite par hypothèse donc $g(x)$ et x sont proportionnels et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = ax$ donc x est aussi vecteur propre pour g. Comme f est diagonalisable dans une base de vecteurs propres, cette base est aussi une base de vecteurs propres pour g : c'est donc une base de diagonalisation commune.

b. Il existe donc une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = D$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = D'$ avec $\lambda_1, \cdots, \alpha_n$ distincts deux à deux. Soit le polynôme d'interpolation de Lagrange $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $P(\lambda_k) = \alpha_k$. Alors $P(D) = D'$ donc $P(f) = g$.

6.273 **a.** Si M^2 est DZ, il existe un polynôme $P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$ scindé à racines simples (on peut l'imposer unitaire) qui annule M^2. En notant μ_i l'une des racines carrées de λ_i (il en existe dans $\mathbb{C}$), on a donc $P(M^2) = 0 = \prod_{i=1}^{r} (M^2 - \lambda_i I_k) = \prod_{i=1}^{r} (M - \mu_i I_k)(M + \mu_i I_k)$ donc le polynôme $Q = \prod_{i=1}^{r} (X - \mu_i)(X + \mu_i)$ est annulateur de M et SARS ($\pm\mu_i = \pm\mu_j \Longrightarrow \mu_i^2 = \lambda_i = \lambda_j = \mu_j^2 \Longrightarrow i = j$) donc M est diagonalisable.

b. Il est clair que $NN' = N'N = I_{2n}$ avec $N' = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ donc N est inversible.

c. On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$.

• Si N est diagonalisable alors on peut écrire $N = UDU^{-1}$ avec $U \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ et D diagonale donc il vient $N^2 = UD^2U^{-1}$ et N^2 est aussi diagonalisable. Alors il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples P tel que $P(N^2) = 0 = \begin{pmatrix} P(AB) & 0 \\ 0 & P(BA) \end{pmatrix}$ donc $P(AB) = 0$ ce qui montre que AB est DZ.

• Réciproquement, si AB est diagonalisable, il existe une matrice $U \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale D telles que $AB = UDU^{-1}$ donc $BA = B(AB)B^{-1} = (BU)D(BU)^{-1}$ donc BA est aussi DZ car $BU \in GL_n(\mathbb{C})$. En posant $V = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & BU \end{pmatrix}$, on a $V \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ et $V^{-1}N^2V = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ donc N^2 est DZ et comme N est inversible, on sait d'après **a.** que N est aussi DZ.

On a montré l'équivalence : N est diagonalisable si et seulement si AB l'est.

6.274 Le polynôme caractéristique de J est $X^3 - 1$. La seule valeur propre réelle de J est 1 donc $J \neq I_3$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Par contre $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ est scindé à racines simples donc J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

6.275 La matrice A est antisymétrique. Si $n = 1$ elle est nulle donc diagonalisable.

Si $n \geqslant 2$, A est de rang 2 donc 0 est valeur propre d'ordre au moins $n-2$ avec le théorème du rang. On note λ_1 et λ_2 les deux autres valeurs propres complexes (χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$). On a $\mathrm{Tr}\,(A) = 0 = \lambda_1 + \lambda_2$ et comme A est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec $0, \cdots, 0, \lambda_1, \lambda_2$ sur la diagonale (A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), on a $\mathrm{Tr}\,(A^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = -2(n-1)$ donc $\lambda_1 = i\sqrt{n-1}$ et $\lambda_2 = -i\sqrt{n-1}$ valeurs propres simples de A donc A est diagonalisable car $\dim(E_0(A)) + \dim(E_{\lambda_1}(A)) + \dim(E_{\lambda_2}(A)) = n$.

6.276 Le polynôme $P = X^3 + X - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ car $P' = 3X^2 + 1$ a pour racines $\dfrac{i}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{-i}{\sqrt{3}}$ qui ne sont pas racine de P. Ainsi, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par contre, comme P' est une fonction polynomiale strictement croissante, P n'admet qu'une seule racine réelle $\alpha \in]0;1[$ (car $P(0) < 0 < P(1)$) et A n'est diagonalisable que si $A = \alpha I_n$.

Les autres racines de P étant β et $\overline{\beta}$ avec $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, les ordres de multiplicités de β et de $\overline{\beta}$ sont les mêmes dans P (en tant qu'ordre algébriques) donc les mêmes en tant qu'ordre de multiplicité géométrique. Alors la matrice A s'écrit $A = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et D diagonale avec des α, des β et des $\overline{\beta}$ sur la diagonale mais autant de β que de $\overline{\beta}$. Ainsi, $\det(A) = \alpha^a\beta^b\overline{\beta}^b = \alpha^a|\beta|^{2b} > 0$ car $\alpha > 0$.

6.277 • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$, on écrit les divisions euclidiennes de AP_1 et AP_2 par B : $AP_1 = BQ_1 + R_1$ et $AP_2 = BQ_2 + R_2$ avec $\deg(R_1) < \deg(B)$ et $\deg(R_2) < \deg(B)$; par définition on a $R_1 = \Phi(P_1) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $R_2 = \Phi(P_2) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Alors $A(\lambda P_1 + P_2) = \lambda(BQ_1 + R_1) + (BQ_2 + R_2) = (\lambda Q_1 + Q_2)B + R$ en posant $R = \lambda R_1 + R_2$.

Or $\deg(R) \leqslant \mathrm{Max}(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$ donc R est le reste de la division euclidienne de $A(\lambda P_1 + P_2)$ par B ce qui prouve que $\Phi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda\Phi(P_1) + \Phi(P_2)$: Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, alors $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $AP = BQ$. On a donc $B|AP$ or A et B sont premiers entre eux donc $B|P$ d'après le théorème de Gauss. Mais comme $\deg(B) = n+1$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, ceci impose $P = 0$. On en déduit que Φ est injective et comme c'est un endomorphisme en dimension finie : $\Phi \in GL(\mathbb{R}_n[X])$.

• On pouvait aussi raisonner par les racines des polynômes étant donné que ceci n'est pas au programme : soit α une racine de B de multiplicité k, alors comme A et B sont premiers entre eux, α n'est pas racine de A ce qui prouve que α est racine de P de multiplicité au moins k. Mais cela fait, en comptant toutes les racines de B avec leur ordre de multiplicité, au moins $n+1$ racines de $P \in \mathbb{R}_n[X]$, ceci impose encore $P = 0$.

• Si B est scindé à racines simples, on peut écrire $B = \lambda \prod_{k=0}^{n} (X - \alpha_k)$ avec $\lambda \neq 0$ et $\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$.

Si $A = X$ et $B = X^2 - 1$, alors si $P = aX + b$, on a $AP = aX^2 + bX = aB + bX - a$ donc $\Phi(P) = bX - a$ et Φ est une symétrie de valeurs propres 1 et -1 avec des vecteurs propres $X + 1$ et $X - 1$.

Ceci nous fait penser aux polynômes d'interpolation de Lagrange.

Soit, pour $j \in [\![0; n]\!]$, le polynôme $L_j = \prod_{i \neq j} \left(\dfrac{X - \alpha_i}{\alpha_j - \alpha_i} \right)$. On sait que $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car si $\lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$, en évaluant en α_j on trouve $\lambda_j = 0$.

On écrit la division euclidienne $AL_j = BQ_j + R_j$ avec $\deg(R_j) \leqslant n$. On évalue en α_i pour $i \neq j$ et on trouve $R_j(\alpha_i) = 0$. De plus, en évaluant en α_j, on a $A(\alpha_j) = R_j(\alpha_j)$. On connaît $n + 1$ valeurs du polynôme $R_j \in \mathbb{R}_n[X]$, ce qui nous permet d'affirmer que $R_j = A(\alpha_j) L_j$. Ainsi $\Phi(L_j) = A(\alpha_j) L_j$ et $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base de vecteurs propres de Φ avec les valeurs propres associées $A(\alpha_0), \cdots, A(\alpha_n)$: Φ est donc diagonalisable.

• Si $A = aX^{p+1} - (a+1)X^p + 1$ et $B = (1 - X)^2$, on a $n = 1$ donc si $P = a_1 X + a_0$, $AP = BQ + R$ avec $R = b_1 X + b_0$, il vient $A(1)P(1) = R(1)$ et $A'P + AP' = B'Q + BQ' + R'$ donc $A'(1)P(1) + A(1)P'(1) = R'(1)$ ce qui donne, comme $A(1) = 0$ et $A'(1) = a - p$ le système suivant : $b_1 + b_0 = (a - p)(a_1 + a_0) - b_1 = 0$. Alors la matrice de Φ dans la base canonique est $M = (a - p) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Si $a = p$, $\Phi = 0$ donc Φ est diagonalisable.

Si $a \neq p$, $M^2 = 0$ et $M \neq 0$, et classiquement Φ n'est pas diagonalisable.

6.278 Le polynôme $P = X^3 - X - 1$ est annulateur de A et, comme $P' = 3X^2 - 1$, la fonction polynomiale P est croissante sur $\left] -\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \right]$ et $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty \right[$ et décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}} \right]$. Or $P\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \right) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} - 1 < 0$ montre que P n'admet qu'une seule racine réelle $\alpha \in]1; 2[$ car $P(1) = -1 < 0 < 5 = P(2)$. Comme P est réel, $P = (X - \alpha)(X - z)(X - \overline{z})$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, comme A est réelle, on sait que les sous-espaces propres associés aux valeurs propres z et $\overline{z}$ sont de même dimension r ($AX = zX \iff A\overline{X} = \overline{z}\overline{X}$ si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$). Ainsi, A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à la matrice définie par blocs $D = \begin{pmatrix} \alpha I_s & 0 & 0 \\ 0 & z I_r & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z} I_r \end{pmatrix}$ avec $s = \dim(E_\alpha(A))$.

Comme A et D semblables : $\det(A) = \det(D) = \alpha^s z^r \overline{z}^r = \alpha^s |z|^r > 0$ car $\alpha > 0$.

6.279 Si f est une fonction polynomiale de P, alors $u(f)$ l'est aussi car en notant $f_n : x \mapsto x^n$, on a le calcul $u(f_n)(x) = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_x^{x+T} t^n dt = \dfrac{(x+T)^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)T} = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{(x+T)^{n+1} - x^{n+1}}{(x+T) - x} = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} (x+T)^k x^{n-k}}{n+1}$: P est stable par u. La linéarité de u provient de celle de l'intégration : u est bien un endomorphisme de P.

Soit $f = \sum_{k=0}^{d} \alpha_d f_d$ avec $\alpha_d \neq 0$ une fonction polynomiale de degré $d \geqslant 0$, le calcul précédent montre, comme $u(f_n)$ est une fonction polynomiale de degré n unitaire, que $u(f)$ est de même degré que f et de même coefficient dominant (ici α_d).

Si $f \in \mathrm{Ker}\,(u)$, $f = 0$ car si $\deg(f) \geqslant 0$ on a $\deg(u(f)) \geqslant 0$ donc $u(f) \neq 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(u) = \{0\} \iff u$ injective.

Si l'on restreint u à P_n (l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de degré inférieure ou égal à n), on obtient $u_n : P_n \to P_n$ qui est aussi un endomorphisme injectif donc bijectif (en dimension finie).

Tout $f \in P$ fait partie d'un P_n et possède donc un antécédent par u_n et donc par u : ainsi u est surjective.

Au final : u est bien un automorphisme de P.
Comme u conserve le degré et le coefficient dominant de ses polynômes, la seule valeur propre possible est 1 en identifiant les coefficients dominants dans $u(f) = \lambda f$.

De plus, $u(1) = 1$ donc 1 est bien valeur propre de u : par conséquent $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$.

6.280 Comme les matrices sont d'ordre 2, on a $A^2 - \mathrm{Tr}\,(A)A + \det(A)I_2 = 0$, $A^2 - \mathrm{Tr}\,(A)A + \det(A)I_2 = 0$ mais aussi $(A+B)^2 - \mathrm{Tr}\,(A+B)(A+B) + \det(A+B)I_2 = 0$. On en déduit que $A^2, B^2, (A+B)^2$ sont des matrices de $\mathrm{Vect}(I_2, A, B)$. Or par hypothèse, on a $AB \in \mathrm{Vect}(I_2, A, B)$. Comme $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, on a $BA = (A+B)^2 - AB - A^2 - B^2 \in \mathrm{Vect}(I_2, A, B)$ donc il existe trois réels x, y, z tels que $BA = xI_2 + yA + zB$.

6.281 Soit λ une valeur propre de A, alors il existe $X \neq 0$ tel que $AX = X$. Le système s'écrit $\forall i \in [\![1;n]\!],\ ix_i + \sum\limits_{k\neq i} x_k = \lambda x_i$ ou encore $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = (\lambda+1-i)x_i$. S'il existe un $i \in [\![1;n]\!]$ tel que $\lambda = i-1$, alors $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$ puis $\forall j \neq i$, on a $x_j = 0$ donc $x_1 = \cdots = x_n = 0$ ce qui est impossible. Ainsi $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\lambda \neq i-1$ et, en posant $s = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \neq 0$, il vient $\forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i = \dfrac{s}{\lambda+1-i}$ donc $s = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{s}{\lambda-k} \Longrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda-k} = 1$ car $s \neq 0$.

Réciproquement, si $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda-k} = 1$, en posant $\forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i = \dfrac{1}{\lambda+1-i}$ (qui existe), on remonte les calculs : $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$ donc λ est valeur propre de A.

Par conséquent : λ est valeur propre de A si et seulement si $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda-k} = 1$.

Soit $f : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{t-k} - 1$ qui est définie et continue sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_-^* \cup \left(\bigcup\limits_{k=0}^{n-2}]k;k+1[\right) \cup]n-1;+\infty[$. Pour tout entier $k \in [\![0;n-2]\!]$, on a $\lim\limits_{t\to k^+} f(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to(k+1)^-} f(t) = -\infty$ donc f s'annule au moins une fois sur $]k;k+1[$ par le TVI (en fait une seule car f est aussi strictement décroissante sur cet intervalle). Cela fait donc au moins $n-1$ valeurs propres réelles de A, la dernière ne peut être que réelle car A est réelle et que la trace est la somme des valeurs propres. Mais on a même $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = -1$ et $\lim\limits_{t\to(n-1)^+} f(t) = +\infty$ donc f s'annule aussi sur $]n-1;+\infty[$ et on a nos n valeurs propres réelles distinctes de A qui est donc diagonalisable (A symétrique réelle donc ce n'est pas une surprise).
On pouvait aussi dire que la résolution du système nous a montré que tous les sous-espaces propres étaient de dimension 1 (engendré par le vecteur $\left(\dfrac{1}{\lambda+1-i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$). Comme A est diagonalisable car symétrique réelle, la somme des dimensions des espaces propres vaut n ce qui fait encore n valeurs propres distinctes.

6.282 Soit λ une valeur propre de T, alors il existe une fonction non nulle f telle que $T(f) = \lambda f$ ce qui équivaut à $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = \lambda f(x)$.

Comme f est non nulle, on a forcément $\lambda \neq 0$ car sinon $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = 0$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$, alors par une récurrence simple, on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_0+n) = \lambda^n f(x_0)$.
Mais on sait que f admet une limite finie en $+\infty$ ce qui impose $\lambda \in]-1;1]$.

Il suffit de connaître f sur $[0;1]$ pour la connaître partout si on a $f(x+1) = \lambda f(x)$.

- Soit f la fonction constante égale à 1, alors $f \neq 0$ et $T(f) = f$ donc 1 est valeur propre de T.

• Soit $\lambda \in]-1;1[\setminus\{0\}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |\lambda|^x \sin(\pi x)$. La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}$. De plus, f est non nulle et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = |\lambda|^{x+1}\sin(\pi x + \pi) = -|\lambda|\,|\lambda|^x \sin(\pi x) = \lambda f(x)$. On a donc $T(f) = \lambda f$ et $f \neq 0$ donc λ est valeur propre de T.

Conclusion : le spectre de T est $]-1;1]\setminus\{0\}$.

6.283 Si u est injectif, alors u est un automorphisme de E car E est de dimension finie donc $u \circ v = 0$ implique $v = u^{-1}\circ(u\circ v) = 0$. Tout vecteur propre de u (il en existe car E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel donc χ_u est scindé dans $\mathbb{C}$ et possède des racines) est aussi vecteur propre de v.

Si u n'est pas injectif, $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0_E\}$; on suppose toujours que $u \circ v = 0$. Si $v = 0$ on fait comme avant, sinon $\mathrm{Im}\,(v) \neq \{0_E\}$ et soit x un vecteur propre pour l'endomorphisme v induit dans $\mathrm{Im}\,(v)$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $v(x) = \alpha x$ et $x \in \mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$ et $u(x) = 0_E = 0x$. x convient.

Supposons que $u \circ v = \alpha u + \beta v$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$, alors $(u - \beta\mathrm{id}_E)\circ(v - \alpha\mathrm{id}_E) = \alpha\beta\mathrm{id}_E$.

• si $\alpha\beta = 0$, par le cas précédent et $u - \beta\mathrm{id}_E$ et $v - \alpha\mathrm{id}_E$ ont un vecteur propre commun donc u et v aussi.

• sinon, soit x un vecteur propre de u, alors x est aussi un vecteur propre de $u - \beta\mathrm{id}_E$ qui est un automorphisme (car $\alpha\beta \neq 0$). Ainsi, il existe un complexe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $u(x) - \beta x = \lambda x$ d'où $(u - \beta\mathrm{id}_E)^{-1}(x) = \dfrac{1}{\lambda}x$ or $(u - \beta\mathrm{id}_E)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\beta}(v - \alpha\mathrm{id}_E)$ donc $v(x) - \alpha x = \dfrac{\alpha\beta}{\lambda}x$ et x est aussi un vecteur propre de v.

On passe en mode matriciel et cela revient à montrer que si $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $AB \in \mathrm{Vect}(A,B)$ alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T_A, T_B deux matrices triangulaires supérieures telles que $A = PT_AP^{-1}$ et $B = PT_BP^{-1}$.

On le fait par récurrence sur n. Si $n = 1$, c'est évident.

Si $n \geqslant 2$ et qu'on suppose la propriété vraie jusqu'à $n-1$, si $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $AB \in \mathrm{Vect}(A,B)$ alors d'après la question **b.**, il existe un vecteur propre commun à A et B donc une matrice inversible Q (dont la première colonne contient les coordonnées de ce vecteur propre commun) telle que $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ et $Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \beta & * \\ 0 & B' \end{pmatrix}$. Or, par calcul par blocs, on a $A'B' \in \mathrm{Vect}(A',B')$ donc il existe $P' \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ et T'_A, T'_B de taille $n-1$ et triangulaires supérieures telles que $A' = P'T'_AP'^{-1}$ et $B' = P'T'_BP'^{-1}$. En posant $P = Q\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & P' \end{pmatrix}$, $T_A = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & T'_A \end{pmatrix}$ et $T_B = \begin{pmatrix} \beta & * \\ 0 & T'_B \end{pmatrix}$, on a bien $P \in GL_n(\mathbb{C})$, T_A et T_B triangulaire supérieure et $A = PT_AP^{-1}$ et $B = PT_BP^{-1}$. L'hérédité est établie et la conclusion suit.

6.284 On suppose que la taille de ces matrices est n. Dans le calcul de $D(t) = \det(M + tJ)$ où J est la matrice ne comportant que des 1, on effectue les opérations de GAUSS $C_k \longleftarrow C_k - C_1$ pour $k \in [\![2;n]\!]$ et les t disparaissent de toutes les cases sauf sur la première colonne. Ensuite, on développe le déterminant selon la première colonne et on obtient $D(t) = (a+t)\Delta_{1,1} + \sum\limits_{2=1}^{n}(-1)^{i+1}(b+t)\Delta_{i,1}$ où les $\Delta_{i,1}$ sont les mineurs associés aux cases $(i,1)$ qui sont des constantes (relativement à t) d'après ce qui précède. Ainsi, la formule précédente montre que le degré du polynôme D est inférieur ou égal à 1.

Or on a $D(-b) = \det(M - bJ) = \prod\limits_{k=1}^{n}(a-b) = (a-b)^n$ car $M - bJ$ est triangulaire inférieure avec des $a-b$ sur la diagonale. De même, $D(-c) = (a-c)^n$. On connaît deux valeurs (puisque $b \neq c$) du polynôme D et comme $\deg(D) \leqslant 1$, D est donc le polynôme d'interpolation de LAGRANGE associé et sait qu'alors

$D(t) = D(-b)\dfrac{t+c}{-b+c} + D(-c)\dfrac{t+b}{-c+b} = \dfrac{(a-c)^n(t+b) - (a-b)^n(t+c)}{b-c}$.

On en déduit que $\det(M) = D(0) = \dfrac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$.

Or, si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-a & -c & \cdots & -c \\ -b & \lambda-a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -c \\ -b & \cdots & -b & \lambda-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'+t' & c'+t' & \cdots & c'+t' \\ b'+t' & a'+t' & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c'+t' \\ b'+t' & \cdots & b'+t' & a'+t' \end{vmatrix}$ avec $a' = \lambda - a$, $b' = -b$, $c' = -c$, $t' = 0$. Ainsi $\chi_M(\lambda) = D(0) = \dfrac{b'(a'-c')^n - c'(a'-b')^n}{b'-c'} = \dfrac{c(\lambda-a+b)^n - b(\lambda-a+c)^n}{c-b}$.

D'abord $\lambda = a - c$ n'est pas valeur propre de M car $\chi_M(a-c) = -c(b-c)^{n-1}$.
Comme $c \neq 0$, pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{a-c\}$, on a l'équivalence :
$\chi_M(\lambda) = 0 \iff \left(\dfrac{\lambda-a+b}{\lambda-a+c}\right)^n = \dfrac{b}{c} = \rho e^{i\theta} \iff \exists k \in [\![0; n-1]\!],\ \dfrac{\lambda-a+b}{\lambda-a+c} = \rho^{1/n} e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}} = z_k$.

Ainsi $\chi_M(\lambda) = 0 \iff \exists k \in [\![0; n-1]\!],\ \dfrac{\lambda-a+b}{\lambda-a+c} = z_k \iff \exists k \in [\![0; n-1]\!],\ \lambda = \dfrac{a-b-(a-c)z_k}{1-z_k} = \lambda_k$ (on a bien $z_k \neq 1$ car $b \neq c$). L'application $\varphi : z \mapsto \dfrac{a-b-(a-c)z}{1-z}$ est injective sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ car $\dfrac{a-b-(a-c)z}{1-z} = \dfrac{a-b-(a-c)z}{1-z} \iff (b-c)(z-z') = 0 \iff z = z'$.
Ainsi, puisque les z_k sont distincts deux à deux, les λ_k le sont aussi ce qui fait n valeurs propres complexes distinctes pour la matrice M qui est donc diagonalisable.

6.285 Soit E de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - 1$ par le théorème du rang.

• Si la droite $\mathrm{Im}\,(u)$ n'est pas incluse dans $\mathrm{Ker}(u)$, soit $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et soit $e_n \neq 0_E$ tel que $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}(e_n)$; $u(e_n) \in \mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}(e_n)$ donc il existe $\lambda_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $u(e_n) = \lambda_n e_n$. La base $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de u, $\mathrm{Tr}\,(u) = \lambda_n \neq 0$ et u est diagonalisable.
• Si $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, alors soit $e_{n-1} \neq 0_E$ tel que $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}(e_{n-1})$ et e_n un antécédent de e_{n-1} par u. On complète la famille libre (e_{n-1}) de $\mathrm{Ker}(u)$ en une base $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ de $\mathrm{Ker}(u)$. Comme $e_n \notin \mathrm{Ker}(u)$, $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et la matrice de u dans cette base est $E_{n-1,n}$ donc $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$. De plus, $u^2 = 0$ car $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ donc u n'est pas diagonalisable car elle est nilpotente et non nulle (classique).
En considérant les deux cas : u de rang 1 est diagonalisable si seulement si u est de trace non nulle.

6.286 La linéarité provient de celle de la forme linéaire Φ et il est clair que si $x \in E$, alors $u(x) \in E$. Ainsi u est bien un endomorphisme de E. Soit $H = \mathrm{Ker}\,\Phi$, par le théorème du rang, comme $\mathrm{Im}\,\Phi = \mathbb{R}$ est de dimension 1 car Φ est une forme linéaire non nulle, $\dim H = \dim E - 1$ donc H est un hyperplan de H. Soit x un vecteur non nul de H (il en existe dès que $n = \dim E \geqslant 2$), alors $u(x) = x$ donc 1 est valeur propre de u.

Comme $x_0 \neq 0_E$, si $x \in E$, $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \iff \Phi(x)x_0 = 0 \iff x \in H$: $E_1(u)$ est de dimension $n-1$.
Si u est diagonalisable, u possède une autre valeur propre $\lambda \neq 1$, alors il existe un vecteur non nul x tel que $u(x) = x + \Phi(x)x_0 = \lambda x$ donc $x = \dfrac{\Phi(x)}{\lambda-1}x_0 \in \mathrm{Vect}(x_0)$ et x_0 est aussi vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. De plus, $u(x_0) = (1 + \Phi(x_0))x_0 = \lambda x_0$ donc $\Phi(x_0) \neq 0$ car $\lambda \neq 1$.
Réciproquement, si $\Phi(x_0) \neq 0$, comme $u(x_0) = (1 + \Phi(x_0))x_0$ on a $\dim(E_1(u)) = n - 1$ et $\dim(E_\lambda(u)) = 1$ en notant $\lambda = 1 + \Phi(x_0) \neq 1$ car $E_\lambda(u)$ contient la droite $\mathrm{Vect}(x_0)$ et est en somme directe avec H. Alors u est diagonalisable car $E = E_1(u) \oplus E_\lambda(u)$.
Au final : u est diagonalisable si et seulement $\Phi(x_0) \neq 0$.

6.287 La linéarité de Φ découle de celle de la fonction trace, et il est clair que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: ainsi Φ est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $M \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, $M+\mathrm{Tr}\,(M)I_n = 0 \Longrightarrow M = -\mathrm{Tr}\,(M)I_n$; $M = \lambda I_n$ si $\lambda = -\mathrm{Tr}\,(M)$. Or $\Phi(I_n) = (n+1)I_n \neq 0$ donc $\Phi(M) = \lambda(n+1)I_n = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow M = 0$. On a donc établi que $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$ donc Φ est injectif.

Comme on est en dimension finie, Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc rang $(\Phi) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = n^2$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\Phi^2(M) = \Phi\big(M + \mathrm{Tr}\,(M)I_n\big) = \Phi(M) + (n+1)\mathrm{Tr}\,(M)I_n$ or $\mathrm{Tr}\,(M)I_n = \Phi(M) - M$ donc $\Phi^2(M) = \Phi(M) + (n+1)(\Phi(M) - M) \Longleftrightarrow \Phi^2(M) - (n+2)\Phi(M) + (n+1)M = 0$.

Par conséquent, le polynôme $P = X^2 - (n+2)X + n + 1$ est annulateur de Φ.

Comme $P = (X-1)(X-n+1)$ est scindé à racines simples, Φ est diagonalisable. On a déjà vu que Φ était un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme $\Phi^2 - (n+2)\Phi = -(n+1)\mathrm{id}_E$ si $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on obtient $\Phi \circ \left(\dfrac{1}{n+1}\Big((n+2)\mathrm{id}_E - \Phi\Big)\right) = \left(\dfrac{1}{n+1}\Big((n+2)\mathrm{id}_E - \Phi\Big)\right) \circ \Phi = \mathrm{id}_E$ donc $\Phi^{-1} = \dfrac{1}{n+1}\Big((n+2)\mathrm{id}_E - \Phi\Big)$ ce qui s'écrit aussi $\Phi^{-1}(M) = \dfrac{1}{n+1}\Big((n+2)M - \Phi(M)\Big) = M - \dfrac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n+1}I_n$.

6.288 Par hypothèse, la matrice $B = P(A)$ est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Ainsi, si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A et $g = P(f)$, g admet n valeurs propres distinctes $\beta_1 < \cdots < \beta_n$ et les sous-espaces propres de g sont des droites $E_{\beta_k}(g) = \mathrm{Vect}(v_k)$; $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ est une base de vecteurs propres de g.

Comme $f \circ g = f \circ P(f) = P(f) \circ f) = g \circ f$, les $E_{\beta_k}(g)$ sont stables par f. Ainsi, pour $k \in [\![1;n]\!]$, il existe $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que $f(v_k)\alpha_k v_k$ car $f(v_k) \in E_{\beta_k}(g)$. La base $\mathcal{B}$ est donc aussi une base de vecteurs propres de f qui est donc diagonalisable.

6.289 Tout d'abord $N - I_n$ est clairement de rang 2 donc 1 est valeur propre de multiplicité géométrique $n-2$ et $E_1(N) = \mathrm{Vect}(e_2, \cdots, e_{n-1})$. Les deux dernières valeurs propres λ_1 et λ_2 (éventuellement complexes), vérifient $\mathrm{Tr}\,(N) = (n-2) \times 1 + \lambda_1 + \lambda_2 = n$ et $\mathrm{Tr}\,(N^2) = (n-2) \times 1^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = n+2$ (calculer N^2).

Ainsi : $\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2} = 0$. Ainsi λ_1 et λ_2 sont les racines de $X^2 - 2X + 0 = X(X-2)$ donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$ par exemple ; c'était clair avec les conditions $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ et $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 4$.

Il est aussi clair que le vecteur $v_0 = (1, 0, \cdots, 0, -1)$ est propre associé à la valeur propre 0.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $NX = 2X$, alors $x_1 + x_n = 2x_1$, $\forall k \in [\![2;n-1]\!]$, $x_1 + x_k + x_n = 2x_k$ et $x_1 + x_n = 2x_n$. On prend par exemple $x_1 = 1$ et on trouve $x_n = 1$ et $\forall k \in [\![2;n-1]\!]$, $x_k = 2$. Le vecteur $v_2 = (1, 2, \cdots, 2, 1)$ est propre associé à la valeur propre 2. $E_0(N) = \mathrm{Vect}(v_0)$, $E_2(N) = \mathrm{Vect}(v_2)$: N est diagonalisable.

6.290 Si $M \in GL_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in GL_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$, on a alors $M^2 = PD^2P^{-1}$ avec D^2 diagonale donc M^2 est diagonalisable.

Réciproquement, si M^2 est diagonalisable avec $M \in GL_n(\mathbb{C})$ alors M^2 admet un polynôme annulateur scindé à racines simples (on le prend unitaire) $P = \prod\limits_{k=1}^{r}(X - \alpha_k)$ avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ distincts deux à deux. Ainsi $P(M^2) = 0 \Longleftrightarrow \prod\limits_{k=1}^{r}(M^2 - \alpha_k I_n) = 0$. En notant δ_k une racine carrée complexe de α_k, on a donc $\prod\limits_{k=1}^{r}(M - \delta_k I_n)(M + \delta_k I_n) = 0$ donc le polynôme $Q = \prod\limits_{k=1}^{r}(X - \delta_k)(X + \delta_k)$ est annulateur de M et scindé à racines simples car $\delta_k \neq 0$ et $\alpha_i \neq \alpha_j \Longrightarrow \delta_i \neq \pm\delta_j$ si $i \neq j$. On en déduit que M est diagonalisable.

Ainsi, pour $M \in GL_n(\mathbb{C})$, M est diagonalisable si et seulement si M^2 l'est.

Non : soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice M n'est pas diagonalisable car M est nilpotente et pas nulle (raisonnement classique) et $M^2 = 0$ donc la matrice M^2 est diagonalisable.

$\boxed{\textbf{6.291}}$ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors il existe un vecteur non nul x tel que $f(x) = \lambda x$. Il vient alors $f^2(x) = \lambda^2 x$, $f^3(x) = \lambda^3 x$ et $f^4(x) = \lambda^4 x$. Comme $f^4 = f^2$, on a $\lambda^4 x = \lambda^2 x \Longleftrightarrow (\lambda^4 - \lambda^2)x = 0$ mais comme $x \neq 0$, on a donc $\lambda^4 = \lambda^2 \Longrightarrow \lambda \in \{-1, 0, 1\}$. Par conséquent, on a bien $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 0, 1\}$.

Comme par hypothèse 1 et -1 sont des valeurs propres de f, on a $\dim(E_1(f)) \geqslant 1$ et $\dim(E_{-1}(f)) \geqslant 1$. Comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et que les sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes sont en somme directe, $E_{-1}(f) \oplus E_1(f)$ est au moins de dimension 2 et $E_{-1}(f) \oplus E_1(f) \subset E_{-1}(f) \oplus E_0(f) \oplus E_1(f)$. On a donc $\dim(E_{-1}(f) \oplus E_0(f) \oplus E_1(f)) = \dim(E_{-1}1(f)) + \dim(E_0(f)) + \dim(E_1(f)) \in [\![2;3]\!]$.

• Si f est un automorphisme, alors $f^2 \circ (f^2 - \mathrm{id}\,) = 0$ implique $f^2 = \mathrm{id}$ donc f est une symétrie, $X^2 - 1$ est annulateur de f et scindé à racines simples donc f est diagonalisable.

• Sinon, par l'encadrement précédent, $1 \leqslant \dim(E_0(f)) \leqslant 1$ et $\dim(E_{-1}(f)) = \dim(E_0(f)) = \dim(E_1(f)) = 1$, f a trois valeurs propres simples donc f est diagonalisable car $E_{-1}(f) \oplus E_0(f) \oplus E_1(f) = \mathbb{R}^3$. Son polynôme caractéristique est forcément $\chi_f = (X+1)(X-0)(X-1) = X^3 - X$ donc $f^3 = f$.

Toujours est-il que f est diagonalisable dans les deux cas.

$\boxed{\textbf{6.292}}$ Si $f \in E$, il est clair que $\Phi(f) \in E$. Par la linéarité de la dérivation, Φ est un endomorphisme de E.

Les solutions de (E) : $\Phi(y) = y' - xy = \lambda y$ sont les $y : x \mapsto \alpha e^{\lambda x + \frac{x^2}{2}}$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) donc le spectre de Φ est $\mathbb{R}$ et tous les sous-espaces propres $E_\lambda(\Phi)$ sont des droites engendrées par les fonctions $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x + \frac{x^2}{2}}$.

Soit $y \in E$, alors $y \in \mathrm{Ker}(\Phi^2) \Longleftrightarrow \Phi(y) \in \mathrm{Ker}(\Phi) \Longleftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) - xy(x) = \alpha e^{\frac{x^2}{2}})$.

On résout (F) : $y' - xy = \alpha e^{\frac{x^2}{2}}$ par variation de la constante et on trouve $y : x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{\frac{x^2}{2}}$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\Phi^2)$ est un plan engendré par les fonctions clairement indépendantes $f_1 : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$ et $f_2 : x \mapsto xe^{\frac{x^2}{2}}$.

$\boxed{\textbf{6.293}}$ A est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral. -2 est clairement valeur propre et rang $(A + 2I_3) = 1$ donc $E_{-2}(A)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$ donc une base orthonormée de $E_{-2}(A)$ est par exemple (v_1, v_2) avec $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Le vecteur $w_3 = (1, 1, 1)$ est normal à ce plan donc forcément vecteur propre d'après le théorème spectral et $Aw_3 = w_3$ donc une base orthonormale de vecteurs propres de A est $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Soit $X_n \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tX_n = (u_n\ v_n\ w_n)$, alors on a par hypothèse $X_{n+1} = AX_n$ or $A = PD{}^tP$ avec P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et D la matrice diagonale $\mathrm{diag}(-2, -2, 1)$. Par une récurrence facile, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$ et $A^n = PD^n{}^tP$. Si on pose $Y_n = {}^tPX_n$, on a $Y_n = D^n Y_0$ et l'équivalence $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Par conséquent, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les deux premières composantes de Y_0 sont nulles (à cause des $(-2)^n$ de D^n). Avec la valeur de P : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Longleftrightarrow u_0 - w_0 = u_0 - 2v_0 + w_0 = 0 \Longleftrightarrow u_0 = v_0 = w_0$ (les suites sont constantes).

$\boxed{\textbf{6.294}}$ On calcule facilement $\chi_M(X) = (X-1)\left[(X-1)^2 - z\right]$.

• Si $z = 0$, alors 1 est la seule valeur propre de M (d'ordre 3), donc M est diagonalisable si et seulement si $E_1(M)$ est de dimension 3 c'est-à-dire si $M = I_3$ ce qui est faux. Dans ce cas, M n'est pas diagonalisable.

• Si $z \neq 0$, soit $\delta \neq 0$ une de ses racines carrées, alors le spectre de M est $\{1, 1+\delta, 1-\delta\}$ et M possède trois valeurs propres simples donc M est diagonalisable.

• Si $z = 0$, on a $M = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. N^2 est la matrice nulle donc $\forall n \geqslant 2,\ N^n = 0$. Comme I_3 et N commutent, on a $M^n = (I_3 + N)^n = I_3 + nN$.

• Si $z = e^{i\theta}$, alors d'après ce qui précède : $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 1+\delta, 1-\delta\}$ avec $\delta = e^{\frac{i\theta}{2}}$.

6.295 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, alors $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est de classe C^1 : c'est la primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi $T(f)$ est de classe C^1 (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par les taux d'accroissements, $\lim\limits_{x \to 0^+} T(f)(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = F'(0) = f(0)$ donc $T(f)$ est aussi continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et T est bien l'endomorphisme espéré car la linéarité provient de celle de l'intégrale.
T ne peut pas être surjectif car l'image de T est incluse dans l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ mais de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ qui ne sont pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $f \in \mathrm{Ker}(T)$, alors $\forall x > 0, T(f)(x) = 0 \Longrightarrow F(x) = 0$. La primitive F de f s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+$ par continuité en 0. Mais comme $F' = f$, on en déduit que $f = 0$. Ainsi T est injective car $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $u(f) = \lambda f$ avec $f \in E$ non nulle. Comme vu précédemment, 0 n'est pas valeur propre de T. En dérivant la relation $u(f) = \lambda f$ ou encore $F(x) = \lambda x f(x)$, on obtient $f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x)$ donc f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation (E) : $\lambda x y' + (\lambda - 1)y = 0$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ f(x) = \alpha x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ et la continuité de f en 0 impose (pour $\alpha \neq 0$) $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geqslant 0$ donc $\lambda \in]0;1]$. Réciproquement, soit $\lambda \in]0;1]$ et $f_\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x > 0,\ f_\lambda(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ et $f_\lambda(0) = 0$ si $\lambda < 1$ et $f_1(0) = 1$. Alors f_λ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, en posant $\beta = \dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geqslant 0$, on a $\forall x > 0,\ T(f_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f_\lambda(t)dt = \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{t^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_0^x = \dfrac{x^\beta}{\beta+1} = \lambda f_\lambda(x)$. Il vient donc $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ (ça marche même en 0). Ainsi : $\mathrm{Sp}(T) =]0;1]$.

6.296 u est bien linéaire par linéarité de la dérivée donc $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de u, alors il existe un polynôme P non nul tel que $u(P) = \lambda P$. Posons $n \geqslant 0$ le degré de P et $\alpha \neq 0$ le coefficient dominant de P, alors $P = \alpha X^n + \cdots$ donc $P' = n\alpha X^{n-1} + \cdots$ et $u(P) = (X-a)P' = \alpha n X^n + \cdots$. En identifiant les deux polynômes $u(P)$ et λP sur leurs termes en X^n, on trouve que $\alpha n = \lambda \alpha$ donc $\lambda = n$ car $\alpha \neq 0$.

Réciproquement, $\lambda \in \mathbb{N}$ est bien valeur propre de u car $u((X-a))^n) = (X-a)\big[n(X-a)^{n-1}\big] = n(X-a)^n$ et $(X-a)^n \neq 0$. De plus, si $u(P) = nP$, $\forall x \in \mathbb{R}, (x-a)P'(x) - nP(x) = 0$ donc P est solution de $(x-a)y' + ny = 0$ qu'on résout sur $I_1 =]-\infty; a[$ et $I_2 =]a; +\infty[$ en trouvant $y(x) = \alpha_k(x-a)^n$ sur I_k ; mais par unicité du coefficient dominant, on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \alpha(x-a)^n$ (même en $x = a$ par continuité notamment). Les deux polynômes P et $\alpha(X-a)^n$ coïncident sur $\mathbb{R}$ donc $P = \alpha(X-a)^n$.
Par conséquent le spectre de u est $\mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ E_n(u) = \mathrm{Vect}((X-a)^n)$ est une droite.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ divisible par sa dérivée, alors par définition il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QP'$. Si P est constant, alors $P' = 0$ donc $P = 0$ qui convient. Sinon, en comparant les degrés, comme $\deg(P') = \deg(P) - 1$, on a $\deg(Q) = 1$ et on peut donc écrire $P = \lambda(X-a)P'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. En notant $n \geqslant 1$ le degré de P, en comparant les coefficients dominants dans $P = \lambda(X-a)P'$: $\lambda = \dfrac{1}{n}$. Ainsi $(X-a)P' = nP = u(P)$ avec les notations précédentes : $P \in \mathrm{Vect}((X-a)^n)$ et un polynôme $\alpha(X-a)^n$ est bien divisible par sa dérivée.

Les polynômes divisibles par leur dérivée sont $P = 0$ ou les $P = \alpha(X-a)^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$.

6.297 Si A est de rang 1 donc non nulle, il existe une colonne non nulle de A, par exemple la première qu'on appelle U. Comme les autres colonnes de A sont proportionnelles à U, il existe des scalaires $v_2, \cdots, v_n$ tels que $\forall k \in [\![2;n]\!]$, $C_k = v_k U$. Si V est la matrice colonne telle que ${}^tV = (1\, v_2 \, \cdots \, v_n)$, on a $A = U\,{}^tV$.
Or ${}^tVU \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Tr}\ ({}^tVU) = \mathrm{Tr}\ (U\,{}^tV) = \mathrm{Tr}\ (A)$ donc $A^2 = U\,{}^tVU\,{}^tV = U({}^tVU)\,{}^tV = \mathrm{Tr}\ (A)U\,{}^tV = \mathrm{Tr}\ (A)A$.
Ainsi le polynôme $P = X^2 - \mathrm{Tr}\ (A)X$ est annulateur de A.

Si $\mathrm{Tr}\ (A) \neq 0$, P est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.
Si $\mathrm{Tr}\ (A) = 0$, $A^2 = 0$ donc 0 est la seule valeur propre possible de A (valable pour toute matrice nilpotente), si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc serait nulle. Ainsi A n'est pas DZ.
On en déduit que A est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

P est annulateur de A et de degré 2, si $n \geqslant 2$ et si P n'était pas minimal, on aurait $Q = X - \lambda$ annulateur de A donc $A = \lambda I_n$ ce qui est faux car $\mathrm{rang}\,(A) = 1$.
Donc P est le polynôme minimal si $n \geqslant 2$. Si $n = 1$, alors $A = (a)$ et $X - a$ est le polynôme minimal de A.

6.298 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, comme $B^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$, il vient $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$ de sorte que $P(B) = 0 \iff P(A) = 0$. Or une matrice est diagonalisable si et seulement s'il en existe un polynôme annulateur scindé à racines simples. On conclut alors que B est diagonalisable si et seulement si A l'est.

6.299 Comme N est triangulaire supérieure, on a $\chi_N = (X+1)^2(X-1)$ donc $\mathrm{Sp}(N) = \{-1, 1\}$. Ainsi, N est diagonalisable si et seulement si $(N + I_3)(N - I_3) = N^2 - I_3 = 0$. Or $N^2 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2x & xz \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc N diagonalisable si et seulement si $x = 0$. Traitons donc deux cas :

<u>$x = 0$</u> Alors N est semblable à $D = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il existe donc une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. On pose $B' = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} U & V \\ W & z \end{pmatrix}$ (même taille de blocs que D) de sorte que $B = PB'P^{-1}$ et que la condition $B^2 = N$ soit équivalente à la condition $B'^2 = D$.

Analyse : si $B^2 = N$, on a $B'^2 = D$ donc $B'D = B'^3 = DB'$ donc B' et D commutent. Qu'on fasse un calcul par blocs ou qu'on se souvienne que B' et D commutent si et seulement si les sous-espaces propres de D (qui est diagonalisable) sont stables par B', on trouve que $B' = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$. Ainsi, $B = P\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $U^2 = -I_2$ et $z^2 = 1$.

Synthèse : Si on pose $B = P\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $U^2 = -I_2$ et $z^2 = 1$, alors $B^2 = P\begin{pmatrix} U^2 & 0 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix}P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

En conclusion, les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = N$ avec $x = 0$ sont exactement les matrices $B = P\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $U^2 = -I_2$ et $z^2 = 1$. On peut préciser ce que valent les matrices $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $U^2 = -I_2$, si u est canoniquement associé à U et $x \in \mathbb{R}^2$ non nul, alors $\mathcal{B} = (x, u(x))$ est clairement une base de $\mathbb{R}^2$ car, comme $\chi_U = X^2 + 1$ n'admet pas de racine réelle, u n'admet pas de valeur propre donc $u(x)$ et x ne sont pas colinéaire. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrices $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $U^2 = -I_2$ sont exactement les matrices semblables à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$x \neq 0$ Méthode 1 : $E_{-1}(N)$ est une droite car N est non diagonalisable et on a $E_{-1}(N) = \text{Vect}(e_1)$. Si $B^2 = N$, on a encore $BN = B^3 = NB$ donc la droite $E_{-1}(N)$ est stable par B, ainsi $Be_1 = \beta e_1$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\beta^2 e_1 = B^2 e_1 = Ne_1 = -e_1$ donc $\beta^2 = -1$ ce qui est impossible.
Méthode 2 : soit λ une valeur propre complexe de B, alors il existe un vecteur colonne complexe X non nul tel que $BX = \lambda X$ donc $B^2X = \lambda^2 X = NX$ donc λ^2 est une valeur propre de N d'où $\lambda^2 = \pm 1$. Ainsi, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) \subset \{1, -1, i, -i\}$. Comme B est réelle et de taille 3, elle admet une valeur propre réelle donc ± 1. Comme B est réelle, si i (resp. $-i$) est valeur propre de B, alors $-i$ (resp. i) l'est aussi avec le même ordre. Si B n'avait que des valeurs propres réelles alors, comme B est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, la matrice B^2 aurait comme seule valeur propre 1 ce qui est faux. Tout ceci justifie que $\chi_B = (X-i)(X+i)(X-1) = (X^2+1)(X-1)$ ou $\chi_B = (X-i)(X+i)(X+1) = (X^2+1)(X+1)$. Ainsi, comme χ_B est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $B^2 = N$ le serait aussi dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ce qui est aussi faux d'après ce qui précède. On peut donc conclure que si $x \neq 0$, il n'existe aucune matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = N$.

Par conséquent, il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = N$ si et seulement si $x = 0$.

6.300 **a.** • Si A est inversible, on a $BA = A^{-1}(AB)A$ donc BA et AB sont semblables donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
• Si A n'est pas inversible, 0 est racine de χ_A et en notant $\alpha = \text{Min}\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A),\ \lambda \neq 0\} > 0$, on a pour tout entier p assez grand (tel que $\frac{1}{p} < \alpha$) $A_p = A - \frac{1}{p} I_n \in GL_n(\mathbb{C})$. Par le premier cas : $\chi_{A_pB} = \chi_{BA_p}$.
Il reste à passer à la limite en constatant que, clairement $\lim_{p\to+\infty} A_p = A$, que les applications $M \mapsto MB$ et $M \mapsto BM$ sont continues car linéaires en dimension finie donc $\lim_{p\to+\infty} A_pB = AB$ et $\lim_{p\to+\infty} BA_p = BA$, que le déterminant est une application continue donc, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé et par caractérisation séquentielle de la continuité : $\lim_{p\to+\infty} \det(A_pB - \lambda I_n) = \det(AB - \lambda I_n)$ et $\lim_{p\to+\infty} \det(BA_p - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$. De tout ceci on déduit que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$ donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ et ces deux matrices ont mêmes valeurs propres.
Ou alors, pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, si $M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix}$, on a $MN = \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ B & \lambda I_n - BA \end{pmatrix}$ et $NM = \begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & 0 \\ \lambda B & \lambda I_n \end{pmatrix}$ donc, comme $\det(MN) = \det(NM) = \det(N)\det(M)$, on obtient la relation $\lambda^n \chi_{BA}(\lambda) = \lambda^n \chi_{AB}(\lambda) \iff \chi_{BA}(\lambda) = \chi_{AB}(\lambda)$. Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

b. Soit $x \in E_\lambda$, alors $f \circ g(x) = \lambda x$ qu'on compose par g : $(g \circ f)(g(x)) = \lambda g(x)$ donc $g(x) \in F_\lambda$. On vient de montrer que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$. De même, bien sûr, on a aussi $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$.
Si $\lambda \neq 0$, la restriction $\tilde{f} : F_\lambda \to E_\lambda$ de f est injective car si $x \in \text{Ker}(\tilde{f})$, on a $g \circ f(x) = \lambda x$ par définition de F_λ mais aussi $f(x) = 0$ donc $\lambda x = 0_E$ ce qui donne $x = 0_E$ car $\lambda \neq 0$. Cette injectivité montre que $\dim(f(F_\lambda)) = \dim(F_\lambda) \leqslant \dim(E_\lambda)$. Mais on déduit aussi $\dim(g(E_\lambda)) = \dim(E_\lambda) \leqslant \dim(F_\lambda)$ de l'injectivité de $\tilde{g} : E_\lambda \to F_\lambda$ qui est la restriction de g à E_λ. Au final, et si $\lambda \neq 0$, on a bien $\dim(E_\lambda) = \dim(F_\lambda)$.

c. Si $\text{rang}\,(f \circ g) = \text{rang}\,(g \circ f)$, par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(f \circ g)) = \dim(\text{Ker}(g \circ f)) = \dim(E_0) = \dim(F_0)$. Comme on vient de voir que $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA) = S$ et que $\forall \lambda \in S,\ \dim(E_\lambda) = \dim(F_\lambda)$ (que λ soit nul ou pas), la diagonalisabilité de $f \circ g$ se traduit par $E = \bigoplus_{\lambda \in S} E_\lambda$ donc $\dim(E) = \sum_{\lambda \in S} \dim(E_\lambda) = \sum_{\lambda \in S} \dim(F_\lambda)$. Comme ces sous-espaces propres sont en somme directe, $E = \bigoplus_{\lambda \in S} F_\lambda$ donc $g \circ f$ est aussi diagonalisable.

d. Il suffit de prendre $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1}$, alors $XY = 0$ diagonalisable alors que $YX = E_{1,2} = X$ est nilpotente d'indice 2 et non nulle donc non diagonalisable.

6.301 Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - A & -I_n \\ -I_n & \lambda I_n \end{vmatrix}$ et on effectue (par blocs) l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + \lambda^{-1} C_2$ qui ne modifie pas le déterminant : $\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda - \lambda^{-1})I_n - A & -I_n \\ 0 & \lambda I_n \end{vmatrix} = \lambda^n \chi_A\Big(\lambda - \dfrac{1}{\lambda}\Big)$. Ainsi, les polynômes χ_B et $X^n \chi_A\Big(X - \dfrac{1}{X}\Big)$ coïncident en une infinité de valeurs donc $\chi_B = X^n \chi_A\Big(X - \dfrac{1}{X}\Big)$.

Si A est diagonalisable, $\chi_A = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$ avec $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ de cardinal r et $\dim(E_{\lambda_k}(A)) = m_k$.

D'après ce qui précède, $\chi_B = \prod\limits_{k=1}^{r} (X^2 - \lambda_k X - 1)^{m_k} = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}(X - \beta_k)^{m_k}$ où $\alpha_k = \dfrac{\lambda_k - \sqrt{\lambda_k^2 + 4}}{2}$ et $\beta_k = \dfrac{\lambda_k + \sqrt{\lambda_k^2 + 4}}{2}$. Comme $\sqrt{\lambda_k^2 + 4} > |\lambda_k|$, on a $\alpha_k < 0 < \beta_k$ pour tout entier $k \in [\![1; r]\!]$.

Les applications $A : t \mapsto \dfrac{t - \sqrt{t^2 + 4}}{2} = \dfrac{-2}{t + \sqrt{t^2 + 4}}$ et $B : t \mapsto \dfrac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{t^2 + 4} - t}$ sont respectivement bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_-^*$ et de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ car $A'(t) = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 4}}\Big) = \dfrac{\sqrt{t^2 + 4} - t}{2\sqrt{t^2 + 4}} > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} A(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to -\infty} A(t) = -\infty$ et $B'(t) = \dfrac{1}{2}\Big(1 + \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 4}}\Big) = \dfrac{\sqrt{t^2 + 4} + t}{2\sqrt{t^2 + 4}} > 0$ avec les limites $\lim\limits_{t \to +\infty} B(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to -\infty} B(t) = 0$. Ainsi, les valeurs $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_r$ sont distinctes deux à deux.

Soit $k \in [\![1; r]\!]$, en écrivant $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, on a $BX = \alpha_k X \iff \big(AX_1 + X_2 = \alpha_k X_1$ et $X_1 = \alpha_k X_2\big)$. On résout le système et on trouve $AX_2 = \Big(\alpha_k - \dfrac{1}{\alpha_k}\Big)X_2 = \lambda_k X_1$ (car $\alpha_k^2 - \lambda_k \alpha_k - 1 = 0$) ainsi on peut décrire le sous-espace propre par $E_{\alpha_k}(B) = \{(\alpha_k X, X) \mid X \in E_{\lambda_k}(A)\}$ et $X \mapsto (\alpha_k X, X)$ est un isomorphisme de $E_{\lambda_k}(A)$ dans $E_{\alpha_k}(B)$ donc $\dim(E_{\alpha_k}(B)) = m_k$. On montre de même que $\forall k \in [\![1; r]\!]$, $\dim(E_{\beta_k}(B)) = m_k$.

Par conséquent : $\sum\limits_{k=1}^{r} \dim(E_{\alpha_k}(B)) + \sum\limits_{k=1}^{r} \dim(E_{\beta_k}(B)) = 2 \sum\limits_{k=1}^{r} m_k = 2n = \dim(\mathbb{R}^{2n})$ et B est diagonalisable.

6.302 Considérons plusieurs cas :

- Si $\chi_A = (X - a)(X - b)$ est scindé à racines simples alors A est semblable à $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et il existe P inversible telle que $A = PDP^{-1}$. En notant $D' = P^{-1}BP$, $AB = BA \iff DD' = D'D$ et, par calcul direct, D' commutant avec D est forcément diagonale donc $D' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}$. Soit Q le polynôme d'interpolation tel que $Q(a) = a'$ et $Q(b) = b'$. Par construction $Q(D) = D'$ donc $Q(A) = PQ(D)P^{-1} = PD'P^{-1} = B$.
- Si $\chi_A = (X - a)^2$, comme on travaille dans $\mathbb{C}$, on sait que A est trigonalisable donc il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0 & a \end{pmatrix} = T = aI_2 + \alpha J$. En notant $T' = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on a l'équivalence $AB = BA \iff TT' = T'T$. Considérons deux cas :
  - Si A est diagonalisable, alors $A = aI_2$ et $A = P(B)$ où $P = a$ est constant.
  - Si A n'est pas diagonalisable, alors $\alpha \neq 0$ et $TT' = T'T \iff (t - x = z = 0) \iff T' = xI_2 + yJ$. Dans ces conditions, en résolvant l'équation $T' = a_0 I_2 + a_1 T$, on trouve $a_1 = \dfrac{y}{\alpha}$ et $a_0 = x - \dfrac{ya}{\alpha}$. En posant $Q = a_0 + a_1 X$, on a bien $Q(T) = T'$ donc $Q(A) = B$.

Si les matrices sont complexes de taille 3, on n'a plus le même résultat car les matrices $A = E_{1,1}$ et $B = E_{2,3}$ commutent et vérifient $AB = BA = 0$ alors que :

- B ne peut pas être un polynôme en A puisque A est diagonale et B ne l'est pas.

• A ne peut pas être un polynôme en B puisque B est nilpotente d'indice 2 et que $a_0I_2 + a_1B \neq A$ pour tout couple $(a_0, a_1) \in \mathbb{C}^2$.

Si les matrices sont réelles de taille 2 et vérifient $AB = BA$ alors en les considérant comme des matrices complexes, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(B)$ ou $B = P(A)$. Si par exemple $A = P(B)$, en écrivant $P = U + iV$ avec $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$, on a $A - U(B) = iV(B)$ alors que $A - U(B)$ est réelle et $iV(B)$ imaginaire pure ; ainsi $A = U(B)$ et le résultat persiste donc pour des matrices réelles de taille 2.

6.303 Si $f \in E$, on a clairement $x \mapsto xf'(x)$ qui est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc $D(f) \in E$ et D est clairement linéaire : D est bien un endomorphisme de E.

Si $f \in \mathrm{Ker}(D)$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) = 0$ donc, par continuité de f' : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, f est constante. Ainsi $\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Vect}(1)$ (fonctions constantes) donc $0 \in \mathrm{Sp}(D)$.

Si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de D et $f \in \mathrm{Ker}(D - \lambda \mathrm{id}_E)$ avec $f \neq 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) = \lambda f(x)$.

On résout cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x > 0,\ f(x) = \alpha x^\lambda$ et $\forall x < 0,\ f(x) = \beta(-x)^\lambda$. De plus $f(0) = 0$. Comme f est continue en 0 et que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on a $\lambda > 0$. De plus, $\forall x > 0,\ f'(x) = \alpha\lambda x^{\lambda-1}$ et $\forall x < 0,\ f'(x) = -\beta\lambda(-x)^{\lambda-1}$. Comme f' est aussi continue, on a $\lambda = 0$ (non) ou $\lambda > 1$. On continue à dériver et $\forall x > 0,\ f''(x) = \alpha\lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-1}$ et $\forall x < 0,\ f''(x) = \beta\lambda(\lambda - 1)(-x)^{\lambda-1}$ donc, comme f'' est continue en 0, on a $\lambda(\lambda - 1) = 0$ (c'est-à-dire $\lambda = 1$) ou $\lambda - 1 > 0$. Par récurrence, en se servant de la continuité de $f^{(n)}$ en 0, si $\lambda \notin \mathbb{N}$, on parvient à $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda > n$ ce qui est impossible. On vient d'établir que $\mathrm{Sp}(D) \subset \mathbb{N}$. Réciproquement, si $\lambda = n \in \mathbb{N}^*$, en posant $f_n : x \mapsto x^n$, on a $f_n \in E$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ D(f_n)(x) = xf_n'(x) = nx^n = nf_n(x)$ donc $n \in \mathrm{Sp}(D)$ car $f_n \neq 0$. Ainsi : $\mathrm{Sp}(D) = \mathbb{N}$.

6.304 La relation $P(u) = \sum\limits_{k=1}^{p} P(\lambda_k)v_k$ est vraie par hypothèse pour tous les monômes X^n. Par linéarité, elle est donc vraie pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ qui s'écrit $P = \sum\limits_{n=0}^{d} a_nX^n$; ce qu'on peut vérifier directement (en inversant la somme double) $P(u) = \sum\limits_{n=0}^{d} a_nu^n = \sum\limits_{n=0}^{d} a_n \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i^n v_i = \sum\limits_{i=1}^{p} \Big(\sum\limits_{n=0}^{d} a_n\lambda_i^n \Big) v_i = \sum\limits_{i=1}^{p} P(\lambda_i)v_i$.

Soit $P = \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$. On a clairement $\forall k \in [\![1; p]\!],\ P(\lambda_k) = 0$ donc $P(u) = 0$ d'après ce qui précède. Comme P est un polynôme annulateur scindé à racines simples de u, on en déduit que u est diagonalisable.

Classique polynômes de LAGRANGE, il suffit de prendre $L_j = \prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p} \Big(\dfrac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}\Big)$. On a bien vérifié les conditions $L_j \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ et $L_j(\lambda_i) = \delta_{i,j}$. Or si $\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_kL_k = 0$, en évaluant ceci en λ_j, on trouve $\alpha_j = 0$ ce qui prouve que la famille $(L_1, \ldots, L_p)$ est libre à p vecteurs dans un espace de dimension p : c'est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Comme $P = \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$ est annulateur de u, on sait d'après le cours que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$.

Si, pour $j \in [\![1; p]\!]$, on avait $\lambda_j \notin \mathrm{Sp}(u)$, alors le spectre de u serait inclus dans l'ensemble des racines de L_j donc $\prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ diviserait L_j. Mais puisque u est diagonalisable, $\prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u donc on aurait $L_j(u) = 0$. Or, avec ce qui précède , on a $L_j(u) = v_j \neq 0$ ce qui clôt le raisonnement par l'absurde. Par conséquent : $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$.

6.305 Par linéarité de la trace, ϕ est bien linéaire et associe bien une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: ϕ est donc bien un endomorphisme de l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n^2.

• Si $A = 0$, $\phi = \mathrm{id}_E$: c'est réduit !

• Si $n = 1$, $A = (a)$ donc $\phi(M) = (1 + a^2)M$ et ϕ est l'homothétie de rapport $1 + a^2$: réduite aussi.

• Si $A \neq 0$ et $n \geqslant 2$, soit $\theta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ définie par $\theta(M) = \mathrm{Tr}\,(AM)$. θ est une forme linéaire et si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $\theta(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}\,(AE_{i,j}) = a_{j,i}$ (faire le calcul) donc $\theta \neq 0$ car $A \neq 0$.
De plus, $\phi(M) = M \Longleftrightarrow \theta(M)A = 0 \Longleftrightarrow \theta(M) = 0$ donc $E_1(\phi)$ est l'hyperplan $\mathrm{Ker}(\theta) = E_1(\phi)$.
Or $\phi(A) = (1 + \mathrm{Tr}\,(A^2))A$. On considère alors deux cas :

• Si $\mathrm{Tr}\,(A^2) \neq 0$, alors $1 + \mathrm{Tr}\,(A^2) \in \mathrm{Sp}(\phi)$ et $\mathrm{Sp}(\phi) = \{1, 1 + \mathrm{Tr}\,(A^2)\}$. ϕ est diagonalisable et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}(\theta) \oplus \mathrm{Vect}(A)$. On trouve $\mathrm{Tr}\,(\phi) = 1 \times (n^2 - 1) + (1 + \mathrm{Tr}\,(A^2) \times 1 = n^2 + \mathrm{Tr}\,(A^2)$.

• Si $\mathrm{Tr}\,(A^2) = 0$, alors $A \in \mathrm{Ker}(\theta)$. Soit une base $\mathcal{B} = (M_1, \cdots, M_{n^2-1}, M_n)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $(M_1, \cdots, M_{n^2-1})$ soit une base de $\mathrm{Ker}(\theta)$ et M_n vérifie $\mathrm{Tr}\,(AM_n) \neq 0$. Alors la matrice B de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure, $B = \begin{pmatrix} I_{n^2-1} & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ car $\phi(M_n) = M_n + \theta(M_n)A$ et que $A \in \mathrm{Ker}(\theta)$. ϕ n'est pas diagonalisable car 1 est sa seule valeur propre (diagonale de B) or $E_1(\phi) = \mathrm{Ker}(\theta) \neq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Au final, ϕ est diagonalisable si et seulement si $(n = 1)$ ou $(A = 0)$ ou $(\mathrm{Tr}\,(A^2) \neq 0)$.

6.306 On sait que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u)$. Notons u_k le projecteur spectral associé : c'est-à-dire la projection sur $E_{\lambda_k}(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{p} E_{\lambda_i(u)}$. Alors, pour un vecteur $x \in E$, posons $x_k = u_k(x)$ de sorte que $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$. Comme $x_k \in E_{\lambda_k}(u)$, on a $u(x_k) = \lambda_k x_k$ puis, pour tout entier n, on a $u^n(x_k) = \lambda_k^n x_k$. Par linéarité de u, on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u^n(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n x_k$ ce qui justifie que $\forall n \in \mathbb{N},\ u^n = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n u_k$.
Soit $P = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, alors $P(u) = \sum_{n=0}^{d} a_n u^n = \sum_{n=0}^{d} a_n \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n u_k = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{n=0}^{d} a_n \lambda_k^n \Big) u_k = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) u_k$.
Pour $k \in [\![1;p]\!]$, soit $P_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{p} \dfrac{X - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i}$ (interpolation de Lagrange). Alors $\forall i \in [\![1;p]\!]\ P_k(\lambda_i) = \delta_{i,k}$ donc, si on utilise la relation précédente : $P_k(u) = \sum_{i=1}^{p} \delta_{i,k} u_i = u_k$.
Si les $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont distincts deux à deux, posons $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$, la relation supposée montrer que $P(u) = 0$ donc que P est un polynôme annulateur de u scindé à racines simples : u est donc diagonalisable.
Si les $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ne sont pas distincts deux à deux, on regroupe les u_i pour se ramener au cas précédent. Par exemple si $\lambda_p = \lambda_{p-1}$ et si ce sont les seuls qui sont égaux, alors on pose $v_i = u_i$ si $i \in [\![1;p-2]\!]$ et $v_p = u_{p-1} + u_p$ et on a $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(u) = \sum_{i=1}^{p-1} P(\lambda_i) v_i$.
Dans tous les cas, u est bien diagonalisable.

6.307 M est diagonale par blocs avec les blocs $A = (\,a\,)$, $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$. Par conséquent $\chi_M = (X-a)(X-b)^2(X-c)^3$. En écrivant $M = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$, si on se donne un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a facilement $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 & 0 \\ 0 & P(B) & 0 \\ 0 & 0 & P(C) \end{pmatrix}$ donc $P(M) = 0_6 \Longleftrightarrow (P(A) = 0_1,\ P(B) = 0_2,\ P(C) = 0_3)$.
Il est clair que $P(A) = (\,P(a)\,)$ donc $P(A) = 0 \Longleftrightarrow P(a) = 0 \Longleftrightarrow (X-a) | P$.
De plus, en écrivant $B = bI_2 + J$, comme J est nilpotente d'ordre 2 et I_2 et J commutent, $B^k = b^k I_2 + k b^{k-1} J$ par le binôme de Newton donc $P(B) = \begin{pmatrix} P(b) & P'(b) \\ 0 & P(b) \end{pmatrix} = P(b)I_2 + P'(c)J$.
De même, avec $C = cI_3 + K$ avec nilpotente d'indice 3, on a aussi avec la formule du binôme de Newton : $C^k = c^k I_3 + k c^{k-1} K + \dfrac{k(k-1)c^{k-2}}{2} K^2$. Ainsi $P(C) = P(c)I_3 + P'(c)K + P''(c)K^2$.
Ainsi, $P(M) = 0 \Longleftrightarrow (P(a) = P(b) = P'(b) = P(c) = P'(c) = P''(c) = 0)$. On considère alors des cas :

• Si $a = b = c$, $P(M) = 0 \Longleftrightarrow (P(a) = P'(a) = P''(a) = 0) \Longleftrightarrow (X-a)^3 | P \Longleftrightarrow P \in (X-a)^3\,\mathbb{K}[X]$.

- Si $a = b \neq c$, $P(M) = 0 \iff (P(a) = P'(a) = P(c) = P'(c) = P''(c) = 0) \iff (X-a)^2(X-c)^3|P$.
- Si $a = c \neq b$, $P(M) = 0 \iff (P(b) = P'(b) = P(a) = P'(a) = P''(a) = 0) \iff (X-a)^3(X-b)^2|P$.
- Si $b = c \neq a$, $P(M) = 0 \iff (P(a) = P(c) = P'(c) = P''(c) = 0) \iff (X-a)(X-c)^3|P$.
- Si a, b, c sont distincts deux à deux, on obtient enfin $P(M) = 0 \iff (X-a)(X-b)^2(X-c)^3|P$.

6.308 Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique ! On va donc faire une disjonction des cas selon le type de χ_A. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

Cas 1 : Si $\chi_A = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distincts deux à deux, alors on sait que A est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ car A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

Cas 2 : Si $\chi_A = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$ avec λ_1, λ_2 distincts, alors on sait que A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = 2$. il y a donc à nouveau deux cas.

Cas 2.1 : Si $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = 2$, la matrice A est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ car A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec λ_1 valeur propre double et λ_2 valeur propre simple.

Cas 2.2 : Si $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = 1$, alors A n'est pas diagonalisable donc $(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$ n'est pas annulateur de A. Il existe $v_1 \neq 0_E$ dans $E_{\lambda_1}(u)$ et $v_3 \neq 0_E$ dans $E_{\lambda_2}(u)$ mais il nous manque un vecteur pour faire une base. Comme $(u - \lambda_1 \mathrm{id}_E)^2 \circ (u - \lambda_2 \mathrm{id}_E) = 0$ et $(u - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ (u - \lambda_2 \mathrm{id}_E) \neq 0$, on a $E_{\lambda_2}(u) \subset \mathrm{Ker}((u - \lambda_1 \mathrm{id}_E)^2)$ mais $E_{\lambda_2}(u) \not\subset \mathrm{Ker}(u - \lambda_1 \mathrm{id}_E) = E_{\lambda_1}(u)$. Ainsi $\mathrm{Ker}((u - \lambda_1 \mathrm{id}_E)^2)$ est un plan (ça ne peut pas être l'espace en entier car on aurait alors $(u - \lambda_1 \mathrm{id}_E)^2 = 0$ et λ_2 ne serait pas valeur propre de u).

Cas 3 : Si $\chi_A = (X-\lambda_1)^3$, posons $v = u - \lambda_1 \mathrm{id}_E$, alors, par CAYLEY-HAMILTON, v est nilpotent d'indice inférieur ou égal à 3 (normal car on est en dimension 3). Il y a à nouveau quelques cas.

Cas 3.1 : Si $v^2 \neq 0$, classiquement il existe une base $\mathcal{B} = (v^2(x), v(x), x)$ (en prenant x tel que $v^2(x) \neq 0$). Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc la matrice de $u = v + \lambda_1 \mathrm{id}_E$ dans $\mathcal{B}$ vaut $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Cas 3.2 : Si $v^2 = 0$ et $v \neq 0$, $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(v)$ donc $\mathrm{rang}(v) = 1$. Soit (x_2) une base de $\mathrm{Im}(v)$, complétée en une base (x_1, x_2) de $\mathrm{Ker}(v)$; $\exists x_3 \in E,\ x_2 = v(x_3) \neq 0_E$ donc $x_3 \notin \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$, ainsi $\mathcal{B} = (x_1, x_2, x_3)$ est une base de E. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

Cas 3.3 : Si $v = 0$ alors $u = \lambda_1 \mathrm{id}_E$ et la matrice de u dans toute base est $\lambda_1 I_3$.

Toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ sont donc semblables à une et à une seule des matrices triangulaires supérieures (on savait déjà que toute matrice complexe est trigonalisable) suivantes :
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distincts deux à deux ; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec λ_1, λ_2 distincts ; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec λ_1, λ_2 distincts ; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{C}$.

6.309 Il est d'abord clair que E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A est diagonalisable, il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$, alors $M \in E \iff AMA = 0 \iff PDP^1PNP^{-1}PDP^{-1} = 0 \iff DND = 0$ donc, en notant $F = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid DND = 0\}$, on a $M \in E \iff N \in F$. Ceci signifie que $\varphi : E \to F$ définie par $\varphi(M) = P^{-1}MP$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels ; on en déduit que $\dim(E) = \dim(F)$.
Si $r = \mathrm{rang}(A)$, on choisit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont les valeurs propres non nulles (répétées avec leur ordre de multiplicité) de A. Par blocs, $D = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$.

Si N est aussi décomposée avec des blocs de même taille $N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}$, il vient $DND = \begin{pmatrix} \Delta N_1 \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc, comme Δ est inversible, $DND = 0 \iff N_1 = 0$. Ainsi, F est le sous-espace des matrices écrites par blocs sous la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}$ où la matrice nulle est dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. $\dim(F) = n^2 - r^2$ car il admet pour base la famille des matrices élémentaires $E_{i,j}$ où $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \setminus [\![1;r]\!]^2$. On a donc $\dim(E) = n^2 - \text{rang}\,(A)^2$.
Soit f canoniquement associé à A et g canoniquement associé à M pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors $AMA = 0 \iff f \circ g \circ f = 0 \iff \text{Im}\,(g \circ f) \subset \text{Ker}(f) \iff \text{Im}\left(g\big|_{\text{Im}\,(f)}\right) \subset \text{Ker}(f)$. Soit F un supplémentaire de $\text{Im}\,(f)$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \text{Im}\,(f) \oplus F$: $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)$ où $(v_1, \cdots, v_r)$ est une base de $\text{Im}\,(f)$ et $(v_{r+1} \cdots, v_n)$ une base de F.
Alors $f \circ g \circ f = 0 \iff \text{Im}\left(g\big|_{\text{Im}\,(f)}\right) \subset \text{Ker}(f) \iff N = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}$. En posant E' l'espace des matrices écrites par blocs sous la forme précédente, l'application $\varphi : E \to E'$ définie par $\varphi(M) = N$ (changement de base) crée donc un isomorphisme et, comme avant, $\dim(E') = n^2 - r^2$.

6.310 Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg((X-a)P'(X)) \leqslant n$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ et la linéarité de f provient de celle de la dérivation : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Si $k \in [\![2;n]\!]$, $f(X^k) = (X-a)kX^{k-1} + X^k - a^k = (k+1)X^k - kaX^{k-1} - a^kX^0$ et $f(1) = 0$ et $f(X) = 2X - 2a$. Ainsi $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2a & -a^2 & \dots & \dots & -a^n \\ 0 & 2 & -2a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 3 & -3a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n & -na \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix}$.
Comme M est triangulaire supérieure, ses valeurs propres se voient sur sa diagonale donc $\text{rang}\,(M) = n$, $\text{Sp}(f) = \{0, 2, 3, \cdots, n\}$ donc f est diagonalisable puisqu'elle possède $n+1$ valeurs propres distinctes.
D'après le théorème du rang : $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ et il est clair que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(1)$.
Soit $k \in [\![1;n]\!]$, alors $f((X-a)^k) = k(X-a)^{1+k-1} + (X-a)^k - P(a) = (k+1)(X-a)^k$. Ainsi, comme on sait déjà que les sous-espaces propres sont des droites : $E_{k+1}(f) = \text{Vect}((X-a)^k)$.
Puisque $((X-a)^0, \cdots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on sait $\text{Im}\,(f)$ est engendré par son image donc $\text{Im}\,(f) = \text{Vect}(f(1), f(X-a), \cdots, f((X-a)^n) = \text{Vect}(2(X-a), \cdots, (n+1)(X-a)^n)$ d'où l'inclusion $\text{Im}\,(f) \subset \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(a) = 0\} = F$. Réciproquement, si $P \in F$, $(X-a)|P$ donc P est combinaison linéaire des $(X-a), \cdots, (X-a)^n$ d'où $P \in \text{Im}\,(f)$. Par conséquent : $\text{Im}\,(f) = F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(a) = 0\}$.
On pouvait aussi dire que $F = \text{Ker}(\varphi)$ où $\varphi : P \mapsto P(a)$ est une forme linéaire non nulle donc $F = \text{Ker}(\varphi)$ est une hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ et on conclut encore $\text{Im}\,(f) = F$ par inclusion et égalité des dimensions.

6.311 $\text{rang}\,(A) = 2$ car la première colonne (noté C_1) et la dernière colonne (notée C_n) de A ne sont pas colinéaires et que toutes les autres sont nulles. Après calculs, $A^2 = \text{Mat}\,(C_n, 0, \cdots, 0, C_1)$ donc $\text{rang}\,(A^2) = 2$. Mais on sait que $\text{Im}\,(A^2) \subset \text{Im}\,(A)$, l'égalité de leur dimension montre que $\text{Im}\,(A) = \text{Im}\,(A^2)$.

Méthode 1 : preuve classique : soit $X \in \mathbb{R}^n$, alors $AX \in \text{Im}\,(A)$ donc $AX \in \text{Im}\,(A^2)$ et il existe $Y \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX = A^2Y$ d'où $A(X - AY) = 0$. Ainsi $X - AY \in \text{Ker}(A)$ et $X = X - AY + AY \in \text{Ker}(A) + \text{Im}\,(A)$. On en conclut que $\text{Im}\,(A) + \text{Ker}(A) = \mathbb{R}^n$. On conclut alors avec la formule du rang que $E = \text{Im}\,(A) \oplus \text{Ker}(A)$.

Méthode 2 : plus spécifiquement ici : par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) = n - 2$ et observer A nous donne $(E_2, \cdots, E_{n-1})$ comme base de $\text{Ker}(A)$ (où $(E_1, \cdots, E_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$). De plus, (C_1, C_n) est une base de $\text{Im}\,(A)$. On montre facilement que la $\mathcal{B} = (E_2, \cdots, E_{n-1}, C_1, C_n)$ est libre donc que c'est une base de $\mathbb{R}^n$ (car elle comporte n vecteurs). Ceci montre que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}\,(A)$.

Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. On vient de voir que $\text{Im}\,(u)$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ donc, d'après le théorème du rang, u induit un isomorphisme (en fait ici un

automorphisme $\tilde{u} : \mathrm{Im}(u) \to \mathrm{Im}(u)$) entre $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
Méthode 1 : comme on sait que $\mathsf{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont supplémentaires et qu'on connaît leurs dimensions, on prend une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^n$ composée de $n-2$ vecteurs de $\mathsf{Ker}(A)$ et une base $\mathcal{B}_2 = (V_1, V_2)$ de $\mathrm{Im}(A)$, de prendre la matrice de passage P entre la base canonique et cette nouvelle base $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$ et on a $A = PA'P^{-1}$ avec $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ par formule de changement de base avec $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\tilde{u})$. Ainsi B est inversible car $\tilde{u}$ l'est (ou alors $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B) = 2$ donc B est inversible).
On sait que $\mathrm{Tr}\ (A) = \mathrm{Tr}\ (A') = \mathrm{Tr}\ (B) = 0$ et que, comme A^2 et A'^2 sont semblables et que $(A')^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Tr}\ (A^2) = \mathrm{Tr}\ (A'^2) = \mathrm{Tr}\ (B^2) = 2$ donc les deux valeurs propres (éventuellement complexes) λ_1 et λ_2 de B vérifient $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2$ donc $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$ par exemple. Ainsi, $\chi_B = (X-1)(X+1)$ puis, par calcul de déterminant par blocs, $\chi_A = X^{n-2}\chi_B = X^{n-2}(X-1)(X+1)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et A est diagonalisable car $\mathsf{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$ et que les ordres de multiplicité algébrique et géométrique des trois valeurs propres de u sont égaux.

Méthode 2 : $AC_1 = C_n$ et $AC_n = C_1$ donc $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et il est clair que B est inversible. Comme $\chi_B = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, B est diagonalisable (deux valeurs propres distinctes) avec $\mathsf{Sp}(B) = \{-1, 1\} \subset \mathsf{Sp}(A)$ car $\chi_A = X^{n-2}\chi_B = X^{n-2}(X-1)(X+1)$. Or il vient $A(C_1 + C_n) = C_1 + C_n$ et $A(C_1 - C_n) = C_n - C_1 = -(C_1 - C_n)$ donc si on pose $\mathcal{B}'' = (E_2, \cdots, E_{n-2}, C_1 + C_n, C_1 - C_n)$ (autre base de $\mathbb{R}^n$), on a $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(u) = \mathsf{diag}(0, \cdots, 0, 1, -1)$ et si on pose P'' la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}''$, on a $A = P''D(P'')^{-1}$.

6.312 En développant par rapport à la dernière colonne : $\chi_A = (X+1)(X-1)(X-3)$ donc $\mathsf{Sp}(A) = \{1, 3, -1\}$ et A est diagonalisable car χ_A est scindé à racines simples et tous les sous-espaces propres sont des droites.
On constate que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $E_1(A) = \mathsf{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, 0, 1)$.
On calcule et $A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $E_{-3}(A) = \mathsf{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (2, 2, -1)$.
Il est clair que $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $E_{-1}(A) = \mathsf{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (0, 0, 1) = e_3$.
Ainsi $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
En effectuant le calcul matriciel : $MD = DM \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} m_{1,1} & 3m_{1,2} & -m_{1,3} \\ m_{2,1} & 3m_{2,2} & -m_{2,3} \\ m_{3,1} & 3m_{3,2} & -m_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ 3m_{2,1} & 3m_{2,2} & 3m_{2,3} \\ -m_{3,1} & -m_{3,2} & -m_{3,3} \end{pmatrix}$
donc $MD = DM \Longleftrightarrow m_{1,2} = m_{1,3} = m_{2,1} = m_{2,3} = m_{3,1} = m_{3,2} = 0 \Longleftrightarrow M$ est diagonale.
En posant $N = P^{-1}MP$, $M^7 + M + I_3 = A \Longleftrightarrow PN^7P^{-1} + PNP^{-1} + PP^{-1} = PDP^{-1} \Longleftrightarrow N^7 + N + I_3 = D$.
Si $N^7 + N + I_3 = D$, alors $ND = N^8 + N^2 + N = DN$ donc N est diagonale. En écrivant $N = \mathsf{diag}(a, b, c)$, l'équation $N^7 + N + I_3 = D$ se ramène à $a^7 + a + 1 = 1$, $b^7 + b + 1 = 3$, $c^7 + c + 1 = -1$. Comme l'application $x \mapsto x^7 + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$, on a donc un unique triplet (a, b, c) solution dans $\mathbb{R}^3$. On trouve facilement $a = 0$, $b = 1$ et $c = -1$.
Comme $e_1 = v_1 - v_3$, $e_2 = \dfrac{v_2 - 2v_1 + 3v_3}{2}$ et $e_3 = v_3$, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$. L'unique matrice réelle

solution de cette équation est $M = P\ \mathtt{diag}(0,1,-1)\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

6.313 On calcule et on trouve $\chi_{A_n} = (X-1)(X+1)(X-n) + 3(n-2)$.

• Si $n = 3$, $\chi_{A_3} = (X-1)(X+1)(X-3) + 3 = X^3 - 3X^2 - X + 6 = (X-2)(X^2 - X - 3)$. Comme le discriminant de $X^2 - X - 3$ vaut $\Delta = 13 > 0$, la matrice A_3 a trois valeurs propres réelles distinctes donc est diagonalisable. Par exemple $E_2(A_3) = \mathtt{Vect}(1,0,1)$.
• Si $n = 2$, $\chi_{A_2} = (X-1)(X+1)(X-2)$ et, à nouveau, A_2 est diagonalisable avec $E_1(A_2) = \mathtt{Vect}(1,-1,0)$, $E_{-1}(A_2) = \mathtt{Vect}(0,1,0)$ et $E_2(A_2) = \mathtt{Vect}(1,0,1)$.
• Si $n = 1$, $\chi_{A_1} = (X-1)(X+1)(X-1) - 3 = (X-2)(X^2+X+1)$ et A_2 n'est pas diagonalisable car χ_{A_1} n'est même pas scindé dans $\mathbb{R}$.

6.314 La linéarité de f provient de celle de l'intégrale. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est non nul et Q est une primitive de P alors $\deg(Q) \geqslant 1$ et $f(P)(x) = Q(x+1) - Q(x)$. Les termes de plus haut degré de Q s'éliminent quand on calcule $Q(x+1) - Q(x)$ donc $\deg(f(P)) \leqslant \deg(Q) - 1 = \deg(P)$. Ainsi f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $k \in [\![0;n]\!]$, $f(X^k)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} t^k dt = \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1} = x^k + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{j,k} x^j$ ce qui donne au niveau formel $f(X^k) = X^k + \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{j,k} X^j$. Ainsi, la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Comme la trace (et le déterminant) ne dépend pas de la base choisie : $\mathrm{Tr}\,(f) = n+1$, $\det(f) = 1$, $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$. On peut ajouter que f n'est pas diagonalisable (à part si $n = 0$ bien sûr où $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_0[X]}$) car f n'a que 1 comme valeur propre et $f \neq \mathrm{id}_E$ avec $E = \mathbb{R}_n[X]$ car $f(X) = X + \dfrac{1}{2} \neq X$.

6.315 **a.** Soit $M \in GL_k(\mathbb{C})$ telle que M^2 soit diagonalisable. Posons $\mathrm{Sp}(M^2) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, d'après le cours, le polynôme $P = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M^2)} (X - \lambda) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$ vérifie $P(M^2) = 0 = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (M^2 - \alpha_i I_k) = \prod_{i=1}^{n} (M - \delta_i I_k)(M + \delta_i I_k)$ donc $Q(M) = 0$ avec $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \delta_k)(X + \delta_k)$ où, pour $k \in [\![1;n]\!]$, δ_k est une racine carrée de α_k. Alors Q est scindé à racines simples et annulateur de M donc M est diagonalisable.
b. En posant $N' = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, $NN' = N'N = I_{2n}$ donc N est inversible et on a $N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.
c. On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, on a par blocs $P(N^2) = \begin{pmatrix} P(AB) & 0 \\ 0 & P(AB) \end{pmatrix}$.
d. Si N est diagonalisable alors on peut écrire $N = UDU^{-1}$ avec $U \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ et D diagonale donc il vient $N^2 = UD^2U^{-1}$ et N^2 est aussi diagonalisable. Alors il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples P tel que $P(N^2) = 0 = \begin{pmatrix} P(AB) & 0 \\ 0 & P(BA) \end{pmatrix}$ donc $P(AB) = 0$ ce qui montre que AB est diagonalisable.
e. Réciproquement, si AB est diagonalisable, il existe une matrice $U \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale D telles que $AB = UDU^{-1}$ donc $BA = B(AB)B^{-1} = (BU)D(BU)^{-1}$ donc BA est aussi DZ car $BU \in GL_n(\mathbb{C})$. En posant $V = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & BU \end{pmatrix}$, on a $V \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ et $V^{-1}N^2V = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ donc N^2 est DZ et comme N est inversible, on sait d'après ce qui précède que N est aussi diagonalisable.

On a montré l'équivalence : N est diagonalisable si et seulement si AB l'est.

6.316 Les colonnes paires sont égales et non proportionnelles aux colonnes impaires. Ainsi : rang$\,(A_n) = 2$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\chi_{{}^tA}(\lambda) = \det(\lambda I_n - {}^tA) = \det(\lambda I_n - A) = \chi_A(\lambda)$ puisque le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée. Ainsi, comme ceci est vrai our tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $\chi_A = \chi_{{}^tA}$.
Puisque rang$\,(A_n) = 2$, si $n > 2$, 0 est valeur propre de A_n et $\dim(\mathrm{Ker}(A_n)) = \dim(E_0(A_n)) = n-2$. La

somme de toutes les lignes de A_n vaut la ligne $\dfrac{n(n+1)}{2}(1\ 1\cdots1\ 1)$ donc $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est valeur propre de ${}^tA_n$ (donc aussi de la matrice A_n) associé au vecteur propre $(1\ 1\cdots1\ 1)$.

D'ailleurs, par calcul, le vecteur $(1\ 1\cdots1\ 1)$ est aussi propre associé à la valeur propre $\dfrac{n(n+1)}{2}$ pour A_n.

$\mathrm{Tr}\ (A_n)=2(1+3+\cdots+(n-3)+(n-1))=2\times\dfrac{n}{2}\times\dfrac{1+(n-1)}{2}=\dfrac{n^2}{2}$. Comme la somme des valeur propres vaut la trace, la dernière valeur propre cherchée est $-\dfrac{n}{2}$ associée clairement au vecteur propre $(1\ 0\ 1\cdots1\ 0)$.

Au final, $\mathrm{Sp}(A_n)=\{0,-\dfrac{n}{2},\dfrac{n(n+1)}{2}\}$, $E_0(A_n)$ est de dimension $n-2$ avec pour base la famille $((e_1-e_{2k+1},(e_2-e_{2k})_{2\leqslant k\leqslant n/2}$, $E_{-n/2}(A_n)=\mathrm{Vect}((1\ 0\ 1\cdots1\ 0))$ et $E_{n(n+1)/2}(A_n)=\mathrm{Vect}((1\ 1\ 1\cdots1\ 1))$.

6.317 Soit $D=\mathrm{diag}(d_1,,\cdots,d_n)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont distincts et $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec D. Alors $AD=DA\iff(a_{i,j}d_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}=(a_{i,j}d_i)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ donc, pour $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$, on a $a_{i,j}d_j=a_{i,j}d_i$ ce qui impose $a_{i,j}=0$ si $i\neq j$ car $d_i\neq d_j$. Ainsi, une telle matrice A est forcément diagonale.
On diagonalise facilement $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ puisque $\chi_B=X^2-2X-3=(X+1)(X-3)$ donc $\mathrm{Sp}(B)=\{-1,3\}$. De plus, $B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Ainsi $B=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.
Soit $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $A=P^{-1}XP$. Alors $X^2-2X=B\iff(PAP^{-1})^2-2PAP^{-1}=PDP^{-1}\iff A^2-2A=D$.
• Si X vérifie $X^2-2X=B$, alors $AD=A(A^2-2A)=A^3-2A^2=(A^2-2A)A=DA$ donc, d'après ce qui précède : $A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ est elle-même diagonale et on a $a^2-2a=-1$ et $b^2-2b=3$ donc $a=1$ et $b\in\{-1,3\}$. Ainsi $A=A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ ou $A=A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$.
• Réciproquement, si A vaut l'une de ces deux matrices, en remontant les calculs : $X=PAP^{-1}$ vérifient $X^2-2X=B$. On calcule facilement $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$.

Par conséquent, les deux seules solutions de cette équation sont $X_1=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$ et $X_2=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.

6.318 • Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $A^2=-I_n$, alors $\det(A^2)=\det(A)^2=\det(-I_n)=(-1)^n>0$ donc n est pair.

• Si $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $B^2-B+I_n=0$, alors $X^2-X+1=(X+j)(X+j^2)$ est annulateur de B et scindé à racines simples donc B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Mais comme B est réelle, les dimensions des sous-espaces propres associés à $-j$ et à $-j^2$ sont les mêmes donc B est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale contenant autant de $-j$ et de $-j^2$ sur la diagonale donc une matrice de taille paire : on a à nouveau n pair.
On pouvait aussi écrire $\Big(B-\dfrac{I_n}{2}\Big)^2=-\dfrac{3}{4}I_n$ donc $\det\Big(B-\dfrac{I_n}{2}\Big)^2=(-1)^n\Big(\dfrac{3}{4}\Big)^n>0$ d'où n pair.

• Si $C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $C^3+C^2+C=0$, alors $X(X-j)(X-j^2)$ annule C donc $C=PDP^{-1}$ avec $P\in GL_n(\mathbb{C})$ et D diagonale avec $m_0(C)$ fois 0, $m_j(C)$ fois j et $m_j(C)=m_{j^2}(C)$ fois j^2 sur la diagonale. Ainsi, comme rang$\,(C)=m_j(C)+m_{j^2}(C)=2m_j(C)$, on a bien rang$\,(C)$ pair. On a même, par indépendance de la trace par rapport à la base choisie, $\mathrm{Tr}\ (C)=0m_0(C)+jm_j(C)+j^2m_{j^2}(C)=\dfrac{\text{rang}\,(C)}{2}(j+j^2)=-\dfrac{\text{rang}\,(C)}{2}$.

6.319 Après calculs, on a $\chi_A=(X+a)(X+b)(X-a-b)$. Il y a donc quelques cas :
• Si card$\,\{-a,-b,a+b\}=3$, ce qui correspond à $a\neq b$, $a\neq-2b$ et $b\neq-2a$, alors χ_A est scindé à racines simples et A est diagonalisable.
• Si card$\,\{-a,-b,a+b\}=2$, on a à nouveau plusieurs cas :
  - $a\neq0$ et $b=a$, alors $\mathrm{Sp}(A)=\{-a,2a\}$ (avec $-a$ racine double de χ_A) et A est diagonalisable car $(A+aI_3)(A-2aI_3)=0$ par un calcul direct (si A est réelle elle est diagonalisable car symétrique).
  - $a\neq0$ et $b=-2a$, alors $\mathrm{Sp}(A)=\{-a,2a\}$ (avec $-a$ racine double de χ_A) et A n'est pas diagonalisable

car $(A+aI_3)(A-2aI_3)=a^2\begin{pmatrix}-3&3&0\\-3&3&0\\-3&3&0\end{pmatrix}\neq 0$.

• $a\neq 0$ et $a=-2b$, alors $\mathrm{Sp}(A)=\{-b,2b\}$ (avec $-b$ racine double de χ_A) et A n'est pas diagonalisable car $(A+bI_3)(A-2bI_3)=b^2\begin{pmatrix}0&3&-3\\0&3&-3\\0&3&-3\end{pmatrix}\neq 0$.

• Si card $\{-a,-b,a+b\}=1$, alors $a=b=0$ et $A=0$ donc elle est diagonalisable.
En conclusion, A est diagonalisable dans tous les cas sauf si $a\neq 0$ et $(a=-2b$ ou $b=-2a)$.

6.320 Comme $J^2=nJ$, $X(X-n)$ est annulateur de J qui est donc diagonalisable. $\mathrm{Ker}(J)=E_0(J)$ est l'hyperplan d'équation $x_1+\cdots+x_n=0$ et $E_n(J)$ est donc une droite, celle-ci est engendrée par le vecteur $v=(1,\ldots,1)$.
Ainsi, le spectre de J est $\{0,n\}$ avec n simple et 0 de multiplicité $n-1$: $\chi_J=X^{n-1}(X-n)$.
Si M est triangulaire et n'a que des 0 sur sa diagonale, alors $\chi_M=X^n$ et $\mathrm{Sp}(M)=\{0\}$ donc $\phi(M)=0$.
On décompose $J=I_n+M^++M^-$ où M^+ est triangulaire supérieure, n'a que des 0 sur sa diagonale et des 1 au dessus, et M^- est triangulaire inférieure, n'a que des 0 sur sa diagonale et des 1 partout en dessous.
Alors, par linéarité de ϕ, il vient $\phi(J)=\phi(I_n)+\phi(M^+)+\phi(M^-)=1+0+0=1$ car $\mathrm{Sp}(I_n)=\{1\}$.
On considère alors deux cas :
• si $n=1$, on peut prendre $\phi(M)=m$ si $M=(m)$ et ϕ est linéaire et vérifie $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\phi(A)\in\mathrm{Sp}(A)$.
• si $n\geqslant 2$, $\phi(J)=1$ et $1\notin\mathrm{Sp}(J)=\{0,n\}$ et une telle application ϕ n'existe pas.

6.321 Comme $(X-1)(X-2)$ est annulateur de f, on sait que $\mathrm{Sp}(f)\subset\{1,2\}$. Comme on travaille dans $\mathbb{C}$, $\mathrm{Sp}(f)\neq\emptyset$, on a donc trois cas à considérer :
• si $\mathrm{Sp}(f)=\{1\}$ et si f est diagonalisable, alors $f=\mathrm{id}_E$ (car il existe une base de vecteurs propres associés à la valeur propre 1), mais on aurait alors $f-\mathrm{id}_E=0$ donc $(f-\mathrm{id}_E)^2\circ(f-2\mathrm{id}_E)=0$. OUPS !
• si $\mathrm{Sp}(f)=\{2\}$ et si f est diagonalisable, alors $f=2\mathrm{id}_E$ (car il existe une base de vecteurs propres associés à la valeur propre 2), mais on aurait alors $f-2\mathrm{id}_E=0$ donc $(f-\mathrm{id}_E)^2\circ(f-2\mathrm{id}_E)=0$. RE-OUPS !
• si $\mathrm{Sp}(f)=\{1,2\}$ et si f est diagonalisable, on sait qu'alors $\prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}(X-\lambda)=(X-1)(X-2)$ est annulateur de f donc $(f-\mathrm{id}_E)\circ(f-2\mathrm{id}_E)=0$ mais on aurait alors encore $(f-\mathrm{id}_E)^2\circ(f-2\mathrm{id}_E)=0$. RE-RE-OUPS !
Dans tous les cas, on obtient une contradiction : f n'est pas diagonalisable !

6.322 L'application $\varphi:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(M)=AM-MB$ est visiblement linéaire, c'est un endomorphisme en dimension finie, on sait donc que φ est un automorphisme si et seulement si elle est injective.

a. Supposons que A et B n'ont aucune valeur propre commune. On cherche à montrer que φ est injective. Soit $M\in\mathrm{Ker}(\varphi)$, on a donc $AM=MB\Longrightarrow A^2M=A(AM)=A(MB)=(AM)B=(MB)B=MB^2$. Soit $k\geqslant 2$ tel que $A^kM=MB^k$, alors $A^{k+1}M=A(A^kM)=A(MB^k)=(AM)B^k=(MB)B^k=MB^{k+1}$ et, par principe de récurrence, on peut conclure que $\forall k\in\mathbb{N},\ A^kM=MB^k$ (clair pour $k=0$).
Si $P=\sum\limits_{k=0}^{m}p_kX^k\in\mathbb{C}[X]$, $P(A)M=\Big(\sum\limits_{k=0}^{m}p_kA^k\Big)M=\sum\limits_{k=0}^{m}p_kA^kM=\sum\limits_{k=0}^{m}p_kMB^k=M\Big(\sum\limits_{k=0}^{m}p_kB^k\Big)=MP(B)$.
Si on prend $P=\chi_A$, d'après Cayley-Hamilton, on obtient $M\chi_A(B)=0$ Or χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$ et ses racines sont les valeurs propres de A d'où $\chi_A=\prod\limits_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{m_{\lambda_k}(A)}$ avec $\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}$ donc $\chi_A(B)=\prod\limits_{k=1}^{r}(B-\lambda_kI_n)^{m_{\lambda_k}(A)}$. Comme les λ_k ne sont pas des valeurs propres de B, les matrices $B-\lambda_kI_n$ sont inversibles (en effet $B-\lambda I_n\notin GL_n(\mathbb{C})\Longleftrightarrow\lambda\in\mathrm{Sp}(B)$) donc $\chi_A(B)$ l'est aussi (les matrices inversibles sont stables par multiplication car $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe). Comme $M\chi_A(B)=0$ et $\chi_A(B)$ est inversible, on en déduit que $M=0$ donc que φ est injective. Ainsi, il existe une unique $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM-MB=C$.

b. Réciproquement, Si A et B possèdent une valeur propre commune λ, comme $\chi_B=\chi_{{}^tB}$, il existe U et

V non nuls dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $AU = \lambda U$ et ${}^tBV = \lambda V$. En posant $M = U^tV \neq 0$ (le vérifier), on a $AM = AU^tV = \lambda M$ et $MB = U^tVB = U^t({}^tBV) = \lambda M$ donc $M \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ donc $\varphi \notin GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$:

- soit $C \notin \mathrm{Im}\,(\varphi)$ et $AM - MB = C$ n'admet aucune solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- soit $C = \varphi(M_0) \in \mathrm{Im}\,(\varphi)$ et $AM - MB = C$ admet une infinité de solutions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tout $M_0 + \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Au final, $\big(\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AM - MB = C\big) \iff \varphi \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \iff \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \{0\}$.

6.323 La linéarité de f provient de la linéarité de la dérivation polynomiale.

Si $n = 0$, la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}_0[X]$ donc linéaire.

Si $n \geqslant 1$ et si $P = a_nX^n + Q \in \mathbb{R}_n[X]$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $f(P) = f(Q) + na_nX^{n+1} - na_n(X^2-1)X^{n-1}$ donc $f(P) = f(Q) + na_nX^{n-1}$ et $\deg(f(Q)) \leqslant \mathrm{Max}(\deg(nXQ, (X^2-1)Q') \leqslant \deg(Q)+1 = n$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Dans tous les cas, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

L'équation s'écrit aussi $(x^2-1)y' + (\lambda - nx)y = 0$ or $\dfrac{\lambda - nX}{X^2-1} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+1}$ avec $a = -\dfrac{n-\lambda}{2}$ et $b = -\dfrac{n+\lambda}{2}$ qu'on obtient par exemple par identification. Comme une primitive de $x \mapsto \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$ est $x \mapsto a\ln(1-x) + b\ln(1+x)$ sur $]-1;1[$, les solutions de (E_n) : $nxy - (x^2-1)y' = \lambda y$ sur $]-1;1[$ sont les $y : x \mapsto \lambda(1-x)^{-a}(1+x)^{-b} = \lambda(1-x)^{(n-\lambda)/2}(1+x)^{(n+\lambda)/2}$. Ces fonctions sont polynomiales si $-a$ et $-b$ sont des entiers naturels ce qui impose $\lambda = n - 2k$ avec $k \in [\![0;n]\!]$.

Ainsi, les polynômes $P_k = (1-X)^k(1+X)^{n-k}$ pour $k \in [\![0;n]\!]$ sont des vecteurs propres de f qui vérifient $f(P_k) = (n-2k)P_k$. Comme ils sont associés à des valeurs propres distinctes, la famille $\mathcal{B} = (P_0, \cdots, P_n)$ est libre donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car elle est composée de $n+1$ vecteurs. f est donc diagonalisable et son spectre est $-n, -n+2, \cdots, n-2, n$.

Ainsi, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est $D = \mathrm{diag}(-n, -n+2, \cdots, n-2, n)$ donc $\mathrm{Tr}\,(f) = 0$ (somme des valeurs propres) et $\det(f) = \prod_{k=0}^{n}(n-2k) = 0$ si n est pair et $\det(f) = (-1)^{\frac{n+1}{2}}(1.3.\cdots n)^2 = (-1)^{p+1}\Big(\dfrac{(2p+1)!}{2^pp!}\Big)^2$ si $n = 2p+1$ est impair (produit des valeurs propres). De plus, le rang de f est le nombre de valeurs propres non nulles : $\mathrm{rang}\,(f) = n+1$ si n impair et $\mathrm{rang}\,(f) = n$ si n pair.

6.324 Si on note X la matrice colonne telle que ${}^tX = (x_1 \cdots x_n)$, on a $M = X^tX$.

Si $X = 0$, $M = 0$ et... qu'en dire ?

Si $X \neq 0$, le rang de M vaut 1 donc 0 est valeur propre de M (si $n \geqslant 2$) et la dimension de $E_0(M)$ vaut $n-1$. Or $MX = X^tX = ||X||^2X$ donc $\lambda = ||X||^2$ est valeur propre de M et $\dim(E_\lambda(M)) \geqslant 1$. Comme $\lambda \neq 0$, $E_0(M)$ et $E_\lambda(M)$ sont en somme directe donc $\dim(E_\lambda(M)) = 1$. Comme $R^n = E_0(M) \oplus E_\lambda(M)$, $\mathrm{Sp}(M) = \{0, ||X||^2\}$.

6.325 D'après le cours, si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et λ une valeur propre de u, l'ordre de multiplicité de λ dans χ_u est supérieur à la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$.

Avec ces notations χ_u est le polynôme défini par la relation $\chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda\mathrm{id}_E)$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_u est un polynôme annulateur de u : $\chi_u(u) = 0$.

Si $\chi_u(0) \neq 0$, alors 0 n'est pas valeur propre de u donc u est inversible, ainsi u est un automorphisme de E, u^2 l'est donc aussi par composition et on a $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2) = \{0\}$.

Si $\chi_u(0) = 0$, alors 0 est racine simple de χ_u donc $E_0(u) = \mathrm{Ker}(u)$ est une droite, comme $chi_u = a_1X + \cdots + X^n$ avec $a_1 \neq 0$, par Cayley-Hamilton, on a $a_1u + \cdots + u^n = 0$. Si $x \in \mathrm{Ker}(u^2)$, alors par une récurrence simple : $\forall k \geqslant 2$, $u^2k(x) = 0_E$ donc en appliquant (R) en x, il ne reste que $a_1u(x) = 0_E$ donc $u(x) = 0_E$. On vient de prouver que $\mathrm{Ker}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Comme l'autre inclusion est toujours vraie, on a $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

6.326 Comme χ_A est scindé à racines simples, en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes de A (et donc de B), comme χ_A est annulateur de A, la matrice A est diagonalisable et il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ (resp. $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$ (resp. $B = QDQ^{-1}$) en posant $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Ainsi, $A = PQ^{-1}BQP^{-1}$ et il suffit alors de poser $U = PQ^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ (car $GL_(\mathbb{K})$ est un groupe multiplicatif) pour avoir $A = UBU^{-1}$: A et B sont semblables.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = 0$, $\chi_A = \chi_B = X^2$. A et B ne sont pas semblables car elles n'ont pas le même rang.

6.327 **a.** Si λ est une valeur propre de $v \circ u$, il existe un vecteur $x \neq 0_E$ tel que $v \circ u(x) = \lambda x$, on applique u et on a $(u \circ v)(u(x)) = \lambda u(x)$ avec $u(x) \neq 0_E$ (car si on avait $u(x) = 0_E$, on aurait aussi $v \circ u(x) = 0_E$ ce qui est exclu car $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0_E$) donc λ est aussi valeur propre de $u \circ v$. Ainsi, $\text{Sp}(u \circ v) \cap \mathbb{K}^* = \text{Sp}(v \circ u) \cap \mathbb{K}^*$.

b. Si $0 \in \text{Sp}(u \circ v)$ et E de dimension finie, $u \circ v$ n'est pas inversible donc, puisqu'on est en dimension finie, ceci impose $\det(u \circ v) = 0$ or $\det(v \circ u) = \det(v)\det(u) = \det(u)\det(v) = \det(u \circ v) = 0$ donc $v \circ u$ n'est pas non plus inversible ce qui se traduit par le fait que 0 est aussi valeur propre de $v \circ u$.

c. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, la primitive de P' s'annulant en 0 étant $P - P(0)$, on a $u \circ v(P) = P - P(0)$ alors que $v \circ u(P) = P$. Ainsi $v \circ u = \text{id}_E$, $\text{Ker}(v \circ u) = \{0\}$ et 0 n'est pas valeur propre de $v \circ u$. Comme on a $\text{Ker}(u \circ v) = \mathbb{R}_0[X]$, 0 est valeur propre de $u \circ v$ avec par exemple $u \circ v(1) = 0.1$.

Ainsi, $0 \in \text{Sp}(u \circ v)$ et $0 \in \text{Sp}(v \circ u)$ ne sont plus équivalents et on n'a pas forcément $\text{Sp}(u \circ v) = \text{Sp}(v \circ u)$ en dimension infinie alors qu'on a vu en question **b.** qu'on a toujours $\text{Sp}(u \circ v) = \text{Sp}(v \circ u)$ en dimension finie.

6.328 Par définition, on a $A = X^tY$ avec ${}^tX = (1 \ \cdots \ n)$ et ${}^tY = \left(1 \ \frac{1}{2} \ \cdots \ \frac{1}{n}\right)$ donc A et de rang 1 car elle est non nulle et toutes les colonnes sont proportionnelles. Si $n \geqslant 2$, comme $\dim(\text{Ker}(A)) = n - 1 > 0$ par le théorème du rang, 0 est valeur propre de A (ou de u canoniquement associé à A) et $\text{Ker}(A)$ est l'hyperplan H d'équation $H : \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{j} = 0$. Comme $\dim(E_0(u)) = n - 1$, on a $m_0(u) \geqslant n - 1$ donc X^{n-1} divise $\chi_A = \chi_u$. Ainsi, on sait d'après le cours que $\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X - \text{Tr }(A)) = (-1)^n X^{n-1}(X - n)$. La valeur n est donc valeur propre simple donc A est diagonalisable car $\dim(E_0(u)) + \dim(E_n(u)) = n - 1 + 1 = n$ où $E_n(u) = \text{Vect}(v_1)$ où $v_1 = (1 \ 2 \cdots \ n)$ par calcul.

Les vecteurs $v_2, \cdots, v_n$ où $v_j = -e_1 + je_j$ forment une base (c'est clair) de $\text{Ker}(A)$. Ainsi, $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ est une base de vecteurs propres de A et si $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\mathcal{B})$ et $D = \text{diag}(n, 0, \cdots, 0) = nE_{1,1}$, alors par formule de changement de base, on a $A = PDP^{-1}$.
Comme A est diagonalisable, on a vu dans le cours que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M commute avec A si et seulement si $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}\,(A)$ sont stables par M. On en déduit que le commutant de A est de dimension $(n-1)^2 + 1$ (remarque du cours).

6.329 Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $\text{Tr } A = 0$ et $A^2 + {}^tA = I_3$, alors ${}^tA = I_3 - A^2$ donc $A = {}^t({}^tA) = {}^t(I_3 - A^2) = I_3 - ({}^tA)^2$ donc $A = I_3 - (I_3 - A^2)^2$ donc $A^4 - 2A^2 + A = 0$ après calculs. Ainsi, $P = X^4 - 2X^2 + X = X(X-1)(X^2 + X - 1)$ annule A. Or les valeurs propres complexes de A font partie des racines d'un polynôme annulateur (c'est du cours) donc $\text{Sp}(A) \subset \{0, 1, \alpha, \beta\}$ où $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Comme P est scindé à racines simples, A est diagonalisable donc semblable à une matrice diagonale D ayant sur sa diagonale des termes pris dans $\text{Sp}(A)$. Or les seules façons de trouver 0 en effectuant la somme de trois termes pris dans $\{0, 1, \alpha, \beta\}$ sont $0 = 0 + 0 + 0$ ou $0 = 1 + \alpha + \beta$. Ainsi, $A = 0$ (car semblable à $D = 0$) ou $(X-1)(X-\alpha)(X-\beta) = X^3 - 2X + 1$ annule A. Or $A = 0$ n'est pas solution de $A^2 + {}^tA = I_3$. De plus, si $A^3 - 2A + I_3 = 0$, comme on a aussi $A^2 + {}^tA = I_3$, on a alors $A^3 = A - A^tA = I_3 - 2A$ donc $A = I_3 - A^tA$ qui est donc symétrique. Cela donne donc $A^2 + A - I_3 = 0$ ce qui contredit que 1 est valeur propre de A car 1 n'est pas racine de $X^2 + X - 1$.

Par conséquent, il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr } A = 0$ et $A^2 + {}^tA = I_3$.

6.330 Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P = \alpha X^n + Q$ avec $\deg(Q) \leqslant n-1$ donc $f(P) = X(1+X)(n\alpha X^{n-1} + Q') - nX(\alpha X^n + Q)$ donc $f(P) = n\alpha X^n + f(Q)$ et $\deg(f(Q)) \leqslant \max(2+n-2, 1+n-1) = n$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. La linéarité de f est classique donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme, pour $k \in [\![0;n]\!]$, on a $f(X^k) = k(1+X)X^k - nX^{k+1} = kX^k + (k-n)X^{k+1}$, la matrice de f dans la base canonique est triangulaire inférieure avec $0, 1, \cdots, n$ sur la diagonale. Ainsi $\chi_f = \prod\limits_{k=0}^{n} (X-k)$ est scindé à racines simples donc f est diagonalisable et ses valeurs propres sont les entiers $k \in [\![0;n]\!]$.
Soit P_k un polynôme non nul tel que $f(P_k) = kP_k$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $t(1+t)P_k'(t) - ntP_k(t) = kP_k(t)$ donc P_k est solution sur tout intervalle de l'équation différentielle $t(1+t)y' - (nt+k)y = 0$. Comme $\dfrac{k+nt}{t(1+t)} = \dfrac{k}{x} + \dfrac{n-k}{1+x}$, la fonction P_k vaut sur tout intervalle ne contenant ni 0 ni -1, $P_k(t) = \lambda t^k(1+t)^{n-k}$. Les polynômes P_k et $\lambda X^k(1+X)^{n-k}$ coïncident donc en une infinité de valeurs donc $P_k = \lambda X_k(1+X)^{n-k}$.
Par conséquent, une base de vecteurs propres de f est $(X^k(1+X)^{n-k})_{k \in [\![0;n]\!]}$ associés respectivement aux valeurs propres $0, \cdots, n$.

6.331 Le polynôme $P = X^5 + X - 1$ est annulateur de A et l'étude de la fonction polynomiale P, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $P'(t) = 5t^4 + 1 > 0$, montre, avec le théorème des valeurs intermédiaires, que P n'admet qu'une seule racine réelle $\alpha \in]0;1[$ car $P(0) = -1 < 0 < 1 = P(1)$. Comme χ_A est un polynôme réel et qu'il est scindé dans $\mathbb{C}$ d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, en notant $z_1, \overline{z}_1$ et $z_2, \overline{z}_2$ ses autres racines (à part α), on sait que $\det(A) = \alpha^{m_\alpha(A)} z_1^{m_{z_1}(A)} \overline{z_1}^{m_{\overline{z_1}}(A)} z_2^{m_{z_2}(A)} \overline{z_2}^{m_{\overline{z_2}}(A)}$ (on pourrait avoir $z_1 = z_2$ ou $z_1 = \overline{z_2}$ mais on verra en fin d'exercice que non). Comme A est réelle, $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ donc $m_{z_1}(A) = m_{\overline{z_1}}(A)$ et $m_{z_2}(A) = m_{\overline{z_2}}(A)$. Ainsi, $\det(A) = \alpha^{m_\alpha(A)} z_1^{m_{z_1}(A)} \overline{z_1}^{m_{z_1}(A)} z_2^{m_{z_2}(A)} \overline{z_2}^{m_{z_2}(A)} = \alpha^{m_\alpha(A)} |z_1|^{2m_{z_1}(A)} |z_2|^{2m_{z_2}(A)} > 0$ car $\alpha > 0$.
Pour aller plus loin, on peut s'intéresser à la diagonalisabilité de A.
• Les racines de $P' = 5X^4 + 1$ sont les quatre racines quatrièmes de $-\dfrac{1}{5}$. Si $z^4 = -\dfrac{1}{5}$, alors $P(z) = z^5 + z - 1$ donc $P(z) = -\dfrac{z}{5} + z - 1 = \dfrac{4z}{5} - 1 \neq 0$ car $\dfrac{5}{4}$ n'est pas une racine quatrième de $-\dfrac{1}{5}$. Ainsi, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car P est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples.
• Si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors ses valeurs propres sont toutes réelles et elles ne peuvent valoir que α d'après ce qui précède. Ainsi, $A = P(\alpha I_n)P^{-1} = \alpha I_n$. Réciproquement, αI_n est diagonale donc diagonalisable. Ainsi, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = \alpha I_n$.

6.332 Par un simple calcul, on trouve que $f^3 - (\alpha+\beta)f^2 + \alpha\beta f = 0$ donc $P = X^3 - (\alpha+\beta)X^2 + \alpha\beta X = X(X-\alpha)(X-\beta)$ est annulateur de f. On traite alors cas :
• Si $\alpha \neq \beta$ sont non nuls, alors P est scindé à racines simples donc f est diagonalisable.
• Si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$ (ou $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$), alors $f^2 - \alpha f = 0$ donc $X^2 - \alpha X = X(X-\alpha)$ est annulateur de f et scindé à racines simples donc f est encore diagonalisable.
• Si $\alpha = \beta \neq 0$, alors $f^2 - \alpha f = 0$ donc f est à nouveau diagonalisable.
• Si $\alpha = \beta = 0$, alors $f = 0$ et f est clairement diagonalisable.