

DM 09 : DÉMOCRATIE

PSI 1 2024/2025

pour le vendredi 20 décembre 2024

Soit un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$. On considère $N + 1$ urnes $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_N$ dont les contenus sont :

- L'urne \mathcal{U}_0 contient une seule boule qui porte le numéro 0.
- Pour $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, l'urne \mathcal{U}_i contient i boules numérotées de 1 à i et $N - i$ boules portant le numéro 0.

On définit alors une suite d'épreuves selon le protocole suivant :

- On choisit une urne au hasard. On y prélève au hasard une boule, on note son numéro puis on la remet dans son urne d'origine.
- Si le numéro de la boule tirée est j , on choisit au hasard une seconde boule dans l'urne \mathcal{U}_j , on note son numéro et on la remet dans l'urne \mathcal{U}_j .
- En répétant ce processus, si au k^{e} tirage (avec $k \geq 1$) on prélève (avec remise) une boule portant le numéro j , alors le $(k + 1)^{\text{e}}$ tirage se fera dans l'urne \mathcal{U}_j .

On définit

- pour $j \in \llbracket 0; N \rrbracket$, l'évènement $\mathcal{U}_j =$ "le premier tirage s'effectue dans l'urne \mathcal{U}_j ",
- pour $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$, l'évènement $\mathcal{A}_k =$ "la première boule tirée porte le numéro k ",
- pour $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$, l'évènement $\mathcal{B}_k =$ "la seconde boule tirée porte le numéro k ",
- pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$, l'évènement $\mathcal{A}_{n,k} =$ "la n^{e} boule tirée porte le numéro k " de sorte qu'avec les notations ci-dessus, on a $\mathcal{A}_{1,k} = \mathcal{A}_k$ et $\mathcal{A}_{2,k} = \mathcal{B}_k$.

PARTIE 1 : TOUS LES CANDIDATS

1 Premier tirage

1.1 Que dire de la famille d'évènements $\{\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_N\}$?

1.2 Pour $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0; N \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}_{\mathcal{U}_j}(\mathcal{A}_k)$. Indication : séparer les cas $k \leq j$ et $k > j$.

1.3 En déduire que, pour tout entier $1 \leq k \leq N$, on a $\mathbb{P}(\mathcal{A}_k) = \frac{N - k + 1}{N(N + 1)}$.

1.4 Justifier que $\mathbb{P}(\mathcal{A}_0) + \mathbb{P}(\mathcal{A}_1) + \dots + \mathbb{P}(\mathcal{A}_N) = 1$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\mathcal{A}_0)$.

2 Second tirage

2.1 Calculer, pour $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$ et $i \in \llbracket 0; N \rrbracket$, la valeur de $\mathbb{P}_{\mathcal{A}_i}(\mathcal{B}_k)$.

2.2 En déduire, pour $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, la valeur de $\mathbb{P}(\mathcal{B}_k)$. Et la valeur de $\mathbb{P}(\mathcal{B}_0)$?

3 Généralisation

3.1 Pour $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$ et $i \in \llbracket 0; N \rrbracket$, déterminer la valeur de $\mathbb{P}_{A_{n,i}}(A_{n+1,k})$.

3.2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1; N \rrbracket, \mathbb{P}(A_{n,k}) = \frac{1}{N^n(N+1)} \binom{N+n-k}{n}$.

Indication : on pourra se rappeler la formule des colonnes.

3.3 En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(A_{n,0}) = 1 - \frac{1}{N^n(N+1)} \binom{N+n}{n+1}$. Retrouve-t-on le résultat de 1.4 ?

PARTIE 2 : ÉLU

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les événements

- $Z_n =$ “le numéro 0 apparaît pour la première fois au n^e tirage”,
- $C_n =$ “une boule (au moins) portant le numéro 0 apparaît au cours des n premiers tirages”,
- $Z =$ “le numéro 0 apparaît au cours du processus”.

1 Au tirage n

1.1 Comparer les événements C_n et $A_{n,0}$ (argumenter la réponse). En déduire la valeur de $\mathbb{P}(C_n)$.

1.2 Pour $n \geq 2$, donner une relation entre les événements Z_n, C_{n-1} et C_n .

En déduire que $\mathbb{P}(Z_n) = \frac{1}{N^{n-1}(N+1)} \binom{N+n-1}{n} - \frac{1}{N^n(N+1)} \binom{N+n}{n+1}$ pour $n \geq 2$.

2 Au cours de l'évolution

2.1 Écrire Z en fonction des Z_n .

2.2 Calculer alors $\mathbb{P}(Z)$.