SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 6 RÉDUCTION

6.1 Éléments propres

6.1 Soit u un automorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E . Établir : $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$.

6.2 <u>*Centrale PSI 2012*</u> Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A_a = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 5+2a & 3+a & 18+3a \\ 3-2a & 5-a & -18-3a \\ 9+2a & 3+a & 14+3a \end{pmatrix}$. Déterminer en fonction de a les sous-espaces F de R^3 qui sont stables par l'application linéaire $u_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à A_a.

6.3 <u>*Centrale PSI 2012*</u> Montrer que, pour tout triplet $(A, B, C) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^3$, il existe $(a, b, c) \neq (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aA + bB + cC$ admette une valeur propre double (commencer par le cas où (A, B, C) est liée).

6.4 <u>*Centrale PSI 2012*</u> Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, pour $f \in E$ on définit la fonction g par $g(0) = f(0)$ et $\forall x > 0,\ g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$. On pose alors $u(f) = g$.

a. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer ses vecteurs propres et valeurs propres.
b. La restriction de u au sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus n est-elle diagonalisable ?

6.5 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ ayant une limite finie en $+\infty$.
Soit T l'endomorphisme de E donné par $\forall x \in [0; +\infty[,\ T(f)(x) = f(x+1)$.
Déterminer les valeurs propres de T et les vecteurs propres associés.

6.6 <u>*Mines MP 2007*</u> Soit $E = \{ f \in C^1([0; +\infty[, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \}$; pour un élément f de E on pose $T(f)$ la fonction définie par $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{t}dt$. Montrer que T est un endomorphisme de E et trouver ses valeurs propres.

6.7 <u>*Centrale PSI 2012*</u> Soit l'espace $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les réels $p \in]-1; 1[$ et $q = 1 - p$ et, pour $f \in E$, $u(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $u(f)(x) = f(px + q)$.

a. Montrer que u est un automorphisme de E et que ses valeurs propres sont dans $]-1; 1]$.
b. Soit f un vecteur propre de u. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$.
c. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de u.

6.8 <u>*Centrale PSI 2012*</u> Soit $a_1, \cdots, a_p$ des réels, déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position (i, j) est $a_{i,j} = \alpha_{\mathrm{Min}(i,j)}$ si $i + j = 2p + 1$ et 0 sinon.

6.9 Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ distincts 2 à 2. On pose $P(x) = \det(A + xI_n)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $P(a_k)$ et justifier que P est un polynôme unitaire de degré n.
b. Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{P(X)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - a_k)}$.
c. En déduire le déterminant de $A + I_n$. Que vaut celui de A ?

6.10 Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$; c'est-à-dire trouver une matrice P inversible dans $GL_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

6.11 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ et H un hyperplan de E.

a. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\{u \in E^* \mid u(H) = \{0\}\}$?
b. Montrer que si H a pour équation $u(x) = 0$ ($u \in E^*$) : $\big(H$ stable par $f\big) \iff \big(u \circ f$ et u colinéaires$\big)$.
c. Soit A et L les matrices dans $\mathcal{B}$ de f et u. Montrer : $\big(H$ stable par $f\big) \iff \big({}^tL$ vecteur propre de ${}^tA\big)$.
d. Déterminer les plans stables par u canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

6.12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; pour $A \in E$, on introduit $u : E \to E$ défini par : $u(M) = AM$. Montrer que A et u ont les mêmes valeurs propres et préciser les sous-espaces propres de u en fonction de ceux de A.

6.13 _CCP PSI 2007 d'après RMS_ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 3$.
On suppose que : $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{Tr} A = 0$ et $A^n \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

6.14 _Centrale PSI 2012_ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. On pose $A = \begin{pmatrix} B & B^2 \\ B^2 & -B \end{pmatrix}$.

a. A est-elle nécessairement diagonalisable ?
b. On suppose ici B diagonale, donner une CNS pour que A soit diagonalisable (commencer par $n = 1$).
c. On revient au cas général, donner une CNS sur le spectre de B pour que A soit diagonalisable.

6.15 _Matrices circulantes_ Soit pour $n \geqslant 2$ la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
b. Application : calculer $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

6.16 _Compléments OdlT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 566I_

Montrer que les valeurs propres possibles de A réelle, carrée de taille n, vérifiant $A^3 = A^2 + 4A - 4I_n$ sont -2, 1 et 2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A.

6.2 Diagonalisation

6.17 _Centrale PSI 2012_ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dimension 3, $\mathcal{B}$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ notée $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On suppose que les 9 coefficients de A sont des entiers relatifs (soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$). On suppose enfin qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $u^p = \mathrm{id}_E$.
a. Montrer que $u \in GL(E)$. À quelle condition nécessaire et suffisante u est-il diagonalisable ?
Comment appelle-t-on ces endomorphismes u diagonalisables ?
On suppose dans toute la suite que u n'est pas diagonalisable.
c. Montrer qu'il existe $a \in [\![-2; 2]\!]$ et $b \in \{-1, 1\}$ tels que $\chi_u(X) = (\varepsilon - X)(X^2 + aX + b)$ avec $\varepsilon = \pm 1$.
d. En déduire les valeurs possibles de $\chi_u(X)$ et justifier que $u^{12} = \mathrm{id}_E$.

6.18 *Centrale PSI 2012* Soit $n \geqslant 2$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant des 1 dans toutes ses cases.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; pour $i \in [\![1;n]\!]$, on note $l_i(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$ la somme des coefficients de la ligne i et, pour $j \in [\![1;n]\!]$, $c_j(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}$ la somme des coefficients sur la colonne j.

On note $X_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ce sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ l_i(A) = c_j(A)$; on note alors $s_n(A)$ la valeur commune de toutes ces sommes.

a. Donner un élément non élémentaire de $X_3(\mathbb{R})$ (autre que I_3, J_3, etc...).

b. Montrer que $X_n(\mathbb{R}) = \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A\,J_n = J_n\,A\big\}$.

c. En déduire que $X_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par multiplication. Montrer que $s_n : X_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que : $\forall (A,B) \in X_n(\mathbb{R})^2,\ s_n(AB) = s_n(A)s_n(B)$.

d. Diagonaliser J_n et en déduire $\dim\big(X_n(\mathbb{R})\big)$. Trouver $\dim\big(X_n^0(\mathbb{R})\big)$ où $X_n^0(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $X_n(\mathbb{R})$ formé des matrices magiques A telles que $s_n(A) = 0$.

6.19 *Centrale PSI 2012* Soit $m \in \mathbb{R}$ et la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -m & -m+1 & m \\ -m-1 & -m & m+1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer l'unique valeur m_0 telle que A_{m_0} soit diagonalisable.

b. Caractériser géométriquement l'endomorphisme u_0 de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A_{m_0}.

6.20 *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant 3$ et A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui contient des 1 dans la première ligne et la première colonne et des 0 partout ailleurs. Par exemple $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que (A_n, A_n^2, A_n^3) est une famille liée. Justifier que A_n est diagonalisable.

b. Déterminer les valeurs propres de A_n et son polynôme caractéristique χ_{A_n}. Calculer $\det(I_n + A_n)$.

c. On prend dans cette question $n = 7$. Pour $p \geqslant 1$, trouver $(a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A_7^p = a_p A_7^2 + b_p A_7$.

6.21 *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 \neq b^2$, on pose $M = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & a & b \\ b & a & b & \cdots & b & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & b & a & \cdots & a & b \\ b & a & b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

a. Que vaut $\operatorname{rang}(M)$? Diagonaliser M.

b. Déterminer le polynôme caractéristique χ_M. Pour un complexe c, en déduire $\det(A)$ où la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ vérifie : $\forall k \in [\![1;2n]\!],\ a_{k,k} = c$, $\forall (i,j) \in [\![1;2n]\!]^2,\ a_{i,j} = b$ si $i+j$ est impair et $\forall (i,j) \in [\![1;2n]\!]^2,\ a_{i,j} = a$ si $i+j$ est pair et $i \neq j$.

6.22 *Centrale PSI 2012* Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, une famille libre $(B_1, \cdots, B_p)$ de matrices de $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ et des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ qui vérifient : $\forall n \in [\![0;p]\!],\ A^n = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^n B_k$.

a. Montrer que si les complexes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont distincts 2 à 2 on a $p \leqslant q$.

b. Montrer que si les complexes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont distincts 2 à 2 A est diagonalisable.

c. Expliquer pourquoi A est diagonalisable même si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ne sont pas supposés distincts 2 à 2.

d. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^n B_k$.

e. Réciproquement, si A est diagonalisable, justifier que A satisfait aux hypothèses de cet exercice.

6.23 Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6.24 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes deux à deux. Soit g un autre endomorphisme de E tel que $f \circ g = g \circ f$.
a. Montrer qu'un vecteur propre de f est aussi un vecteur propre de g.
b. En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
c. Que peut-on en déduire à propos de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$?

6.25 Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\exists p \geqslant 1,\ u^p = \mathrm{id}_E$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

a. Montrer que $u \in GL(E)$. À quelle condition nécessaire et suffisante u est-il diagonalisable ?
Comment appelle-t-on ces endomorphismes u diagonalisables ?
On suppose dans toute la suite que u n'est pas diagonalisable.
b. Montrer qu'il existe deux entiers $a \in [\![-2;2]\!]$ et $b \in \{-1,1\}$ tels que $\chi_u(X) = (\varepsilon - X)(X^2 + aX + b)$ avec $\varepsilon = \pm 1$. En déduire les valeurs possibles de $\chi_u(X)$ et justifier que $u^{12} = \mathrm{id}_E$.

6.26 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0;n]\!]$ et une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r.

a. Montrer que M est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$.
b. En déduire qu'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à $r+1$ tel que $P(M) = 0$.
c. Montrer par un exemple où vous choisirez n, r et M qu'il n'existe pas toujours de polynôme Q de degré inférieur ou égal à r qui vérifie $Q(M) = 0$.
d. On suppose que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires, établir que M est alors semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. Quel est le polynôme minimal de M en fonction de celui de A ?
e. Si M est diagonalisable, à quelle condition nécessaire et suffisante M admet-elle un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à r ?

6.27 *Centrale PSI 2012*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $u(M) = \alpha M + \mathrm{Tr}\,(M)\,A$.
a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
b. u est-elle diagonalisable ? Si $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$, déterminer $\mathrm{Tr}\,(u)$.

6.28 *Centrale PSI 2012* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A^5) = A$.
Est-ce toujours vrai si on suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable ?

6.29 *Centrale PSI 2012* On considère la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la colonne j est composée de nombres tous égaux à j, sauf le coefficient sur la diagonale valant 0.
a. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.
b. En déduire que la matrice A est diagonalisable et déterminer un équivalent de la plus grande valeur propre λ_n de A lorsque n tend vers $+\infty$.

6.30 *Centrale PSI 2012* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & -A \\ 2A & 4A \end{pmatrix}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

6.31 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 2A & -2A \\ A & 5A \end{pmatrix}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

6.32 *Centrale PSI 2012* Soit $n \geqslant 2$ et $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. M est-elle diagonalisable ? Dans ce cas, la diagonaliser.

6.33 *Centrale PSI 2012* Soit E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On note φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall g \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(g) = \frac{1}{2}\Big(g \circ p + p \circ g\Big)$. On considère également les ensembles suivants : $A = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}(p) \text{ et } \mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$, $B = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(p) \text{ et } \mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$, $C = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$, $D = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$.
a. Montrer que B et C sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.
On montre de la même façon que A et D sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.
b. Déterminer les dimensions de ces quatre sous-espaces vectoriels. On fera intervenir r, le rang de p.
c. Déduire de ce qui précède que φ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

6.34 *Centrale PSI 2012* Soit $n \geqslant 2$, trouver une condition nécessaire et suffisante sur $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall z \in \mathbb{C},\ P - zM \in GL_n(\mathbb{C})$. Commencer par examiner le cas où M est inversible.

6.35 *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour une matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit l'équation $(E_Y)\ :\ AX - XB = Y$ où l'on cherche les solutions $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit qu'un couple (A, B) vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si l'équation (E_Y) possède au moins une solution quelle que soit la matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a. Traduire le fait que (A, B) vérifie la propriété $\mathcal{P}$ sur $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(X) = AX - XB$.
b. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AX = XB$, justifier qu'alors $\chi_A(B)$ n'est pas inversible.
En déduire que si (A, B) ne vérifie par $\mathcal{P}$, alors A et B ont au moins une valeur propre commune.
c. Étudier la réciproque.

6.36 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + {}^tM = 2I_n$. Montrer que cette matrice M est diagonalisable.

6.37 *Mines PC 2006* Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ tel que $C = A + B$, $C^2 = 2A + 3B$ et $C^3 = 5A + 6B$.
Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

6.38 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant $f^4 = f^2$.
On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f. Montrer que f est diagonalisable.

6.39 Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = PM + MP$.
Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable.

6.40 *Mines MP 2004* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f_A \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$ par $f_A(M) = AM$.
a. Montrer que si $A^2 = A$ alors f_A est diagonalisable.
b. Montrer que f_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

6.41 Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^5 = M^2$ et $\mathrm{Tr}\,(M) = n$.

6.42 Soit $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
b. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

6.43 *Centrale PSI 2013* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \varphi(M) = AM - MB$.
a. Montrer que si $(a, b) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)$ alors $a - b \in \mathrm{Sp}(\varphi)$. On pourra d'abord justifier qu'il existe deux vecteurs colonnes non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $AU = aU$ et ${}^tBV = bV$.
b. Justifier que φ est diagonalisable si on suppose que A et B le sont.
c. Pour $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, établir que $\chi_A(C)$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(C) = \emptyset$.
d. En déduire que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$, alors $\exists (a, b) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)$ tel que $\lambda = a - b$.

6.44 *X MP 2005* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. On suppose $A^3 = A^2$. Montrer que A^2 est diagonalisable et que $A^2 - A$ est nilpotente.
b. Plus généralement on suppose $A^{k+1} = A^k$ pour un certain entier $k \in \mathbb{N}^*$, établir l'existence d'un entier $p > 0$ tel que A^p est diagonalisable et $A^p - A$ nilpotente.

6.3 Trigonalisation et diagonalisation simultanée

6.45 Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

6.46 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = \underset{\lambda \in Sp(A)}{\mathrm{Max}} |\lambda|$ (**rayon spectral de** A).

On va montrer que pour toute norme de E, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.
a. Montrer que si le résultat est vrai pour une norme, alors il est vrai pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
b. Montrer que si le résultat est vrai pour une matrice A alors il est vrai pour toute matrice semblable à A.
Dans la suite, on considère la norme $||A||_\infty = \underset{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2}{\mathrm{Max}} |a_{i,j}|$.

c. Montrer que si T est triangulaire et que ses coefficients diagonaux valent 1 alors $\lim\limits_{k \to +\infty} ||T^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$.
(indication : écrire $T = I_n + N$ avec $N = T - I_n$ (nilpotente) et utiliser la formule du binôme)
d. Montrer que si B est telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ |a_{i,j}| \leqslant b_{i,j}$ alors $||A^k||_\infty \leqslant ||B^k||_\infty$.
Conclure en trigonalisant $\dfrac{A}{\rho(A)}$.

6.47 *Centrale PC 2008* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, à valeurs propres strictement positives.

a. Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $X_0 = I_n$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(X_n + AX_n^{-1}\right)$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n$ est diagonalisable (on pourra utiliser une base de vecteurs propres de A).
b. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite X vérifie $X^2 = A$. On la note $\sqrt{A}$.
c. Montrer que si A est symétrique alors $\sqrt{A}$ est symétrique.

6.48 *Mines PSI 2010 d'après RMS* On munit $E = C^0\big([0;1], \mathbb{R}\big)$ de la norme de la convergence uniforme $||\,.\,||_\infty$.

Soit T l'application qui à $f \in E$ associe $T(f) : x \mapsto f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.
a. Montrer que T est un endomorphisme continu de E. Déterminer sa norme subordonnée.
b. Soit $f \in E$ non nulle telle que $f(0) = 0$. Montrer que : $\exists x_0 \in]0;1],\ \forall x \in [0;x_0[,\ |f(x)| < |f(x_0)| = ||f||_\infty$.
En déduire que l'espace propre de T associé à la valeur propre 2 est de dimension 1.

6.49 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer le polynôme caractéristique de $P(A)$ en fonction de $Sp(A)$.

6.50 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer χ_A et trigonaliser A.

6.4 Exercices posés aux étudiants de PSI1

6.51 *Centrale PSI 2013* Thomas M.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \\ a_1 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si tous les a_k et les b_k sont nuls ou si $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k > 0$. Indication : on pourra raisonner sur A^2.

6.52 *CCP PSI 2013* Romain

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Diagonaliser K.
b. Exprimer M en fonction de puissances de K.
c. Diagonaliser M et calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

6.53 *CCP PSI 2013* Adrien

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que A inversible, $\mathrm{Tr}\,(A) = 5$ et $A^3 - 4A^2 + 3A = 0$. Donner χ_A.

6.54 *Petites Mines PSI 2013* Camille

Soit A et B des matrices carrées réelles, montrer que $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

6.55 *Centrale PSI 2014* Mathias

On pose E l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
a. Montrer que $\forall P \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} P(t)e^t dt$ converge.
b. On définit L l'application sur E telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ L(P)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} P(t)e^t dt$.
Montrer que L est un endomorphisme de E. Est-il diagonalisable ?

6.56 *Mines PSI 2014* Lucie

Soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des a sur la diagonale et des b partout ailleurs ($b \neq 0$ et $n \geqslant 2$).
a. Donner les valeurs propres de M et dire si elle est diagonalisable.
b. Dans le cas où M est inversible trouver M^{-1}.
c. Trouver M^p avec p un entier naturel (sans passer par la matrice diagonale).

6.57 *Mines PSI 2014* Valentine

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et m canoniquement associé à M.

a. En effectuant un produit par blocs, déterminer le plus petit entier $p \geqslant 1$ tel que $M^p = I_5$.
b. En déduire que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$.
c. Trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^5$ tel que $\big(x, m(x), m^2(x), m^3(x), m^4(x)\big)$ soit une base de $\mathbb{R}^5$.
d. Donner alors la matrice de m dans cette base, puis les valeurs propres de M.

6.58 *Mines PSI 2014* Mathias

a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $(A - \lambda I_n)^{-1}$ est un polynôme en A.
b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ le degré d'un polynôme annulateur de A et $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ des complexes qui ne sont pas dans le spectre de A. Montrer qu'il existe une famille de complexes $(c_1, \cdots, c_k)$ telle que $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(A - \lambda_i I_n)^{-1} = I_n$.

6.59 *CCP PSI 2014* Mohammed

Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, on considère $f : P \mapsto X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$. Montrer que f est un endomorphisme de E, que f est diagonalisable et trouver une base de E constituée de vecteurs propres de f.

6.60 *Centrale Maths1 PSI 2015* Vincent Barrère et Adrien Gruson

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E.
a. On suppose que $u \circ v = 0$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.
b. On suppose que $u \circ v \in \mathrm{Vect}(u, v)$, montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.
c. On suppose que $u \circ v \in \mathrm{Vect}(u, v)$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle les matrices de u et v sont triangulaires supérieures. Indication : raisonner par récurrence sur la dimension de E.

6.61 *Centrale Maths1 PSI 2015* Térence Burcelin

Soit $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par $F(A, B) = \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix}$ si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $F(A_1, B_1)F(A_2, B_2) = F(A_1A_2, B_1B_2)$.

b. Calculer $\mathrm{Tr}\ (F(A, B))$, rang $(F(A, B))$ et $\det(F(A, B))$.

c. À quelles conditions $F(A, B)$ est-elle diagonalisable ?

6.62 *Centrale Maths1 PSI 2015* Margaux Ledieu

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit $D : E \to E$ par $\forall f \in E,\ D(f)(x) = xf'(x)$.

a. Montrer que D est un endomorphisme de E.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$.

c. Trouver les éléments propres de D.

d. Déterminer Im (D).

6.63 *Mines PSI 2015* Jean-Raphaël Biehler

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $\mathrm{Sp}(P(M)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}$.

6.64 *Mines PSI 2015* Bastien Chevallier

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 + f^2 - \mathrm{id}_E = 0$ et $\mathrm{Tr}\ (f) \in \mathbb{Q}$. Montrer que n est un multiple de 3.

6.65 *Mines PSI 2015* Arthur Lacombe

Soit B une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. On pose $M = \lambda I_n + B$.

Montrer que $P(M)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $P(M) = \mu I_n$.

6.66 *Mines PSI 2015* Édouard Le Goas

On pose $E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, p un réel non nul de valeur absolue strictement inférieure à 1 et $q = 1 - p$. Soit u l'application qui pour tout f de E associe $u(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $u(f)(x) = f(px + q)$.

a. Montrer que u est un automorphisme.

b. Montrer que les valeurs propres de u appartiennent à $]-1; 1]$.

c. Montrer que si f est un vecteur propre, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$.

d. Trouver les valeurs propres de u et les vecteurs propres associés.

6.67 *Mines PSI 2015* Ludovic Péron

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a. u admet-il toujours une droite stable ?

b. u admet-il toujours un plan stable ?

6.68 *Mines PSI 2015* Julien Venne

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $A - A^{-1}$ diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et toutes ses valeurs propres distinctes.

a. Montrer que A est diagonalisable. Idem pour A^{-1}.

b. Qu'en est-il si les valeurs propres de $A - A^{-1}$ ne sont pas toutes distinctes ?

c. Reprendre les questions en supposant que c'est $A + A^{-1}$ qui est diagonalisable.

6.69 *CCP PSI 2015* Clément Suberchicot

a. Soit $M \in GL_k(\mathbb{C})$, on suppose M^2 diagonalisable, montrer que M est diagonalisable.

b. Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$, montrer que N est inversible et calculer N^{-1}. Calculer N^2.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $P(N^2)$. Si N est diagonalisable, montrer que AB est diagonalisable. Réciproque ?

6.70 *Petites Mines PSI 2015* Marin de Bonnières

Soit E un espace de dimension $n \geqslant 1$, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$, u avec n valeurs propres distinctes et $v \circ u = u \circ v$.

a. Montrer que v est diagonalisable.

b. Montrer que $v \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u, \cdots, u^{n-1})$.

c. En déduire $\dim(C_u)$ où C_u est le commutant de u : $C_u = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ u = u \circ f\}$.

6.71 *Cachan PSI 2016* Alexandre Janot

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

a. Montrer que $C(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que si $M \in C(A) \cap GL_n(\mathbb{R})$, alors $M^{-1} \in C(A)$.

c. Soit D un matrice diagonale réelle dont tous les coefficients sont distincts deux à deux. Déterminer $C(D)$. Montrer que $(I_n, D, \cdots, D^{n-1})$ est une base de $C(D)$.

On suppose dorénavant que $n = 2$.

d. Quelles sont les matrices A telles que $\dim(C(A)) = 4$?

e. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\dim(C(A)) \geqslant 2$.

f. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\dim(C(A)) \geqslant 3$.

En utilisant $F = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})$ et $G = \mathrm{Vect}(E_{2,1}, E_{2,2})$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$.

g. Trouver une base de $C(A)$.

6.72 *Centrale Maths1 PSI 2016* Sylvin Bielle

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit trigonalisable. Donner $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui soit non diagonalisable.

b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et semblable à M telle que $\forall i \neq j,\ |a_{i,j}| \leqslant \varepsilon$.

Questions : pouvez-vous me donner toutes les CNS de diagonalisabilité que vous connaissez dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

6.73 *Centrale Maths1 PSI 2016* Elliott Jean-François

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$, $a \in \mathbb{R}^*$ tels que pour $p \in \{1, 2, 3\}$, on ait $A^p = a^p(B + pC)$ (1).

a. Montrer que la proposition (1) est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer que tout vecteur propre de A appartient au noyau de C.

c. Déterminer une condition pour que A soit diagonalisable.

6.74 *Mines PSI 2016* Erwann Alric II

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = \mathrm{id}_E$. On dit que u est une involution.

a. Étudier la diagonalisabilité de u.

b. On suppose que $E_1(u)$ est de dimension 1. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ et θ une forme linéaire sur E tels que $\forall x \in E,\ u(x) = -x + \theta(x)a$.

6.75 *Mines PSI 2016* Thomas Corbères II

Déterminer les différentes classes de similitude des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Indication : la classe de similitude d'une matrice A est l'ensemble des matrices semblables à A.

6.76 *Mines PSI 2016* Samy Essabar I

a. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que A diagonalisable $\Longleftrightarrow A^3$ diagonalisable.

b. Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A^3 est diagonalisable alors que A ne l'est pas.

c. Que se passe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

6.77 *Mines PSI 2016* Jean Migliorini I

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A en considérant son endomorphisme associé dans un espace E judicieusement choisi.

6.78 *Mines PSI 2016* Paul Mondou II

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et son polynôme caractéristique $\chi_M(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Montrer que $\forall \lambda \in Sp(M),\ |\lambda| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.

6.79 *Mines PSI 2016* Hugo Tarlé II

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $v_1, \cdots, v_p$ des endomorphismes non nuls de E. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ u^n = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^n v_k$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des réels distincts deux à deux.

a. Montrer que u est diagonalisable. Indication : on pourra montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(u) = \sum\limits_{k=1}^{p} P(\lambda_k) v_k$.

b. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$, notée $(L_1, \cdots, L_p)$ tel que $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$.

c. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$.

6.80 *Mines PSI 2016* Théo Taupiac I

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nilpotente.

a. Montrer que l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que M et λM soient semblables est fini.

b. Qu'en est-il pour M nilpotente ?

6.81 *Mines PSI 2016* Arthur Robbe II

Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $a_{i,j} = a$ si $i = j$, $a_{i,j} = b$ si $|i-j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. Quel est le spectre de A_n ?

6.82 *Mines PSI 2016* Hugo Saint-Vignes I

Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $M = \begin{pmatrix} (0) & & a_n \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_1 & & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Trouver une CNS pour que M soit diagonalisable.

b. Trouver les sous-espaces propres de M.

6.83 *CCP PSI 2016* Adrien Boudy II

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que A est inversible et donner son inverse.

c. Donner les éléments propres de A. Caractère diagonalisable de A ?

d. Donner une autre façon de prouver que A est inversible, diagonalisable.

6.84 *CCP PSI 2016* Matthieu Cadiot I

Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ défini par $f(P) = R$ reste de la division euclidienne de X^2P par $D = X^4 - 1$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. f est-elle diagonalisable ?

c. f est-elle injective ?

6.85 *CCP PSI 2016* David Espert II

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & -1 \\ 2-a & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une CNS pour que M soit diagonalisable.

6.86 *CCP PSI 2016* Sam Pérochon II

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, H un hyperplan de E et u un endomorphisme de E.

a. Montrer que : H stable par $u \iff \exists\lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset H$.

b. Trouver les sous-espaces stables de $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -4 \\ 18 & -10 & -8 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

6.87 *CCP PSI 2016* Marie Rebière II

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

a. Donner deux conditions suffisantes mais non nécessaires pour qu'une matrice soit diagonalisable.

b. Montrer que A est diagonalisable et donner P et D telles que $A = PDP^{-1}$.

On définit B par blocs par $B = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.

c. B est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres.

6.88 *CCP PSI 2016* Arthur Robbe II

Soit $E = \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 + u^2 + u = 0$.

a. Déterminer $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E)$.

b. Montrer que $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E)$. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}\,(u)$.

c. Soit v la restriction de u à $\mathrm{Im}\,(u)$. Quel lien entre $\deg(\chi_v)$ et u ?

d. Montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}(v)$. En déduire que $\mathrm{rang}\,(u)$ est pair.

6.89 *E3A PSI 2016* Clément Suberchicot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $U : E \to E$ défini par $U(P)(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} P(t)\,dt$.

a. Montrer que U est un endomorphisme de E.

b. U est-il diagonalisable ? Inversible ? Si oui, déterminer U^{-1}.

6.90 *Petites Mines PSI 2016* Rogelio Escalona I

Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les éléments propres de N.

6.91 *ENS Cachan PSI 2017* Valentin Gorce et Iñigo Saez-Casares

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont réelles (éventuellement répétées), $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $x^{(0)}$ donné, $\forall k \geqslant 0,\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha r_k$ où $r_k = Ax^{(k)} - b \quad (\mathrm{I})$.

a. Trouver $B_\alpha \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^n$ tels que $x^{(k+1)} = B_\alpha x^{(k)} + c$.

b. Trouver une CNS sur α en fonction des λ_i pour que la méthode (I) converge : cela signifie que $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, la suite $(x^{(k)})_{k\geqslant 0}$ converge vers le vecteur v : l'unique solution de $Au = b$.

c. Montrer que si tous les λ_i ne sont pas de même signe, la méthode (I) ne converge pas.

d. On suppose $\forall k \in [\![1; n]\!],\ \lambda_k > 0$ et que la méthode (I) converge. Montrer qu'il existe C, à exprimer en fonction des λ_i, tel que $0 < \alpha < C$. Soit $f_i : \alpha \mapsto |1 - \lambda_i \alpha|$. Tracer les fonctions f_i.

Trouver α_{opt} tel que la méthode (I) converge le plus rapidement.

6.92 *Centrale Maths1 PSI 2017* Aloïs Blarre

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. AB est-elle inversible ? Quelles valeurs peut prendre x ?

b. La matrice BA est-elle diagonalisable ?

c. Montrer que $\mathrm{Ker}(B) \oplus \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^3$.

6.93 *Centrale Maths1 PSI 2017* Manon Bové

a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 = A$. Quel peut être le rang de A ?

b. Soit $P = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid U^2 = U\}$. Combien existe-t-il de classes de similitude dans P ?

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n pair et $A^2 = 0$. Quel peut être le rang de A ? Soit m le rang maximal possible. Trouver un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^2 = 0$ et $\mathrm{rang}(u) = m$.

6.94 *Centrale Maths1 PSI 2017* Adrien Cassagne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1 : $\forall j \in [\![1; n]\!],\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

a. Soit $A \in E$, montrer que 1 est valeur propre de A.

b. Montrer que E est stable par produit.

c. Montrer que si $\forall j \in [\![1; n]\!],\ \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant 1$, alors $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ |\lambda| \leqslant 1$.

6.95 *Mines PSI 2017* Manon Bové II

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

6.96 *Mines PSI 2017* Adrien Cassagne II et Elliott Jean-François II

Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f$ admet une limite finie en $+\infty\}$. Soit $T : f \mapsto g$ tel que $g(x) = f(x+1)$.

a. Montrer que E est un espace vectoriel et que $T \in \mathcal{L}(E)$.

b. Trouver les valeurs propres de T.

6.97 *Mines PSI 2017* Alexandre Chamley I Soit $n \geqslant 2$, $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

a. Étudier la diagonalisabilité de A en fonction de $a_1, \cdots, a_n$.

b. Lorsque A est diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres de A.

6.98 *Mines PSI 2017* Célia Detrez I Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le polynôme caractéristique de A. À quelles conditions A est-elle diagonalisable ?

b. Déterminer si A est diagonalisable des conditions de convergence de la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$.

6.99 *Mines PSI 2017* Joseph Dumoulin I

a. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet un polynôme annulateur de degré minimal dont on note k le degré.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $(A - \lambda I_n)^{-1}$ est un polynôme en A.

Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ des complexes qui ne sont pas dans le spectre de A.

c. Montrer qu'il existe une famille de complexes $(c_1, \cdots, c_k)$ telle que $\sum_{i=1}^{k} c_i (A - \lambda_i I_n)^{-1} = I_n$.

6.100 *Mines PSI 2017* Valentin Gorce I

Soit un entier $n \geqslant 2$.

a. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer que A diagonalisable $\Longleftrightarrow$ A^3 diagonalisable

b. Trouver des contre-exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c. Trouver des contre-exemples dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

6.101 *Mines PSI 2017* Thomas Laborde I

Soit E un espace de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On note φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi(g) = \frac{1}{2}\Big(g \circ p + p \circ g\Big)$. On considère également les ensembles suivants : $A = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}(p) \text{ et } \mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$, $B = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(p) \text{ et } \mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$, $C = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$, $D = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$.

a. Donner une condition sur p pour que φ soit un projecteur.

b. Montrer que A, B, C et D sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.

c. Montrer φ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

6.102 *Mines PSI 2017* Bastien Lamagnère I

a. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$, et toutes les valeurs propres de A sont de multiplicité 1. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et deux matrices diagonales D et D' telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$.

Soit $D = \mathrm{diag}(d_1 \cdots, d_n)$ et $D' = \mathrm{diag}(d'_1, \cdots, d'_n)$. On pose $f : P \in C_{n-1}[X] \mapsto (P(d_1), \cdots, P(d_n))$.

b. Montrer que f est linéaire et injective.

c. Montrer qu'il existe un polynôme $L \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $L(d_k) = d'_k$.

d. Montrer qu'il existe des complexes $a_0, \cdots, a_{n-1}$ tels que $B = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{n-1} A^{n-1}$. Que peut-on en déduire sur le commutant de A défini par $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$?

e. Est-ce toujours vrai si les valeurs propres de A ne sont plus de multiplicité 1 ?

6.103 *Mines PSI 2017* Antoine Romero-Romero I

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$.

a. Calculer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $A^k + A^{-k}$.

b. Calculer $\det(A)$. Que peut-on dire de n ?

6.104 <u>*Mines PSI 2017*</u> Grégoire Verdès I Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Que dire des valeurs propres de A ?

Soit λ la valeur propre de A de module maximal. On pose $u_n = \sin\left(2\pi \operatorname{Tr}(A^n)\right)$ et $v_n = \sin\left(2\pi\lambda^n\right)$.

b. Déterminer les natures des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$.

6.105 <u>*CCP PSI 2017*</u> Manon Bové II et Alexis Trubert II Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2.

b. Trouver un polynôme annulateur de A et en déduire A^{-1}.

c. Quels sont tous les polynômes qui annulent A ?

6.106 <u>*CCP PSI 2017*</u> Adrien Cassagne I

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On définit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = 2\operatorname{Tr}(M)A$.

a. Montrer que f est un endomorphisme.

b. f est-il diagonalisable ?

6.107 <u>*CCP PSI 2017*</u> Alexandre Chamley I et Elliott Jean-François I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Montrer que A diagonalisable $\Longrightarrow A^2$ diagonalisable.

b. Est-il vrai que A^2 diagonalisable $\Longrightarrow A$ diagonalisable ?

c. Montrer que A^2 diagonalisable et A inversible $\Longrightarrow A$ diagonalisable.

6.108 <u>*CCP PSI 2017*</u> Maxime Lacourcelle I

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 2A^2 - 3A$. La matrice A est-elle inversible ?

6.109 <u>*CCP PSI 2017*</u> Cléa Maricourt I

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

b. Discuter de la diagonalisabilité de A selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

6.110 <u>*CCP PSI 2017*</u> Louise Piton II

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 0$ si $i = j$ et $a_{i,j} = 1$ sinon.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Soit P un polynôme annulateur de A, montrer que les valeurs propres de A sont des racines de P.

c. Calculer $(A + I_n)^2$. En déduire les valeurs propres possibles de A.

d. Le sont-elles effectivement ?

6.111 <u>*CCP PSI 2017*</u> Antoine Romero-Romero II

On considère l'application $f : M \mapsto M + \operatorname{Tr}(M)I_n$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

b. Déterminer un polynôme annulateur de f de degré 2.

c. f est-elle diagonalisable ? f est-elle bijective ? Si oui, calculer f^{-1}.

6.112 *CCP PSI 2017* Roland Tournade II

Soit $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A)$ soit triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux distincts deux à deux. Montrer que A est diagonalisable.

6.113 *E3A PSI 2017* Vincent Meslier

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On veut résoudre l'équation $M^2 = A$.

a. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Trigonaliser A.

c. Montrer que le spectre de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$ est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.

Estimer la dimension des sous-espaces propres correspondants.

d. Montrer que 0 est valeur propre de M si $M^2 = A$.

e. Trouver toutes les matrices M solution de $M^2 = A$.

6.114 *E3A PSI 2017* Grégoire Verdès

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}$ euclidien canonique associé à $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2. Interpréter f. Donner ses éléments caractéristiques.

b. Déterminer l'image par f du plan P d'équation $x - y - z - 5 = 0$.

6.115 *TPE, EIVP PSI 2017* Manon Bové I

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_n$.

Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B de projecteur.

6.116 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Thomas Gerbeaud

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On dit que le système stationnaire discrétisé $X' = AX + BU$ est contrôlable pour un entier $N \in \mathbb{N}^*$ si pour tout $(\widetilde{X_0}, \cdots, \widetilde{X_N}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{N+1}$, il existe $(U_0, \cdots, U_N) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{N+1}$ tel que si on pose $X_0 = \widetilde{X_0}$ et $\forall k \in [\![1; N-1]\!]$, $X_{k+1} = AX_k + BU_k$, alors $\forall k \in [\![0; N]\!]$, $X_k = \widetilde{X_k}$.

a. Déterminer le terme X_k ainsi défini en fonction de k.

b. Soit $C = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$ (matrice définie par bandes).

Si $\operatorname{rang}(C) < n$, montrer qu'il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\forall j \in \mathbb{N}$, ${}^tXA^jB = 0$. Indication : on admettra avant le chapitre sur la réduction qu'il existe un polynôme unitaire de degré n qui annule A.

c. Montrer qu'alors le système n'est contrôlable pour aucune valeur $N \in \mathbb{N}^*$.

d. Si le système n'est pas contrôlable pour un certain entier $N \in \mathbb{N}$, montrer alors que l'application $F : (U_0, \cdots, U_{N-1}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^N \mapsto \sum_{k=0}^{N-1} A^kBU_{N-k-1}$ est linéaire, non surjective.

En déduire qu'il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\forall (U_0, \cdots, U_{N-1}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^N$, ${}^tX\Big(\sum_{k=0}^{N-1} A^kBU_{N-k-1}\Big) = 0$.

6.117 *Centrale Maths1 PSI 2018* Peio Betbeder

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X \in \mathbb{R}^n$ non nul et E_X l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ont X comme vecteur propre.

a. Montrer que E_X est un espace vectoriel.

b. Déterminer E_X. Quelle est sa dimension ?

Question de cours : montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda \in \operatorname{Sp}(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0$.

6.118 *Centrale Maths1 PSI 2018* Anaïs Chaumeil et Amélie Guyot

a. Trouver $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq I_3$ et $A^3 = I_3$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n$.

b. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de A. Montrer que n est pair. Exprimer A^2 en fonction de A et I_n. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, résoudre l'équation $AX = X - B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c. On suppose que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, résoudre l'équation $AX = X - B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

6.119 *Centrale Maths1 PSI 2018* Thibaud Vendrely

Soit $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par $F(A,B) = \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix}$ (par blocs) si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $F(A_1A_2, B_1B_2) = F(A_1,B_1)F(A_2,B_2)$.

b. Donner $\mathrm{Tr}\ (F(A,B))$, $\det(F(A,B))$, rang $(F(A,B))$ grâce à $\mathrm{Tr}\ (A)$, $\mathrm{Tr}\ (B)$, $\det(A)$, $\det(B)$, rang (A), rang (B).

c. Déterminer une condition suffisante sur A et B pour que $F(A,B)$ soit diagonalisable.

6.120 *Mines PSI 2018* Charlotte Beaune et Santiago Monteagudo II

Déterminer toutes les classes de similitude de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

6.121 *Mines PSI 2018* Elisabeth Carreau-Gaschereau II

a. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Montrer que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B.
b. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?
c. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?

6.122 *Mines PSI 2018* Anaïs Chaumeil II et Adrien Sarrade II

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $v_1, \cdots, v_n$ des endomorphismes non nuls et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ des réels tous distincts. On suppose que $\forall k \in [\![0;n]\!],\ u^k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k v_i$.

a. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(\lambda_i)v_i$; puis que u est diagonalisable.

b. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k v_i$.

c. Trouver des polynômes $(L_1, \cdots, L_n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^n$ tels que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \forall k \in [\![1;n]\!],\ L_i(\lambda_k) = \delta_{i,k}$.

d. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.
e. Que peut-on dire des dimensions des sous-espaces propres de u si $\dim(E) = n$?

6.123 *Mines PSI 2018* Gauthier Crosio II

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f, u, v trois endomorphismes de E et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'on ait $\begin{cases} f = & \lambda u + \mu v \\ f^2 = & \lambda^2 u + \mu^2 v \\ f^3 = & \lambda^3 u + \mu^3 v \end{cases}$. Montrer que f est diagonalisable.

6.124 *Mines PSI 2018* Mathilde Dutreuilh II

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$.

a. Montrer que u^2 est un projecteur.

b. Que peut-on dire de u si $\mathrm{Tr}\ (u) = $ rang (u) ?

6.125 *Mines PSI 2018* Elio Garnaoui II

a. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ dont $a = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine.

Déterminer une expression de a et $b = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ avec des racines.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$.
Montrer que si $\text{Tr}\,(A) \in \mathbb{Q}$, alors n est un multiple de 4.
c. Réciproquement, si $n \in \mathbb{N}^*$ est un multiple de 4, montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'on ait à la fois $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$ et $\text{Tr}\,(A) \in \mathbb{Q}$.

6.126 *Mines PSI 2018* Martin Gros I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, déterminer l'inverse de $P = \begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

b. On suppose $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$. Montrer que toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit $C = DB - AD$ avec une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire que $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ pour toute $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Réciproquement, montrer que $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ C = DB - AD \Longrightarrow \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

6.127 *Mines PSI 2018* Lucie Jandet III

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

6.128 *Mines PSI 2018* Pauline Lamaignère I

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $C(f) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ f = f \circ u\}$.

a. Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ qui est stable par composition.

b. On suppose dans cette question que E est de dimension finie et que f est diagonalisable.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \in C(f) \Longleftrightarrow (\forall \lambda \in \text{Sp}(f),\ E_\lambda(f)$ est stable par $u)$. En déduire $\dim(C(f))$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : M \mapsto {}^tM$. Déterminer $\dim(C(f))$.

6.129 *Mines PSI 2018* Pierre Le Bouille II

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ des symétries telles que $f \circ g + g \circ f = 0$.

a. Montrer que $\dim(E)$ est pair.

b. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

6.130 *Mines PSI 2018* Claire Raulin II

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

6.131 *Mines PSI 2018* Titouan Sancier II

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f^2 - \text{id}_E = 0$ et $\text{Tr}\,(f) \in \mathbb{Q}$.

Montrer que n est un multiple de 3.

6.132 *Mines PSI 2018* Benoit Souillard II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^2 \neq 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists B_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ A = B_n^n$.

6.133 *Mines PSI 2018* Thibaud Vendrely II

Soit $P = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X^2 + 4X + 4$.

a. Trouver quelles valeurs parmi $-2, -1, 0, 1, 2$ sont racines de P.

b. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

c. Trouver les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}\,(M^3) = 0$, $\det(M) = \pm 1$ et $P(M) = 0$.

6.134 *Mines PSI 2018* Nicolas Ziegler I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

a. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.

b. Montrer que $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = Y$.

6.135 *CCP PSI 2018* Charlotte Beaune et Florian Gaboriaud II

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tels que $AB - BA = \alpha A$.

a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k B - BA^k = k\alpha A^k$.

b. Montrer que A est nilpotente. Indication : s'intéresser à $L : M \mapsto MB - BM$.

6.136 *CCP PSI 2018* Peio Betbeder et Paul Simon I

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

b. Discuter de la diagonalisabilité de A selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

6.137 *CCP PSI 2018* Elisabeth Carreau-Gaschereau II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + \mathrm{Tr}\,(M)A$.

a. Montrer que $\mathrm{Tr}\,(A) \neq -1 \Longrightarrow f$ bijective.

b. On suppose maintenant $\mathrm{Tr}\,(A) = -1$. Donner $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\,(M) = 0\}$.

c. On revient au cas général, soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $M + \mathrm{Tr}\,(M)A = B$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6.138 *CCP PSI 2018* Mathilde Dutreuilh II

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a. Montrer que si E est de dimension finie et f est diagonalisable, alors f^2 l'est aussi.

b. On suppose que $f^3 = f$. Montrer que si f est injective alors f est surjective.

b. On suppose que $f^3 = f$. Montrer que si f est surjective alors f est injective.

Question de cours : donner une CNS de diagonalisabilité d'une matrice carrée.

6.139 *CCP PSI 2018* Santiago Monteagudo II

Soit $n \geqslant 2$ et $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $a_n \neq 0$ et $a_1 \cdots a_{n-1} \neq 0$.

On définit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la façon suivante : $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

a. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors M est diagonalisable. Trouver ses valeurs propres.

b. Trouver un exemple avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ où M n'est pas diagonalisable.

c. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

6.140 *CCP PSI 2018* Claire Raulin I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $P = \chi_A = \chi_B$.

a. Montrer que si P possède n racines distinctes alors les A et B sont semblables.

b. Trouver deux telles matrices carrées telles que A et B ne sont pas semblables.

6.141 *CCP PSI 2018* Adrien Sarrade I Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a. A est-elle diagonalisable ? Inversible ? Donner ses éléments propres.

b. Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. Donner les éléments propres de B.

6.142 *E3A PSI 2018* Vincent Barreau

On se donne quatre points A_0, B_0, C_0 et D_0 dans le plan qui forment un parallélogramme $A_0B_0C_0D_0$. On construit ensuite par récurrence quatre suites de points par $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1}$ (resp. B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}) est le milieu du segment $[A_nB_n]$ (resp. $[B_nC_n]$, $[C_nD_n]$, $[D_nA_n]$).

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ A_nB_nC_nD_n$ est un parallélogramme.

b. Calculer les affixes des points A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1} en fonction de celles de A_n, B_n, C_n, D_n.

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$.

6.143 *E3A PSI 2018* Anaïs Chaumeil

Soit $E = C^2([0;1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ et $x \in [0;1]$, on pose $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{Min}(x,t)f(t)dt$.

a. Montrer que T ainsi définie est un endomorphisme de E.

b. Soit f un vecteur propre de T. Montrer que f satisfait une équation différentielle de la forme $y'' = \beta y$ avec β à déterminer en fonction de la valeur propre associée à f.

c. Réciproquement, si f est solution non nulle de $y'' = \beta y$, à quelle(s) condition(s) f est vecteur propre de T.

d. Déterminer le spectre de T.

6.144 *Petites Mines PSI 2018* Baptiste Egreteau II

a. Soit B et C deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$.

Les matrices $xI_n - B$ et $xI_n - C$ sont-elles semblables ? Et $(xI_n - B)^{-1}$ et $(xI_n - C)^{-1}$?

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $\mathrm{Tr}\left((xI_n - A)^{-1}\right) = \dfrac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)}$.

6.145 *Centrale Maths1 PSI 2019* Elaia Mugica

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ B & 0_n \end{pmatrix}$.

a. On suppose M diagonalisable. Montrer que AB est diagonalisable.

On suppose dorénavant AB diagonalisable et inversible.

b. Montrer que M est diagonalisable.

c. Montrer que M est inversible de deux manières différentes.

6.146 *Mines PSI 2019* Tom Boileau II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

6.147 *Mines PSI 2019* Thomas Brémond II

Pour $f \in E = C^0([0;1], \mathbb{R})$, on définit $T(f) : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $T(f)(x) = (1-x)\displaystyle\int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 (1-t)f(t)dt$.

a. Montrer que T est un endomorphisme injectif de E.

b. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de T.

6.148 *Mines PSI 2019* Charles Broquet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = nXP(X) - (X^2-1)P'(X)$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Trouver les solutions polynomiales sur $]-1;1[$ de l'équation $(E)\ :\ nxy - (x^2-1)y' = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

c. Quels sont les valeurs propres et sous-espaces propres de f ? Est-il diagonalisable ?

d. Déterminer $\mathrm{Tr}\,(f)$, $\det(f)$, rang (f).

6.149 *Mines PSI 2019* Mathis Chénet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

a. Donner l'inverse de $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$.

b. Montrer que $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ DB - AD = C$.

c. Montrer que $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ sont semblables.

d. N est-elle diagonalisable ? Commenter le cas $n = 1$.

e. Montrer que N est diagonalisable d'une autre manière.

6.150 *Mines PSI 2019* Carla Chevillard II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A + I_n = 0$.

a. Calculer $\det(A)$.

b. Montrer que n est pair et que $\mathrm{Tr}\,(A) \in \mathbb{N}$.

Question de cours : montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et que $m_\lambda(A) = m_{\overline{\lambda}}(A)$.

6.151 *Mines PSI 2019* Kévin Dufrechou II

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

a. La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

b. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

6.152 *Mines PSI 2019* Fabien Dupuis II

Soit $k \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Si $k \in \mathbb{R}$, la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? Si oui, la diagonaliser.

b. Si $k \in \mathbb{C}$, pour quelles valeurs de k la matrice A est-elle diagonalisable ?

6.153 *Mines PSI 2019* Mathis Girard II

a. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$. Montrer que A est soit diagonalisable, soit nilpotente.

b. Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$, A est-elle forcément diagonalisable ou nilpotente ?

6.154 *Mines PSI 2019* Lola Josseran II

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

a. Caractériser l'endomorphisme $f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

b. Donner les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

6.155 *Mines PSI 2019* Benoît Le Morvan II

a. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ dont $a = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine.

Déterminer une expression de a et $b = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ avec des racines.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$.
Montrer que si $\mathrm{Tr}\,(A) \in \mathbb{Q}$, alors n est un multiple de 4.

c. Réciproquement, si $n \in \mathbb{N}^*$ est un multiple de 4, montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'on ait à la fois $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$ et $\mathrm{Tr}\,(A) \in \mathbb{Q}$.

6.156 *Mines PSI 2019* Enola Soenen II

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que A soit diagonalisable.

b. Si A est diagonalisable, déterminer $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \alpha_n A + \beta_n I_4$.

6.157 *Mines PSI 2019* Tanguy Sommet I

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que : A diagonalisable $\iff (\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X],\ \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ Q(M) = A)$.
Questions de cours : conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité.

6.158 *CCP PSI 2019* Augustin Aumont et Enola Soenen II

Soit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ et $\varphi : f \mapsto g$ où g est défini par $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ si $x \in]0;1]$.

a. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

b. φ est-il surjectif ? Montrer que 0 n'est pas valeur propre de φ.

c. Montrer que 1 est valeur propre de φ. Déterminer $E_1(\varphi)$.

d. Déterminer les autres valeurs propres de φ et leurs espaces propres associés.

6.159 *CCP PSI 2019* Réjane Bastien-Amaré et Fabien Dupuis I

On donne $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ où A et B sont deux matrices complexes, carrées de taille n, qui commutent.

a. Montrer que si U est semblable à V, pour tout polynôme R, $R(U)$ est semblable à $R(V)$.

b. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.

c. Montrer que si A est diagonalisable et B nulle, alors M est diagonalisable.

d. Démontrer la réciproque.

6.160 *CCP PSI 2019* Tom Boileau et Charles Broquet II

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$. On définit $M_n(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $M_n(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$.

a. Pour $n \geqslant 3$, trouver a et b en fonction de x tels que $\det(M_n(x)) = a\det(M_{n-1}(x)) + b\det(M_{n-2}(x))$.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on pose $\Delta_n = \det(M_n(2\cos(\theta))$.

b. Pour $n \geqslant 3$, donner Δ_n en fonction de Δ_{n-1}, Δ_{n-2} et θ. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = \dfrac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin(\theta)}$.

c. La matrice $M_n(x)$ est-elle diagonalisable ?

d. Trouver les valeurs propres de $M_n(x)$.

6.161 *CCP PSI 2019* Axel Brulavoine II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.
a. Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable.
b. Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.
c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer que $\mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$.
d. Montrer que la réciproque de la question **a.** est vraie si u est bijective.

6.162 *CCP PSI 2019* Mathis Chénet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,j} > 0$ et $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

a. Montrer que 1 est valeur propre de A.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que ${}^tX = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ un vecteur propre associé à λ.
Soit $k \in [\![1;n]\!]$ l'un des indices tel que $|x_k| = \mathrm{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

b. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$ et que $|a_{k,k} - \lambda| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j}|$.

c. On suppose que $|\lambda| = 1$. Montrer que $\lambda = 1$.

6.163 *CCP PSI 2019* Thomas Crété et Léo Simplet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$.
a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule M, les valeurs propres de M sont des racines de P.
b. On suppose que M est symétrique. Montrer que M est diagonalisable et que $\mathrm{Tr}\,(M) \times \det(M) \neq 0$.
c. On ne suppose plus M symétrique. Montrer que M est toujours diagonalisable.
d. Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

6.164 *CCP PSI 2019* Louis Destarac et Victor Margueritte II

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ et $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.
a. Montrer que 1 est valeur propre de f.
b. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

c. Trouver une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6.165 *CCP PSI 2019* Romain Galea II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \text{Tr}\,(A^n)$.

a. En utilisant un polynôme annulateur de A, établir une relation entre u_{n+3}, u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.

b. En déduire que $\forall n \geqslant 2,\ u_n \in \mathbb{N}^*$.

c. Étudier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{u_n}$.

6.166 *CCP PSI 2019* Lola Josseran II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : P \mapsto P(1 - iX)$.

a. Montrer que φ est un endomorphisme de $E = \mathbb{C}_n[X]$.

b. Montrer que si $Q \in \mathbb{C}[X]$ est annulateur de φ, les valeurs propres complexes de φ sont des racines de Q.

c. Calculer φ^4. En déduire que φ est bijective et diagonalisable.

d. Quelles sont les valeurs propres possibles de φ ? Montrer que $1 \in \text{Sp}(\varphi)$.

e. Trouver un vecteur propre de degré 1 associé à la valeur propre $-i$.

f. Retrouver les résultats de la question **c.** avec une autre méthode et en déduire le spectre de φ.

Donner aussi la dimension des différents sous-espaces propres.

6.167 *CCP PSI 2019* Thomas Méot I

a. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

Soit pour les deux prochaines questions $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ tel que $C \neq 0_n$ et $AC = CB$.

b. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(A)C = CP(B)$.

c. En déduire que A et B ont au moins une valeur propre commune.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ tel que A et B ont une valeur propre commune.

d. Existe-t-il une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AC = CB$?

6.168 *CCP PSI 2019* Tanguy Sommet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f_A(M) = AM$.

a. Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $A^2 = A$ si et seulement si f_A est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.

d. Construire un vecteur propre de f_A (resp. A) via un vecteur propre de A (resp. f_A).

e. Montrer que A et f_A ont le même spectre.

6.169 *CCP PSI 2019* Julien Tissot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$.

a. Montrer que les valeurs propres de A sont racines de $P = X^3 - X^2 + X - 1$.

b. En déduire le déterminant de A.

c. Montrer que $\text{Tr}\,(A)$ est un entier.

6.170 *CCP PSI 2019* Quentin Vacher II

Soit $n \geqslant 2$ et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Soit $\ell : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, $a \in E$ et $f : E \to E$ défini par $f(x) = \ell(a)x - \ell(x)a$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de E. Calculer $f(a)$.

On suppose pour les trois prochaines questions que $\ell(a) \neq 0$.

b. Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_E$. Montrer que $x \in \mathrm{Vect}(a)$. En déduire $\mathrm{Ker}(f)$.

c. Si $x \in \mathrm{Ker}(\ell)$, calculer $f(x)$. En déduire le spectre de f et les sous-espaces propres associés.

d. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

On suppose pour les deux prochaines questions que $\ell(a) = 0$.

e. Calculer $f(\mathrm{Ker}(\ell))$. Déterminer f^2 et en déduire un polynôme annulateur de f.

f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

6.171 *Petites Mines PSI 2019* Réjane Bastien-Amaré II

On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = & \dfrac{x_n}{4} + \dfrac{y_n}{2} + \dfrac{z_n}{2} \\ y_{n+1} = & \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{y_n}{4} + \dfrac{z_n}{2} \\ z_{n+1} = & \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{y_n}{2} + \dfrac{z_n}{4} \end{cases}$.

Montrer que ces trois suites convergent et donner leurs limites en fonction de x_0, y_0 et z_0.

6.172 *ICNA PSI 2019* Léa Deveyneix II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_n$.

Que pouvez-vous dire de la matrice A ?

6.173 *X PSI 2020* Matthieu Darius II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ et la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le polynôme caractéristique P de C.

On note $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ les racines complexes de P.

b. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_k = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^k)$ est à coefficients entiers.

6.174 *X PSI 2021* Arthur Riché I

Soit $n \geqslant 1$ et E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $E \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{0\}$.

Quelles sont les dimensions possibles pour E ? Indication : tester pour les petites valeurs de $d = \dim(E)$.

6.175 *ENS Cachan PSI 2021* Antoine Greil

Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P soit surjectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P soit injectif sur $\mathbb{R}$.

c. Supposons $\deg(P) \geqslant 2$. Montrer que $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = P(M)$ n'est pas injective.

d. Supposons que la fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective. Montrer que la restriction de la fonction f de la question précédente est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6.176 *Centrale Maths1 PSI 2021* Tinaël Gelpe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres distinctes sont $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ avec $p \geqslant 2$.

On suppose de plus que $\forall i \in [\![2; p]\!],\ |\lambda_i| < |\lambda_1|\ \ (*)$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Tr}\,(A^k) \neq 0$, on pose $t_k = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(A^{k+1})}{\mathrm{Tr}\,(A^k)}$.

a. Montrer que les t_k sont définis à partir d'un rang k_0 et que $(t_k)_{k \geqslant k_0}$ converge vers une limite à déterminer.

b. Les résultats de la question **a.** sont-ils encore vérifiés si $(*)$ ne l'est plus ?

c. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d. Déterminer $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \frac{A^k}{k}$.

6.177 *Centrale Maths1 PSI 2021* Clément Lérou

Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P(X+1)$.

a. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}\,(g)$ si $g : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

c. Déterminer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(g^k)$ et $\mathrm{Im}\,(g^k)$.

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de la restriction de f à $R_n[X]$ dans la base canonique.

On pose aussi la matrice $B = A^tA$.

d. Déterminer A et $\det(A)$. A est-elle diagonalisable ?

e. Trouver l'inverse de B.

Questions de cours :

- Donner l'inégalité de Markov.
- Donner l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Énoncer le théorème spectral version vectorielle.

6.178 *Mines PSI 2021* Mathilde Arnaud I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $C = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \mid \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M^T) = f(M)^T \right\}$. On note traditionnellement $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques.

a. Montrer que C est un sous-espace vectoriels de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

b. Montrer que $f \in C$ si et seulement si $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont stables par f.

c. En déduire la dimension de C.

d. Exhiber un endomorphisme non diagonalisable de C.

6.179 *Mines PSI 2021* Thomas Boudaud II

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.

b. Quelle est la structure de $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$? Déterminer sa dimension.

c. Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$) telles que $M^2 = A$?

6.180 *Mines PSI 2021* Aloïs Doucet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $B = A^3 + A + I_n$.

a. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, exprimer A comme un polynôme en B.

b. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, peut-on exprimer A comme un polynôme en B ?

6.181 *Mines PSI 2021* Tinaël Gelpe I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?

Indication : on pourra commencer par les petites valeurs de n.

6.182 *Mines PSI 2021* Pierre-Issa Lacourte II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice d'un projecteur.

Soit $u, v, w : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définis par $u(M) = MA$, $v(M) = AM$ et $w(M) = AM - MA$.

a. u, v sont-ils diagonalisables ?

b. Quelles peuvent-être les valeurs propres de w ?

c. w est-il diagonalisable ?

6.183 *Mines PSI 2021* Clément Lopez I

Soit $E = C^\infty([0;1], \mathbb{R})$ et T définie sur E par $T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de E.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;1]$ et $f \in E$, donner une expression de $T^n(f)(x)$ sous forme de somme.

c. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} T^n(f)(0)$.

d. Trouver de même, pour $x \in [0;1]$, la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} T^n(f)(x)$.

e. Montrer que 1 est valeur propre de T et déterminer $E_1(T)$.

f. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$, est-ce que k peut être valeur propre de T ?

g. Pour $f \in E$, calculer $\big(T(f)\big)'$. Déterminer $E_{1/2}(T)$.

6.184 *Mines PSI 2021* Baptiste Pozzobon I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$. On pose $r = \mathrm{rang}\,(f)$.

a. Montrer que $g : H \to \mathrm{Im}\,(f)$ définie par $g(x) = f(x)$ est un isomorphisme.

b. Montrer qu'il existe deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et $\mathbb{C}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$.

c. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rang}\,(C) = r$. Montrer qu'il existe $(P, Q) \in (GL_n(\mathbb{C})^2$ tel que $C = PJ_rQ$.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r telle que $AC = CB$.

d. Montrer que les matrices A et B admettent au moins r valeurs propres en commun (comptées avec leurs ordres de multiplicité).

e. Donner un argument plus rapide pour montrer que si C est inversible, alors A et B admettent au moins n valeurs propres en commun (comptées avec leurs ordres de multiplicité).

6.185 *Mines PSI 2021* Arthur Riché II

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Trouver le spectre de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Justifier l'existence de $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et de $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.

c. Donner une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d. Déterminer l'ensemble des matrices $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $TN = NT$.

e. En déduire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

6.186 *Mines PSI 2021* Arthur Sureau I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on définit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = \big((\alpha X + \beta)P\big)'$.

a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$, diagonaliser l'application φ_n induite par φ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

6.187 *Mines PSI 2021* Guillaume Touly II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k = \chi_M$ son polynôme caractéristique.

Montrer que $\forall \lambda \in Sp(M),\ |\lambda| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$.

6.188 *CCINP PSI 2021* Mathilde Arnaud II

Soit $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k = 1$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = x - \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big)v$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b. Pour $y \in \mathbb{R}^n$, montrer que $y \in \text{Im}\,(f) \iff f(y) = y$.

c. Justifier que $\text{Im}\,(f) \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^n$. Qu'en déduire ?

d. Expliciter les sous-espaces propres de f.

6.189 *CCINP PSI 2021* Maëva Berland II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$.

a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule M, les valeurs propres de M sont des racines de P.

b. On suppose que M est symétrique. Montrer que M est diagonalisable et que $\text{Tr}\,(M) \times \det(M) \neq 0$.

c. On ne suppose plus M symétrique. Montrer que M est toujours diagonalisable.

d. Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

6.190 *CCINP PSI 2021* Julie Coheleach II

Soit E un espace de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des valeurs propres distinctes de f.

a. Montrer que $\varphi : P \mapsto (P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.

b. Montrer que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g.

c. Montrer qu'il existe une base de E composée de vecteurs propres communs à f et g.

d. Montrer l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

e. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E)\ |f \circ g = g \circ f\}$.

6.191 *CCINP PSI 2021* Johan Haramboure II

a. Énoncer le théorème de CAYLEY-HAMILTON pour une matrice carrée.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que, quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, les matrices $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

Soit, dans la suite de cet exercice, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

c. Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire une expression par blocs de $P(M)$ si $P \in \mathbb{R}[X]$.

d. Montrer que si M est diagonalisable alors A l'est aussi.

e. Montrer que si M est diagonalisable alors $A = 0$.

6.192 *CCINP PSI 2021* Antonio Treilhou II

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $R(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{Tr}\,(M^n)$ et $v_n = \mathrm{Tr}\,\big(R(a, b)^n\big)$.

a. Montrer que M est diagonalisable.

b. Exprimer $R(a, b)$ en fonction de M et I_3.

c. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente à valeurs entières.

d. Montrer qu'on peut choisir a et b de sorte que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

6.193 *CCINP PSI 2021* Adeline Vaudrey II

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f a la même matrice A dans toutes les bases de E.

a. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$, montrer que $PA = AP$.

b. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $B - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{K})$. En déduire que $BA = AB$.

c. En déduire la forme de la matrice A. Comment appelle-t-on l'endomorphisme f ?

6.194 *Mines-Télécom PSI 2021* Juliette Maricourt II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice $A = (\, C_1 \quad \cdots \quad C_n \,) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par ses colonnes et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a. Que dire de X si $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j C_j = 0$?

b. Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sans calculer son polynôme caractéristique.

6.195 *X PSI 2022* Olivier Courmont IV

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

a. Calculer χ_{A_m}.

b. Les matrices A_1 et A_2 sont-elles diagonalisables ?

c. Traiter la diagonalisabilité de A_m dans le cas général.

6.196 <u>*X PSI 2022*</u> Lucas Lacampagne II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u(e_i) = e_{i+1}$ si $i \in [\![1; n-1]\!]$ et $u(e_n) = 0$.
Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par u.

6.197 <u>*X PSI 2022*</u> Lucas Lacampagne III

Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant.
a. Soit $n = 2p \in \mathbb{N}^*$ un entier pair, montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.
Indication : considérer les petites valeurs de $\deg(P)$.
b. Que se passe-t-il si on suppose $n = 2p + 1$ impair ?

6.198 <u>*ENS Cachan PSI 2022*</u> Jimmy Guertin II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ avec $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

6.199 <u>*ENS Cachan PSI 2022*</u> Maxence Rossignol I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques.
a. Montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.
b. Trouver A et B symétriques telles que AB n'est pas symétrique.
c. Montrer que s'il existe une base de vecteurs propres communs à A et à B, alors AB est symétrique.

6.200 <u>*Centrale Maths1 PSI 2022*</u> Louis Bardinet

Soit $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, E un $\mathbb{R}$-espace de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $f^2+2f+\alpha\,\mathrm{id}_E = 0$.
a. Si $n = 2$ et $\alpha = 1$, que dire de f ?

On suppose dans la suite que $\alpha > 1$.

b. Montrer que n est pair.

c. Si $n = 2$, construire une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}$.

d. Si $n = 2p > 2$, construire une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale par blocs.

6.201 <u>*Mines PSI 2022*</u> Amandine Darrigade I

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a. La matrice A est-elle diagonalisable ?
b. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $AM = MA$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$.
c. Résoudre l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

6.202 <u>*Mines PSI 2022*</u> Lucas Lacampagne II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?
Indication : on pourra commencer par les petites valeurs de n.

6.203 <u>*Mines PSI 2022*</u> Peio Lanot I Soit $n \geqslant 2$, $C \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $L \neq 0 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $A = CL - I_n$.
a. Peut-on avoir $A = -I_n$?
b. Montrer que $A^2 + (2 - LC)A + (1 - LC)I_n = 0$.
c. Dans quel cas A est une matrice de symétrie ?
d. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, montrer que λ est racine d'un polynôme de degré 2.
e. A est-elle diagonalisable ? Donner ses sous-espaces propres.

6.204 *Mines PSI 2022* Margaux Millaret I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Calculer χ_A.

b. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

6.205 *Mines PSI 2022* Florian Picq I

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_k : x \mapsto \text{ch}\,(kx)$ et $g_k : x \mapsto \text{sh}\,(kx)$ définies sur $\mathbb{R}$ des vecteurs de $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pose $F = \text{Vect}(f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n)$ et Φ définie sur E par $\Phi(f) = f'' - 3f' + 2f$.

a. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n)$ est une base de F.

b. Montrer que la restriction de Φ à F est un endomorphisme qu'on note Ψ.

c. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

6.206 *Mines PSI 2022* Élouan Princelle II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que : A diagonalisable $\Longleftrightarrow (\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X],\ \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ Q(M) = A)$.

6.207 *Mines PSI 2022* Maxence Rossignol II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et deux matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = B$.

b. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ AB^k - B^kA = kB^k$.

c. En déduire que B est nilpotente.

6.208 *Mines PSI 2022* Alban Soyez II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Calculer χ_A.

b. Trouver une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.

6.209 *CCINP PSI 2022* Naïs Baubry II

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Trouver toutes les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par a.

Soit dans les questions suivantes un plan P de $\mathbb{R}^3$ stable par a. On définit alors l'endomorphisme a' de P induit par a dans P, qu'on note $a' = a_P$.

c. Montrer que $\chi_{a'}$ divise χ_a.

d. En déduire que $P \subset \text{Ker}\left((a - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2\right)$.

e. Que vaut donc P ?

6.210 <u>*CCINP PSI 2022*</u> Anna Decrock II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a. Trouver les valeurs propres de A.

b. Est-ce que la matrice A est diagonalisable ?

c. Donner des vecteurs propres u et v de A et un vecteur w tels que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une base de de $\mathbb{R}^3$.

d. Montrer que A est trigonalisable et la trigonaliser.

6.211 <u>*CCINP PSI 2022*</u> Léo Ducos-Tourenne II et Anatole Rousset II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f_A(M) = AM$.

a. Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $A^2 = A$ si et seulement si f_A est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.

d. Construire un vecteur propre de f_A via un vecteur propre de A.

e. Construire un vecteur propre de A via un vecteur propre de f_A.

f. Montrer que A et f_A ont le même spectre.

6.212 <u>*CCINP PSI 2022*</u> Colin Herviou-Laborde et Élouan Princelle II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule M, les valeurs propres de M sont des racines de P.

b. On suppose que M est symétrique. Montrer que M est diagonalisable et que $\operatorname{Tr}(M) \times \det(M) \neq 0$.

c. On ne suppose plus M symétrique. Montrer que M est toujours diagonalisable.

d. Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

6.213 <u>*CCINP PSI 2022*</u> Fares Kerautret I et Louis Lacarrieu I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) = \emptyset$.

a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de A, les valeurs propres de A sont racines de P.

b. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.

c. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.

d. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = M$.

6.214 <u>*CCINP PSI 2022*</u> Paul Lafon II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB - BA = A$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = MB - BM$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Calculer $\operatorname{Tr}(A)$. Généraliser en calculant, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Tr}(A^k)$.

c. Montrer que A est nilpotente.

6.215 <u>*CCINP PSI 2022*</u> Joël Lascoumes et Jade Mirassou II

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ? Quels sont ses éléments propres ?

b. Montrer qu'il existe une matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.

c. Montrer que toute matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $R^2 = A$ est diagonalisable.

d. Combien y a-t-il de matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$?

6.216 *CCINP PSI 2022* Paul Mayé II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{Tr}\,(A^n)$.

a. En utilisant un polynôme annulateur de A, établir une relation entre u_{n+3}, u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.

b. En déduire que $\forall n \geqslant 2,\ u_n \in \mathbb{N}^*$.

c. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Exprimer u_n en fonction des valeurs propres de A.

d. En déduire que $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{u_n}$ converge.

6.217 *CCINP PSI 2022* Manon Odelot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer χ_B en fonction de χ_A. En déduire le spectre de B en fonction de celui de A.

b. Si A est inversible et a n valeurs propres distinctes, montrer que B est diagonalisable.

c. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.

d. Donner un exemple où A est diagonalisable et B ne l'est pas.

e. Montrer que si A est inversible et diagonalisable, alors B est aussi diagonalisable.

6.218 *CCINP PSI 2022* Ewan Sarrazin I

On définit sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'application ϕ qui à tout polynôme $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne du polynôme X^2P par $D = X^4 - 1$.

a. Montrer que ϕ définit un endomorphisme de E.

b. Montrer que ϕ est diagonalisable, donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

c. Est-ce que ϕ est inversible ? Si oui, donner ϕ^{-1}.

6.219 *CCINP PSI 2022* Baptiste Savarit II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On note Id l'application identité de $\mathbb{C}^n$.

a. Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable.

b. Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer que $\mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \lambda\mathrm{Id})$.

d. Montrer que la réciproque de la question **a.** est vraie si u est bijective.

6.220 *CCINP PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie n, f un endomorphisme de E qui admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

a. Montrer que $\varphi : P \mapsto (P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.

b. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g, puis que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g.

c. En déduire qu'il existe une base de E composée de vecteurs propres communs à f et g.

d. Montrer l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

e. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

6.221 *Mines-Télécom PSI 2022* Jade Mirassou I

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(u^k) \subset_k \mathrm{er}(u^{k+1})$.

b. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p+1})$, montrer que $\forall \ell \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(u^{p+\ell}) = \mathrm{Ker}(u^p)$.

Supposons u nilpotent et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$.

c. Déterminer le polynôme caractéristique de u.

d. En déduire que $q \leqslant n$.

6.222 *Mines-Télécom PSI 2022* Manon Odelot I

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer B^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

c. Comment aurait-on pu faire autrement pour **b.** ?

6.223 *Mines-Télécom PSI 2022* Paul Sterlin I

Soit l'application Φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ définie par $\Phi(P) = \displaystyle\int_X^{X+1} P(t)\mathrm{d}t$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note Φ_n l'application induite par Φ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

a. Montrer que Φ_2 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Φ_2 est-il diagonalisable ?

c. Montrer que Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

6.224 *Navale PSI 2022* Naïs Baubry II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$.

c. Trouver les plans stables par A.

6.225 *ENS Cachan PSI 2023* Alban Dujardin I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \Big\{ z \in \mathbb{C} \;\Big|\; |z - a_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \Big\}$.

Indication : écrire le système $Au = \lambda u$ en une ligne i quelconque.

6.226 *Centrale Maths1 PSI 2023* Antoine Campos

Soit $S = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$. On note, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $D(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

a. Montrer que S est semblable à une matrice $D(a, b)$ que vous déterminerez.

b. Montrer que S est semblable à une matrice à diagonale nulle que vous déterminerez.

c. En étudiant l'application $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = D(1,2)M - MD(1,2)$, montrer qu'il existe un couple $(C, D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ tel que $S = CD - DC$.

6.227 *Centrale Maths1 PSI 2023* Marius Desvalois

Soit $E = \mathbb{C}^4$, $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u^2 = v^2 = \mathrm{id}_E$ et $u \circ v = -v \circ u$.

a. Montrer que $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{Tr}\,(v) = 0$.

b. Montrer que u est diagonalisable et que -1 et 1 sont valeurs propres doubles de u.

c. Soit (x, y) une base de $E_1(u)$. Montrer que la famille $(v(x), v(y))$ est une base de $E_{-1}(u)$ et que la famille $(x, y, v(x), v(y))$ est une base de E.

d. Montrer que $u \circ v$ est diagonalisable et donner les éléments propres de $u \circ v$.

6.228 *Centrale Maths1 PSI 2023* Clément Gallice

Soit E l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $P \in E$, on pose $L(P) : x \mapsto e^{-x} \int_{-\infty}^{x} P(t)e^t dt$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que f est intégrable en $-\infty$.

a. Montrer que $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout réel x.

b. Montrer que L est un endomorphisme de E.

c. Déterminer les éléments propres de L.

6.229 *Centrale Maths1 PSI 2023* Sacha Meslier

Soit un entier $q \geqslant 2$ et deux familles $(a_1, \cdots, a_q)$ et $(b_1, \cdots, b_{q-1})$ de réels strictement positifs. On définit alors la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_q \\ b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{q-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

a. Justifier que 0 n'est pas valeur propre de A.

b. Montrer que A^q a tous ses coefficients strictement positifs.

c. Donner la dimension des sous-espaces propres associés aux valeurs propres complexes de A.

d. Montrer que A admet une unique valeur propre strictement positive.

6.230 *Mines PSI 2023* Bader Ben Amira I

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $T(P) = P(1)(X^2 - X) + P(-1)(X^2 + X)$.

a. Montrer que T est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans la base canonique de E.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}\,(T)$.

c. En déduire les sous-espaces propres de T. T est-il diagonalisable ?

6.231 *Mines PSI 2023* Arthur Biot III

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Déterminer une matrice triangulaire T semblable à A.

c. Quelle est la dimension du commutant $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$?

6.232 *Mines PSI 2023* Rebecca Blé III

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

a. Montrer que M est diagonalisable. Donner les valeurs propres possibles de M.

b. La matrice M est-elle forcément symétrique ?

6.233 *Mines PSI 2023* Mathys Bureau I

Soit $E = C^\infty([0;1], \mathbb{R})$ et T définie sur E par $T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de E.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;1]$ et $f \in E$, donner une expression de $T^n(f)(x)$ sous forme de somme.

c. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} T^n(f)(0)$.

d. Trouver de même, pour $x \in [0;1]$, la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} T^n(f)(x)$.

e. Montrer que 1 est valeur propre de T et déterminer $E_1(T)$.

f. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$, est-ce que k peut être valeur propre de T ?

g. Pour $f \in E$, calculer $\big(T(f)\big)'$. Déterminer $E_{1/2}(T)$.

6.234 *Mines PSI 2023* Hugo Delval I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}$.

a. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n$.

b. Diagonaliser A_n.

c. En déduire la convergence et la limite de la suite $(A_n^n)_{n \geqslant 1}$.

6.235 *Mines PSI 2023* Raphaël Déniel II et Tom Graciet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = Y$.

(ii) $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX = XB \Longrightarrow X = 0$.

(iii) $\chi_B(A)$ est une matrice inversible.

(iv) A et B n'ont aucune valeur propre commune.

6.236 *Mines PSI 2023* Esteban Maurer II

a. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Montrer que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B.

b. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?

c. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?

6.237 *Mines PSI 2023* Arthur Melnitchenko I

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = 32$ et $A^2 - 6A + 8I_3 = 0$.

On définit $\varphi_A : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par la relation $\varphi_A(B) = AB$. Déterminer $\mathrm{Tr}\,(\varphi_A)$.

6.238 *Mines PSI 2023* Sacha Meslier II

Soit $k \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Si $k \in \mathbb{R}$, la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? Si oui, la diagonaliser.

b. Si $k \in \mathbb{C}$, pour quelles valeurs de k la matrice A est-elle diagonalisable ?

6.239 *Mines PSI 2023* Antoine Notelle-Maire II

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \sin(2\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(2\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & 0 & \sin(2\alpha) \end{pmatrix}$. Étudier la diagonalisabilité de $A(\alpha)$ en fonction de α.

6.240 *Mines PSI 2023* Marie-Lys Ruzic II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et un ensemble $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ tel que :

- $\forall A \in G,\ A^{-1} \in G$.
- $\exists p \in \mathbb{N}^*,\ \forall A \in G,\ A^p = I_n$.
- $\forall (A, B) \in G^2,\ AB \in G$.

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par les matrices de G, $r = \dim(F)$ et $(M_1, \cdots, M_r)$ une base de F. On définit $\varphi : G \to \mathbb{C}^r$ par $\varphi(A) = \big(\mathrm{Tr}\,(AM_1), \cdots, \mathrm{Tr}\,(AM_r)\big)$.

a. Montrer que φ est injective.

b. Montrer que $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ est fini.

c. En déduire que G est fini.

6.241 *CCINP PSI 2023* Paul Bats I

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a. Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 est diagonalisable.

b. Si f^2 est diagonalisable, f l'est-elle forcément ?

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu^2 = \lambda$, montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mu \mathrm{id}_E)$.

d. Montrer que si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est diagonalisable.

6.242 *CCINP PSI 2023* Bader Ben Amira II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire classique telle que $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ forme la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Donner la définition d'un projecteur.

b. Pour $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, est-ce que $E_{i,j}$ est une matrice de projecteur ?

c. Montrer que si M est diagonalisable, M est une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

d. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs.

Vous donnerez les éléments géométriques caractéristiques de ces deux projections.

e. Une matrice écrite comme combinaison de matrices de projecteurs est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

6.243 *CCINP PSI 2023* Maddie Bisch I et Rebecca Blé I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

a. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0$, montrer que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ P(\lambda) = 0$.

b. Montrer que $\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

c. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $AM = MB \Longleftrightarrow M = 0$.

d. Montrer que $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AM - MB = C$.

6.244 *CCINP PSI 2023* Armand Dépée II

Soit un entier $n \geqslant 2$ et un complexe α. On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$.

a. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que A est diagonalisable.

b. Calculer le rang de A, en déduire ses valeurs propres.

c. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

6.245 *CCINP PSI 2023* Pierre Dobeli II

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

b. Trouver ses éléments propres.

c. Trouver $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que les matrices R qui conviennent sont diagonalisables.

6.246 *CCINP PSI 2023* Olivier Farje II et Arthur Melnitchenko I et Marie-Lys Ruzic I

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Trouver toutes les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par a.

Soit dans les deux questions suivantes un plan P de $\mathbb{R}^3$ stable par a. On définit alors l'endomorphisme a' de P induit par a dans P, qu'on note $a' = a_P$.

c. Montrer que $\chi_{a'}$ divise χ_a.

d. En déduire que $P \subset \mathrm{Ker}\left((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\right)$.

e. Quels sont les plans stables par a ?

6.247 *CCINP PSI 2023* Jonathan Filocco II et Antoine Vallade II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = i$ si $i = j$ et $a_{i,j} = 1$ sinon, c'est-à-dire $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$. On note P_n le polynôme caractéristique de A_n.

a. Justifier que A_n est diagonalisable.

b. Trouver le spectre de A_2.

c. Montrer que $\forall n \geqslant 3,\ P_n = (X - n + 1)P_{n-1} - X(X-1) - (X - n + 2)$.

d. En déduire que A_n admet au moins une valeur propre dans $]0;1[$, $]1;2[$, ...,$]n-2;n-1[$ et $]n;+\infty[$.
Indication : montrer que, pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, le réel $(-1)^k P_n(k)$ a le même signe que $P_n(0)$ et que $P_n(n) < 0$.

e. En déduire, autrement qu'à la première question, que A_n est diagonalisable.

6.248 *Mines-Télécom PSI 2023* Armand Dépée I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 5I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.

6.5 Officiel de la Taupe

6.249 *OdlT 2012/2013 Centrale PSI planche 123II*

Donner quelques exemples de matrices carrées d'ordre n dont les éléments diagonaux correspondent aux valeurs propres avec leur ordre de multiplicité.

Déterminer les matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 & \alpha \\ 12 & 3 & 7 \\ \alpha-1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifiant cette propriété notée (P).

Montrer qu'une matrice symétrique réelle vérifie cette propriété si et seulement si elle est diagonale.

6.250 *OdlT 2012/2013 CCP PSI planche 208II*

Soit A une matrice carrée réelle de taille 2, non nulle et telle que ${}^tA = A^2$. Déterminer un polynôme annulateur de A. Montrer que si 0 est valeur propre de A, alors elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.251 *OdlT 2012/2013 CCP PSI planche 210II*

On veut montrer par récurrence que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathrm{Tr}\,(A^k) = 0$ alors $A^n = 0$.

Soit A une telle matrice avec $n \geqslant 2$, en calculant $\chi_A(A)$, montrer que 0 est valeur propre de A.

Montrer que A est semblable à une matrice A' dont la dernière colonne est nulle. On note B la matrice obtenue en supprimant la dernière colonne et la dernière ligne de A'. Conclure.

6.252 *OdlT 2012/2013 Ensam PSI planche 242I*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables. Calculer $d = \underset{F \in A}{\mathrm{Sup}}\big(\dim F\big)$.

6.253 *OdlT 2013/2014 X-Cachan PSI planche 73*

On note $D_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables. Pour D diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \cdots, d_n$ (dans cet ordre), on note $\exp(D)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $e^{d_1}, \cdots, e^{d_n}$ (dans cet ordre). Si $M = PDP^{-1}$ est diagonalisable, on note $\exp(M) = P\exp(D)P^{-1}$. Montrer que $\exp$ est bien définie sur $D_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que $PDP^{-1} = QD'Q^{-1} \Longrightarrow P\exp(D)P^{-1} = Q\exp(D')Q^{-1}$.

Pour $M \in D_n(\mathbb{C})$, soit $g : t \mapsto \exp(tM)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Si $(M, N, R) \in D_n(\mathbb{C})^2 \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $Y(t) = \exp(tM)R\exp(tN)$, montrer $Y(t) - R = M\displaystyle\int_0^t Y(s)ds + \left(\int_0^s Y(s)ds\right)N$.

On pose $||A|| = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$. Montrer que $||AB|| \leqslant ||A||\,||B||$.

On suppose les valeurs propres de M et N à parties réelles strictement négatives. Montrer que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0$ et que $\displaystyle\int_0^t Y(s)ds$ admet une limite finie quand t tend vers $+\infty$. Montrer que $\exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ MX + XN = R$.

6.254 *OdlT 2013/2014 Mines PSI planche 190I*

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

Si rang$\,(f) = 2$, donner son polynôme caractéristique en fonction de $\mathrm{Tr}\,(f)$ et $\mathrm{Tr}\,(f^2)$.

Si rang$\,(f) = 3$, le donner en fonction de $\mathrm{Tr}\,(f)$, $\mathrm{Tr}\,(f^2)$ et $\mathrm{Tr}\,(f^3)$.

6.255 *OdlT 2013/2014 CCP PSI planche 247I*

Décomposer A, matrice carrée complexe de rang 1, comme produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne. En déduire que $A^2 = \text{Tr}\ (A)A$. Trouver le polynôme caractéristique de A. À quelle condition $A + I_n$ est-elle inversible ? Calculer alors son inverse.

6.256 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 156I* (Mathias)

a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \notin \text{Sp}(A)$. Montrer que $(A - \lambda I_n)^{-1}$ est un polynôme en A.

b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ le degré d'un polynôme annulateur de A et $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ des complexes qui ne sont pas dans le spectre de A. Montrer qu'il existe une famille de complexes $(c_1, \cdots, c_k)$ telle que $\sum_{i=1}^{k} c_i(A - \lambda_i I_n)^{-1} = I_n$.

6.257 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 157I*

a. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de coefficients $a_{i,j} = \text{Min}(i, j)$, trouver une matrice L, triangulaire inférieure, n'ayant que des 1 sur la diagonale, et une matrice U, triangulaire supérieure, telle que $A = LU$.

b. Exprimer A^{-1} en fonction de $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $n_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$ et 0 sinon.

c. Montrer que le spectre de A^{-1} est inclus dans $[1; 4]$.

6.258 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 160I*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la propriété $\mathcal{P}$: "$\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \det(\lambda A - M) \neq 0$".

La propriété est-elle vraie pour A inversible ? Est-elle vraie pour A non inversible ?

6.259 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 163II*

a. À quelle(s) condition(s) $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

b. Montrer que, dans ce cas, pour tout n, M^n est combinaison linéaire de M et I_4.

6.260 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 170III*

a. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. En déduire que pour $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, les polynômes caractéristiques de AB et BA sont identiques.

6.261 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 224I*

a. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} P(t)e^t dt$ converge.

b. Montrer que L tel que $L(P)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} P(t)e^t dt$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

6.262 *OdlT 2014/2015 PSI Centrale planche 233I*

On note r l'application qui fait tourner d'un angle $\frac{\pi}{2}$ le coefficient (i, j) d'une matrice autour de son centre.

Par exemple $r(1, n) = (1, 1)$. Si A est une matrice carrée, complexe de taille n de coefficients $a_{i,j}$, on note $R(A)$ la matrice obtenue après rotation et $b_{i,j}$ ses coefficients.

Montrer que R est un isomorphisme diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

6.263 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 233II*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs propres strictement positives et telle que $\{A^p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ est bornée.

Montrer que $\text{Sp}(A) = \{1\}$ puis que $A = I_n$.

6.264 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 239II*

On donne $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts, u, $v_1, \cdots, v_p$ des endomorphismes non nuls d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E tels que $\forall n \in [\![0; p]\!],\ u^n = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^n v_k$.

a. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(u) = \sum\limits_{k=1}^{p} P(\lambda_k) v_k$.

b. En déduire que u est diagonalisable.

c. Montrer que $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de u et déterminer l'idéal annulateur de u.

d. Montrer que les v_k sont les projecteurs associés à la décomposition $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{id}_E)$.

6.265 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 243II*

Trouver $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 4A^2 + 4A = 0$ et $\mathrm{Tr}\,(A) = 2$.

6.266 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 245II*

a. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.

b. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A l'est aussi.

c. Pour $n = 2$, exprimer les vecteurs propres de B en fonction de ceux de A.

6.267 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 274I*

f, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M - \mathrm{Tr}\,(M) I_n$, est-elle linéaire ? Est-elle diagonalisable ?

6.268 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 275II*

Montrer que f qui à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$ est un endomorphisme et déterminer ses valeurs propres. f est-il diagonalisable ? Inversible ?

6.269 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 278II*

On cherche $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$. Trouver un polynôme annulateur de degré 4 de M. Montrer que $M - I_n$ est inversible et conclure.

6.270 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 283*

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? (on calculera $C_1 - C_2 - C_3$) ?

b. Trouver ses éléments propres.

c. Trouver $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que les matrices R qui conviennent sont diagonalisables.

6.271 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 288II*

Trouver les valeurs propres de la matrice réelle, carrée, de taille n qui a $1, 2, \cdots, n$ sur la dernière ligne et la dernière colonne et des 0 partout ailleurs.

6.272 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 292II*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, ayant n valeurs propres distinctes.

a. Montrer que si g commute avec f, tout vecteur propre de f est vecteur propre de g et en déduire qu'il existe un base de vecteurs propres commune à f et g.

b. Montrer l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

6.273 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 293I*

a. Soit $M \in GL_k(\mathbb{C})$. Montrer que si M^2 est diagonalisable, alors M l'est aussi.

b. Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que $N = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

c. Calculer N^2 et en déduire que N est diagonalisable si et seulement si AB l'est.

6.274 *OdlT 2014/2015 ENSAM PSI planche 322II*

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

6.275 *OdlT 2014/2015 ENTPE-EIVP PSI planche 324I*

Déterminer les éléments propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $a_{n,j} = 1$ si $j \leqslant n-1$, $a_{i,n} = -1$ si $i \leqslant n-1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. Est-elle diagonalisable ?

6.276 *OdlT 2014/2015 ENSEA-ENSIIE PSI planche 327II*

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^3 + A - I_n = 0$, est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
Montrer que $\det(A) > 0$.

6.277 *OdlT 2015/2016 X-Cachan PSI planche 42*

Pour A et B des polynômes fixés de $\mathbb{R}[X]$, avec $\deg(B) = n+1$, on note Φ l'application qui, à $P \in \mathbb{R}_n[X]$, associe le reste de la division euclidienne de AP par B.
Montrer que si A et B sont premiers entre eux, ϕ est un isomorphisme.
On suppose B scindé à racines simples ; trouver les valeurs propres de Φ. Est-il diagonalisable ?
On choisit $A = aX^{p+1} - (a+1)X^p + 1$ et $B = (1-X)^2$; Φ est-il diagonalisable ?

6.278 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 118II*

Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^3 = A + I_n$, alors $\det(A) > 0$.

6.279 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 123II*

On note P l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $T > 0$, justifier la légitimité de l'endomorphisme u défini sur P par : $u(f)(x) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)dt$. Montrer que $u \in GL(P)$ et donner son spectre.

6.280 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 127III*

Soient A et B deux matrices réelles, carrées d'ordre 2 telles qu'il existe trois réels a, b, c vérifiant la relation $AB = aI_2 + bA + cB$; montrer qu'il existe trois réels x, y, z tels que $BA = xI_2 + yA + zB$.

6.281 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 131I*

Montrer que λ est valeur propre de la matrice A dont les coefficients diagonaux sont $1, 2, \cdots, n$ et tous les autres valent 1, si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1$. En déduire que A admet n valeurs propres distinctes.

6.282 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 133III*

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme T, défini sur l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et admettant une limite finie en $+\infty$, par $T(f)(x) = f(x+1)$.

6.283 *OdlT 2015/2016 Centrale PSI planche 178*

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que si $u \circ v = 0$, u et v ont un vecteur propre commun (on étudiera d'abord le cas où u est injectif).
Montrer que si $u \circ v \in \mathrm{Vect}(u, v)$, u et v ont un vecteur propre commun, puis qu'il existe une base B dans laquelle u et v ont des matrices triangulaires supérieures.

6.284 *OdlT 2015/2016 Centrale PSI planche 183*

Calculer $D(t) = \begin{vmatrix} a+t & c+t & \cdots & c+t \\ b+t & a+t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+t \\ b+t & \cdots & b+t & a+t \end{vmatrix}$ où $b \neq c$ et $bc \neq 0$. En déduire le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$. Donner les valeurs propres de M ; est-elle diagonalisable ?

6.285 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 233I*

Montrer qu'un endomorphisme de rang 1 d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

6.286 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 237II*

Soient $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$ et Φ une forme linéaire non nulle de E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Montrer que u, défini par $u(x) = x + \Phi(x)x_0$ est un endomorphisme admettant 1 pour valeur propre.

Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ puis une CNS pour que u soit diagonalisable.

6.287 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 241II*

Montrer que Φ, défini par $\Phi(M) = M + \mathrm{Tr}\,(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dont on donnera le noyau et le rang. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 annulateur de Φ.

Φ est-il diagonalisable ? Bijectif ? Si oui, calculer Φ^{-1}.

6.288 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 242I*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(A)$ est triangulaire à coefficients diagonaux 2 à 2 distincts ; montrer que A est diagonalisable.

6.289 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 243I*

Soit $n \geqslant 3$, montrer que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, constituée de 1 sur la diagonale, la première et la dernière colonne et des 0 partout ailleurs est diagonalisable et trouver ses éléments propres.

6.290 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 244II*

Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ssi M^2 l'est. Est-ce toujours vrai si M n'est pas inversible ?

6.291 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 245I*

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont 1 et -1 sont valeurs propres ; montrer que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 0, 1\}$ (on n'utilisera pas directement que le spectre est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur). Montrer que f est diagonalisable.

6.292 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 247II*

On note E l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que Φ défini par $\Phi(f)(x) = f'(x) - xf(x)$ est un endomorphisme de E.

Déterminer ses valeurs propres, ses sous-espaces propres et $\mathrm{Ker}(\Phi^2)$.

6.293 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 248I*

Justifier que $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs propres de A. Donner une CNS sur (u_0, v_0, w_0) pour que les trois suites (u_n), (v_n), (w_n) vérifiant la récurrence couplée $\begin{cases} u_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \end{cases}$ convergent.

6.294 *OdlT 2015/2016 ENSAM PSI planche 272I* Dire, suivant $z \in \mathbb{C}$, si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $z = 0$. Donner les éléments propres de M pour $z = e^{i\theta}$.

6.295 *OdlT 2015/2016 ENSAM PSI planche 274II*

Pour f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, on pose $T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ si $x > 0$ et $T(f)(0) = f(0)$.

Montrer que f est un endomorphisme de l'espace E des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

Est-il surjectif ? Injectif ? Donner ses éléments propres.

6.296 *OdlT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 279II*

Pour $a \in \mathbb{R}$, donner les valeurs et vecteurs propres de u défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $u(P)(X) = (X - a)P'(X)$.

Trouver l'ensemble des polynômes divisibles par leur dérivée.

6.297 *OdlT 2015/2016 Télécom SudParis planche 284I*

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1, il existe $(U, V) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $A = U^tV$.

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}\,(A) \neq 0$. Trouver le polynôme minimal de A.

6.298 *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 36II*

Trouver une CNS sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour que $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

6.299 *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 36III*

Résoudre $B^2 = N = \begin{pmatrix} -1 & x & y \\ 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

6.300 *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 40II*

Soit E un espace de dimension fini, f, g deux endomorphismes de E de matrices A, B dans la base $\mathcal{B}$ de E.
a. Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.
b. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(AB)$, on note E_λ (resp. F_λ) le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de AB (resp. de BA). Montrer que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et que $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$. En déduire que E_λ et F_λ ont même dimension si $\lambda \neq 0$.
c. Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable et si $\mathrm{rang}\,(f \circ g) = \mathrm{rang}\,(g \circ f)$, alors $g \circ f$ l'est aussi.
d. Trouver deux matrices X et Y telles que XY soit diagonalisable mais pas YX.

6.301 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 107II*

Déterminer le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ en fonction de celui de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que, si A est diagonalisable, B l'est aussi.

6.302 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 111II*

Montrer que si A et B, carrées, complexes de taille 2 commutent, alors A est un polynôme en B ou B est un polynôme en A. Cela reste-t-il vrai pour des matrices de taille 3 ? Pour des matrices réelles ?

6.303 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 113I*

Montrer que D défini par $D(f)(x) = xf'(x)$ est un endomorphisme de l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Trouver $\mathrm{Ker}\,(D)$ puis ses éléments propres.

6.304 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 114II*

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace E de dimension finie tel qu'il existe p endomorphismes non nuls $v_1, \dots, v_p$ et p réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ distincts deux à deux vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n v_i$.

Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) v_i$ et que u est diagonalisable. Montrer qu'il existe une base $(L_1, \dots, L_p)$ de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $L_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

6.305 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 116II*

Réduire ϕ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\phi(M) = M + \mathrm{Tr}\,(AM)A$ où A est fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

6.306 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 118I*

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u est diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Montrer qu'il existe p endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ tels que l'on ait : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) u_i$. Montrer que $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $\exists P_i \in \mathbb{C}[X]$, $P_i(u) = u_i$.
Réciproquement, montrer que si u est un endomorphisme tel qu'il existe p endomorphismes $u_1, \dots u_p$ vérifiant $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) u_i$, alors u est diagonalisable.

6.307 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 119I*

Trouver les polynômes annulateurs de $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

6.308 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 121II*

Déterminer les classes de similitude de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

6.309 *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 173 et compléments Centrale PSI planche 207*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on cherche la dimension de $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AMA = 0\}$.
Si A est diagonalisable ; montrer que $\dim E = \dim\{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid DND = 0\}$ où D est une matrice diagonale à expliciter. Donner la dimension de E en fonction du rang de A.
Peut-on généraliser au cas où A n'est pas diagonalisable ?

6.310 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 203I*

Si $E = \mathbb{R}_n[X]$, déterminer la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ donné par $f(P)(X) = (X-a)P'(X) + P(X) - P(a)$ dans la base canonique. Donner son noyau, son image, ses éléments propres.

6.311 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 208I*

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, puis le rang de A^2. Montrer que $\text{Ker}\,(A)$ et $\text{Im}\,(A)$ sont supplémentaires. En déduire que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B \in GL_2(\mathbb{R})$.

Donner le spectre de B et en déduire que A est diagonalisable.

6.312 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 209II et compléments CCP PSI planche 372II*

Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ ainsi qu'une matrice diagonale D semblable à A.
Montrer que si M commute avec D, elle est diagonale.
Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^7 + M + I_3 = A$.

6.313 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 210II*

Calculer le polynôme caractéristique de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2-n & n-2 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer les sous-espaces propres de A_3. Les matrices A_2 et A_1 sont-elles diagonalisables ?

6.314 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 211II abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année*

Montrer que f, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)dt$ est un endomorphisme et donner sa trace.

6.315 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 214I*

a. Montrer que si $M \in GL_k(\mathbb{C})$ est de carré diagonalisable, alors elle est diagonalisable (on pourra montrer qu'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant M).
b. Soit A et B inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, montrer que $N \in GL_{2n}(\mathbb{C})$.
c. Calculer N^2 puis, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $P(N^2)$.
d. On suppose N diagonalisable, montrer que le produit AB est diagonalisable.
e. Qu'en est-il de la réciproque ?

6.316 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 218II*

Pour n pair, $n \geqslant 2$, déterminer le rang de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & 1 & \dots & n \\ 2 & n-1 & 2 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & n & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'une matrice et sa transposée ont même spectre. Montrer que A_n est diagonalisable, donner ses éléments propres.

6.317 *OdlT 2016/2017 ENSAM PSI planche 240I*

Que peut-on dire de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont distincts 2 à 2 ? Trouver $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6.318 *OdlT 2016/2017 ENSAM PSI planche 241I*

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = -I_n$, alors n est pair.
Montrer que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $B^2 - B + I_n = 0$, alors n est pair.
Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $C^3 + C^2 + C = 0$, alors C est de rang pair.

6.319 *OdlT 2016/2017 ENSAM PSI planche 242I*

À quelle(s) condition(s), nécessaire(s) et suffisante(s), $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

6.320 *OdlT 2016/2017 ENSEA PSI planche 251I*

Donner le spectre de la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\phi(A) \in \mathrm{Sp}(A)$.
Déterminer $\phi(M)$ quand M est triangulaire et n'a que des 0 sur sa diagonale.
Déterminer $\phi(J)$ et aboutir à une contradiction. Que conclure ?

6.321 *OdlT 2016/2017 ENSEA PSI planche 252II*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que $(f - \mathrm{id}_E)^3 \circ (f - 2\mathrm{id}_E) = 0$ et $(f - \mathrm{id}_E)^2 \circ (f - 2\mathrm{id}_E) \neq 0$.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

6.322 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 116II*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et des matrices A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a. Montrer que si A et B n'ont aucune valeur propre commune, $\exists! M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AM - MB = C$.
b. Qu'en est-il de la réciproque ?

6.323 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 118II*

Montrer que f, défini par $f(P)(X) = nXP(X) - (X^2 - 1)P'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Résoudre $nxy - (x^2 - 1)y' = \lambda y$ sur $]-1;1[$ et donner les solutions polynomiales.

Réduire f, trouver son déterminant et sa trace. Que dire de son rang ?

6.324 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 124II*

Éléments propres de $M = (x_i x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6.325 *OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 169*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Donner une relation entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.

Qu'est-ce que le polynôme caractéristique ? Donner le théorème de Cayley-Hamilton.

Montrer que si $\chi_u'(0) \neq 0$, alors $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

6.326 *OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 215I*

Deux matrices A et B de taille $n \geqslant 2$ possèdent le même spectre.

Sachant que les valeurs propres sont distinctes 2 à 2, montrer qu'elles sont semblables.

Donner 2 matrices possédant les mêmes valeurs propres mais qui ne sont pas semblables.

6.327 *OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 252I et 2014/2015 CCP PSI planche 282I et 2015/2016 CCP PSI planche 240II*

Soit E un espace vectoriel et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

a. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de $v \circ u$. Montrer que λ est une valeur propre de $u \circ v$.

b. Montrer que si E est de dimension finie, le résultat est encore vrai pour $\lambda = 0$.

c. On choisit $E = \mathbb{R}[X]$, $u(P) = P'$ et $v(P) = Q$ où Q est la primitive de P s'annulant en 0.

Calculer $\mathrm{Ker}(v \circ u)$ et $\mathrm{Ker}(u \circ v)$. Conclure.

6.328 *Compléments OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 442I et compléments Mines-Télécom PSI planche 574I*

Donner le rang et une base de l'image de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient $a_{i,j} = \dfrac{i}{j}$. En déduire une valeur propre de A et le sous-espace propre associé. Montrer que A est diagonalisable et donner ses éléments propres. Déterminer P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M commute avec A si et seulement si $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}\,(A)$ sont stables par M. En déduire la dimension du commutant de A.

6.329 *Compléments OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 454II*

Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}\, A = 0$ et $A^2 + {}^tA = I_3$ (on pourra chercher un polynôme annulateur de A et montrer que les valeurs propres de A en sont racines) ?

6.330 *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 566I*

Montrer que $f : P \mapsto X(1+X)P' - nXP$, est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera les éléments propres.

6.331 *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 569II*

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^5 + A = I_n$, alors $\det(A) > 0$.

6.332 *Compléments OdlT 2017/2018 ENSEA PSI planche 580II*

Montrer que si f, u et v sont trois endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel vérifiant :

$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall i \in [\![1; 3]\!]$, $f^i = \alpha^i u + \beta^i v$, alors f est diagonalisable.