TD 12 : RÉDUCTION

PSI 1 2024-2025 **vendredi 06 décembre 2024**

12.1 <u>*Mines PSI 2017*</u> Alexandre Chamley I Soit $n \geqslant 2$, $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $A = a_n E_{1,n} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k E_{k+1,k}$.

a. Étudier la diagonalisabilité de A en fonction de $a_1, \cdots, a_n$.
b. Lorsque A est diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres de A.

12.2 <u>*E3A PSI 2017*</u> Vincent Meslier Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On veut résoudre l'équation $M^2 = A$.

a. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Trigonaliser A.
b. Montrer que le spectre de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$ est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.
Estimer la dimension des sous-espaces propres correspondants.
c. Montrer que $0 \in \text{Sp}(M)$ si $M^2 = A$. Trouver toutes les matrices M solution de $M^2 = A$.

12.3 <u>*Mines PSI 2018*</u> Anaïs Chaumeil II et Adrien Sarrade II

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $v_1, \cdots, v_n$ des endomorphismes non nuls et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ des réels tous distincts. On suppose que $\forall k \in [\![0; n]\!],\ u^k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k v_i$.

a. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(\lambda_i) v_i$; puis que u est diagonalisable.
b. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k v_i$.
c. Trouver des polynômes $(L_1, \cdots, L_n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^n$ tels que $\forall i \in [\![1; n]\!],\ \forall k \in [\![1; n]\!],\ L_i(\lambda_k) = \delta_{i,k}$.
d. Montrer que $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.
e. Que peut-on dire des dimensions des sous-espaces propres de u si $\dim(E) = n$?

12.4 <u>*Mines PSI 2018*</u> Thibaud Vendrely II Soit $P = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X^2 + 4X + 4$.

a. Trouver quelles valeurs parmi $-2, -1, 0, 1, 2$ sont racines de P. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.
b. Trouver les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}\,(M^3) = 0$, $\det(M) = \pm 1$ et $P(M) = 0$.

12.5 <u>*Mines PSI 2018 et 2019*</u> Lucie Jandet III et Tom Boileau II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

12.6 <u>*Mines PSI 2021*</u> Aloïs Doucet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $B = A^3 + A + I_n$.
a. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, exprimer A comme un polynôme en B.
b. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, peut-on exprimer A comme un polynôme en B ?

12.7 <u>*Mines PSI 2021*</u> Tinaël Gelpe I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?
Indication : on pourra commencer par les petites valeurs de n.

12.8 <u>*CCINP PSI 2021*</u> Johan Haramboure II

a. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton pour une matrice carrée.
b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(A)$ et $P(B)$ semblables.

Soit, dans la suite de cet exercice, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

c. Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire une expression par blocs de $P(M)$ si $P \in \mathbb{R}[X]$.
d. Montrer que si M est diagonalisable alors A l'est aussi.
e. Montrer que si M est diagonalisable alors $A = 0$.

12.9 *Centrale Maths1 PSI 2023* Marius Desvalois

Soit $E = \mathbb{C}^4$, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u^2 = v^2 = \mathrm{id}_E$ et $u \circ v = -v \circ u$.
a. Montrer que $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{Tr}\,(v) = 0$.
b. Montrer que u est diagonalisable et que -1 et 1 sont valeurs propres doubles de u.
c. Soit (x, y) une base de $E_1(u)$. Montrer que la famille $(v(x), v(y))$ est une base de $E_{-1}(u)$ et que la famille $(x, y, v(x), v(y))$ est une base de E.
d. Montrer que $u \circ v$ est diagonalisable et donner les éléments propres de $u \circ v$.

12.10 *Mines PSI 2023* Arthur Biot III Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.
a. La matrice A est-elle diagonalisable ?
b. Déterminer une matrice triangulaire T semblable à A.
c. Quelle est la dimension du commutant $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$?

12.11 *CCINP PSI 2019 (2) et 2021 (1) et Mines PSI 2023*

Thomas Crété et Léo Simplet II et Maëva Berland II et Rebecca Blé III
Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.
a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule M, les valeurs propres de M sont des racines de P (CCINP).
b. Si M est symétrique, montrer que M est diagonalisable et que $\mathrm{Tr}\,(M) \times \det(M) \neq 0$ (CCINP).
c. On ne suppose plus M symétrique. Montrer que M est toujours diagonalisable.
d. Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M (CCINP).
e. La matrice M est-elle forcément symétrique (Mines) ?

12.12 *Mines PSI 2023* Esteban Maurer II

a. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Montrer que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B.
b. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?
c. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?

12.13 *CCINP PSI 2019 et 2023* Axel Brulavoine II et Paul Bats I

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
a. Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 est diagonalisable.
b. Si f^2 est diagonalisable, f l'est-elle forcément ?
c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu^2 = \lambda$, montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mu \mathrm{id}_E)$.
d. Montrer que si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est diagonalisable.

12.14 *CCINP PSI 2023* Pierre Dobeli II Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
a. A est-elle diagonalisable ? Trouver ses éléments propres.
b. Trouver $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que les matrices R qui conviennent sont diagonalisables.

12.15 *CCINP PSI 2023* Olivier Farje II et Arthur Melnitchenko I et Marie-Lys Ruzic I

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
a. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
b. Trouver toutes les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par a.
Soit dans les deux questions suivantes un plan P de $\mathbb{R}^3$ stable par a. On définit alors l'endomorphisme a' de P induit par a dans P, qu'on note $a' = a_P$.
c. Montrer que $\chi_{a'}$ divise χ_a.
d. En déduire que $P \subset \mathrm{Ker}\,\big((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\big)$.
e. Quels sont les plans stables par a ?