Correction du DS4

Problème I : (extrait de E4A PSI 2002 maths 1)

Partie I

1. a) On vérifie par une étude de fonction, ou par concavité de ln, que $\forall x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$ donc $\boxed{u_n(x) \geqslant 0}$

b) Soit $x > 0$ fixé, on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2n^2}$ donc $\sum u_n(x)$ est ACV et $\boxed{\sum u_n \text{ CVS sur } \mathbb{R}^{+*}}$

2. On applique le théorème de dérivation :
H1 : $\sum u_n$ CVS sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers S
H2 : les fonctions u_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $u_n'(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$
H3 : $\sum u_n'$ CVNTS de $\mathbb{R}^{+*}$: si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, avec $0 < a < b$, alors $|u_n'(x)| = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$ donc $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+b} = \dfrac{b}{n(n+b)}$ (indépendant de x) ; donc $\|u_n'\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{b}{n(n+b)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b}{n^2}$ donc $\sum \|u_n'\|_{\infty,[a,b]}$ converge.
On en déduit $\boxed{S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}) \text{ et } S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right) \text{ si } x > 0}$

3. On a $S(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\dfrac{1}{n} - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right]$ donc $S(1) = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{p} \dfrac{1}{n} - \sum_{n=1}^{p} (\ln(n+1) - \ln(n))\right)$ puis par télescopage on a $S(1) = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{p} \dfrac{1}{n} - \ln(p+1)\right)$ et avec $\ln(p+1) - \ln(p) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{p}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, on a $\boxed{S(1) = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} \dfrac{1}{n} - \ln(p)}$

4. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} (u_n(x+1) - u_n(x)) = \sum_{n=1}^{p} \dfrac{(x+1)-x}{n} - \sum_{n=1}^{p} [\ln(x+1+n) - \ln(n) - \ln(x+n) + \ln(x)]$ donc par télescopage à nouveau $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{p} (u_n(x+1) - u_n(x) = \sum_{n=1}^{p} \dfrac{1}{n} - \ln(x+1+p) + \ln(x+1)}$

b) Avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \dfrac{1}{n} \underset{p\to+\infty}{=} \ln(p) + S(1) + o(1)$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} (u_n(x+1) - u_n(x)) \underset{p\to+\infty}{=} S(1) + \ln(1+x) - \ln\left(\dfrac{1+x+p}{p}\right) + o(1)$ et, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$, on obtient $\boxed{S(x+1) - S(x) = S(1) + \ln(x+1)}$

5. a) On a $\boxed{\varphi(x+1)} = \dfrac{1}{x+1} e^{-(x+1)S(1)+S(x+1)} = \dfrac{1}{x+1} e^{-(x+1)S(1)+S(x)+S(1)+\ln(x+1)} = e^{-xS(1)+S(x)} \boxed{= x\varphi(x)}$

b) S est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc φ aussi et $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{x}\varphi(x) + (S'(x) - S(1))\varphi(x)$. Puis $\varphi(1) = 1$ et avec **I.2**, on a $S'(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$ donc $\boxed{\varphi'(1) = -S(1)}$

6. $\ln(\varphi_n(x)) = x\ln(n) - \ln(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{x+k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) + x\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \ln(x)$ donc par définition de S et avec **I.3**, on a $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(\varphi_n(x)) = S(x) - xS(1) - \ln(x)}$

7. a) $\pi_p(x) = \displaystyle\prod_{n=1}^{p} \exp\left(\dfrac{x}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{p} u_n(x)\right)$ donc par continuité de exp, on a $\boxed{\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \pi_p(x) = e^{S(x)}}$

b) Il suffit de remplacer $e^{S(x)}$ par $L(x)$ dans la définition de $\varphi(x)$ (**I.5**).

Partie II

1. a) La fonction $\theta : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,+\infty[$, $\theta(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc θ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x > 0$ et $\theta(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc θ est intégrable sur $[1,+\infty[$ pour tout x. On en déduit que θ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $x > 0$ et comme $\theta \geqslant 0$, lorsque θ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, son intégrale sur $\mathbb{R}^{+*}$ est divergente. On a donc $\boxed{\mathcal{D}_\Gamma = \mathbb{R}^{+*}}$

b) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-e^{-t}\Big]_0^{+\infty}$ donc $\boxed{\Gamma(1) = 1}$

c) Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour $x > 0$; on a $\displaystyle\lim_{t\to0} t^x e^{-t} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^x e^{-t} = 0$ donc $\Gamma(x+1) \overset{\text{IPP}}{=} \Big[-t^x e^{-t}\Big]_{t=0}^{t=+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ si } x > 0}$

2. Version PSI1

Par relation de Chasles et inégalité triangulaire, puis avec l'inégalité admise, on a, pour $x>0$,

$$\left|\Gamma(x)-\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_n^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t+\int_0^n\left|t^{x-1}\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]\right|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_n^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t+\frac{e}{n}\int_0^n t^{x+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t+\frac{e}{n}\Gamma(x+2)$$

Comme $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_n^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t=0$ et donc, par encadrement, on obtient le résultat demandé $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t=\Gamma(x)}$

2. Version PSI2

a) Si $t<n$, on a $g_n(t)=\exp\left[n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right)\right]$ et comme $\ln(1+x)\leqslant x$ pour $x>-1$, on a $g_n(t)\leqslant e^{-t}$, ce qui reste valable si $t\geqslant n$ puisque $e^{-t}\geqslant 0$; on a donc $\boxed{0\leqslant g_n(t)\leqslant e^{-t} \text{ pour tout } t\geqslant 0}$

b) On a $\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} g_n(t)t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ et on applique le TCD avec $h_n(t)=g_n(t)t^{x-1}$:

H1 : la suite (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers $h: t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$: en effet, pour $t>0$ fixé et n assez grand, on a $h_n(t)=t^{x-1}\exp\left[-n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right)\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{DL}} t^{x-1}e^{-t}$, par continuité de exp.

H2 : Les fonctions h_n et la fonction h sont $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

H3 : $|h_n(t)|=h_n(t)\leqslant t^{x-1}e^{-t}$ (indépendant de n) d'après la question précédente et la fonction $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (**II.1.a**)

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)t^{x-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t=\Gamma(x)}$

3. a) La fonction $t\mapsto(1-t)^n t^{x-1}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,n]$ et $(1-t)^n t^{x-1}\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc cette fonction est intégrable sur $]0,n]$ si et seulement si $x>0$; de plus comme elle est positive, son intégrale diverge si $x\leqslant 0$ et $\boxed{\mathcal{D}_{I_n}=\mathbb{R}^{+*}}$

b) On pose $t=\dfrac{u}{n}$ dans $I_n(x)$: la fonction $u\mapsto\dfrac{u}{n}$ est $\mathcal{C}^1$ strictement croissante et bijective de $]0,n]$ sur $]0,1]$ donc $I_n(x)=\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{u}{n}\right)\left(\frac{u}{n}\right)^{x-1}\frac{\mathrm{d}u}{n}$ donc $\boxed{\displaystyle n^x I_n(x)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t}$

c) On effectue une IPP dans $I_n(x)$: les fonctions $t\mapsto(1-t)^n$ et $t\mapsto\dfrac{t^x}{x}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,n]$ pour $x>0$ et $\displaystyle\lim_{t\to0}(1-t)^n\frac{t^x}{x}=0$ donc $I_n(x)=\left[(1-t)^n\dfrac{t^x}{x}\right]_{t=0}^{t=1}+\displaystyle\int_0^1 n(1-t)^{n-1}\frac{t^x}{x}\,\mathrm{d}t$ et $\boxed{I_n(x)=\dfrac{n}{x}I_{n-1}(x+1) \text{ pour } x>0}$

d) Par récurrence sur n, $I_n(x)=\dfrac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n-2)}I_1(x)$ et $I_1(x+n-1)=\displaystyle\int_0^1\left(t^{x+n-2}-t^{x+n-1}\right)\,\mathrm{d}t$ donc $I_1(x+n-1)=\dfrac{1}{x+n-1}-\dfrac{1}{x+n}=\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}$ ce qui donne $I_n(x)=\dfrac{1}{n^x}\varphi_n(x)$ puis en utilisant **I.6**, **II.2.b** et **II.3.b**, on obtient $\Gamma(x)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n^x I_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)$ donc $\boxed{\Gamma(x)=\varphi(x) \text{ si } x>0}$

4. a) On pose $t=nu$ dans la définition de $\Gamma(x)$ (qui est une intégrale absolument convergente) : la fonction $u\mapsto nu$ est $\mathcal{C}^1$ strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour $n\geqslant 1$ donc $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(nu)^{x-1}e^{-nu}n\,\mathrm{d}u$ donc $t\mapsto t^{x-1}e^{-nt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n^x}\Gamma(x)}$

b) Si $t>0$, $\dfrac{t^{x-1}}{e^t-1}=\dfrac{t^{x-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-(n+1)t}$ car $|e^{-t}|<1$ donc on applique le TITT avec la suite de fonctions $f_n(t)=t^{x-1}e^{-(n+1)t}$:

H1 : la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers $F: t\mapsto\dfrac{t^{x-1}}{e^t-1}$ comme vu au dessus.

H2 : les fonctions f_n et la fonction F sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$ (cf valeur de $F(t)$).

H3 : les fonctions f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ (question précédente)

H4 : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)^x}\Gamma(x)$ donc $\displaystyle\sum\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge pour $x>1$

On en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui donne $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\right)\times\Gamma(x) \text{ pour } x>1}$ (après changement d'indice)

Problème II : (CCP MP 2012 maths 2)

Partie I

1. Pour $(M,N)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, on a $\phi_A(\alpha M+\beta N) = A(\alpha M+\beta N)-(\alpha M+\beta N)A$ donc, on en déduit $\phi_A(\alpha M+\beta N) = \alpha(AM-MA)+\beta(AM-MA) = \alpha\phi_A(M)+\beta\phi_A(N)$ donc $\boxed{\phi_A\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$

De plus $\phi_A(I_2) = A-A = 0$ et $\phi_A(A) = A^2-A^2 = 0$ donc $\boxed{(I_2,A)\in(\ker(\phi_A))^2}$

2. $\begin{cases} \phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0\end{pmatrix} = -bE_{1,2}+cE_{2,1} \text{ et de même,} \\ \phi_A(E_{2,2}) = bE_{1,2}-cE_{2,1} \\ \phi_A(E_{1,2}) = -cE_{1,1}+cE_{2,2}+(a-d)E_{1,2} \text{ et} \\ \phi_A(E_{2,1}) = bE_{1,1}-bE_{2,2}+(d-a)E_{2,1} \end{cases}$ donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}}$

3. $\phi_A = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi_A) = 0 \Leftrightarrow (b=c=0 \text{ et } a=d)$ donc $\boxed{\text{si et seulement si } A \text{ est une matrice scalaire}}$

4. On a $\mathcal{X}_A = X^2-(a+d)X+ad-bc$ donc $\mathcal{X}_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\Delta = (a-d)^2+4bc\geqslant 0$. Ainsi, si $\Delta>0$, $\mathcal{X}_A$ admet 2 racines simples donc A est diagonalisable et si $\Delta=0$ alors A admet une valeur propre double λ donc A n'est pas diagonalisable (car sinon elle serait semblable à λI_2 donc on aurait $A=\lambda I_2$). On en déduit que $\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } (a-d)^2+4bc>0}$

5. La factorisation de $\mathcal{X}_{\phi_A}$ étant donnée, il suffit de développer « bêtement » le déterminant et de vérifier qu'il se factorise ainsi.

6. Si $(d-a)^2+4bc>0$ alors ϕ_A admet 2 valeurs propres simples $\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}$ et une valeur propre double 0 ; de plus, (I_2,A) est libre (car $A\neq\lambda I_2$) et dans $\ker(\phi_A)$ donc $\dim E_0(\phi_A)\geqslant 2 = m_0(\phi_A)$ et ϕ_A est diagonalisable.
On peut aussi utiliser la matrice : on a $\mathrm{rg}(\phi_A)\leqslant 2$ car $C_1+C_2=0$ et $bC_3+cC_4 = (a-d)C_2$ donc on en déduit $\dim(E_0(\phi_A))\geqslant 2 = m_0(\phi_A)$.
Réciproquement, si ϕ_A est diagonalisable alors $\mathcal{X}_{\phi_A}$ est scindé sur $\mathbb{R}$, ie $(a-d)^2+4bc\geqslant 0$. Si $(a-d)^2+4bc=0$ alors $\mathrm{Sp}(\phi_A)=\{0\}$ donc ϕ_A n'est pas diagonalisable (sinon la matrice de ϕ_A dans une base de vecteurs propres serait nulle donc on aurait $\phi_A=0$). ϕ_A est donc diagonalisable si et seulement si $(a-d)^2+4bc>0$. On a donc bien l'équivalence $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable si et seulement si } A \text{ est diagonalisable}}$

Partie II

7. a) On a $D = \displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k E_{k,k}$ donc $DE_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k E_{k,k}E_{i,j} = \sum_{k=1}^n \lambda_k\delta_{k,i}E_{k,j} = \lambda_i E_{i,j}$ et de même, on a $E_{i,j}D = \lambda_j E_{i,j}$ donc $\boxed{DE_{i,j}-E_{i,j}D = (\lambda_i-\lambda_j)E_{i,j}}$

b) On a $A = PDP^{-1}$ donc $\phi_A(B_{i,j}) = P\left(DE_{i,j}-E_{,j}D\right)P^{-1} = (\lambda_i-\lambda_j)B_{i,j}$; de plus P étant inversible et $E_{i,j}\neq 0$, on a $B_{i,j}\neq 0$, ie $\boxed{B_{i,j} \text{ est un vecteur propre de } \phi_A \text{ associé à } \lambda_i-\lambda_j}$

c) Les matrices $(B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: l'application $\psi : M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto PMP^{-1}$ est un isomorphisme donc transforme la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en $(B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ qui est aussi une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de ϕ_A donc $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable}}$

8. a) i. ϕ_A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{X}_{\phi_A}$ est scindé sur $\mathbb{R}$ puisque le polynôme caractéristique de ϕ_A considéré comme endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le même que celui de ϕ_A considéré comme endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ie $\boxed{\text{les valeurs propres de } \phi_A \text{ sont réelles}}$

ii. On a $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}\left(A^T\right)$ et A est réelle donc on a aussi $\boxed{\overline{z}\in\mathrm{Sp}\left(A^T\right)}$ d'où l'existence d'un vecteur propre Y de A^T associé à $\overline{z}$.

iii. On a $\phi_A\left(XY^T\right) = (AX)Y^T - X(AY)^T = (z-\overline{z})XY^T$; de plus, si $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $Y=(y_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ alors $XY^T = (x_iy_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ donc si $X\neq 0$ et $Y\neq 0$ alors $XY^T\neq 0$, ce qui donne $\boxed{z-\overline{z}\in\mathrm{Sp}(\phi_A)}$ et XY^T est un vecteur propre associé.

b) A admet au moins une valeur propre complexe z. La question précédente prouve que $z-\overline{z}\in\mathrm{Sp}(\phi_A)$ et $z-\overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ est un imaginaire pur. Comme les valeurs propres de ϕ_A sont réelles, on a $z-\overline{z}\in\mathbb{R}\cap i\mathbb{R} = \{0\}$ donc z est réelle. On a bien prouvé que $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)\neq\emptyset}$
Remarque : le raisonnement fait est valable pour toute valeur complexe de A donc on a en fait prouvé que toutes les valeurs propres de A sont réelles, mais il se pourrait qu'il n'y en ait qu'une.

c) On a $AP_{i,j}-P_{i,j}A = \lambda_{i,j}P_{i,j}$ donc $AP_{i,j}X = (P_{i,j}A+\lambda_{i,j}P_{i,j})X = (\lambda+\lambda_{i,j})P_{i,j}X$: $\boxed{\mu_{i,j} = \lambda+\lambda_{i,j}}$

d) Si $Y \in \mathbb{R}^n$ alors il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Y = MX$ car $X \neq 0$ peut être complété en $(X, X_2, \ldots, X_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et il existe une (unique) matrice telle que $MX = Y$ et $MX_i = 0$ pour $i \geqslant 2$ (par exemple). Puis $(P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc on peut écrire $M = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j} P_{i,j}$, ce qui donne $Y = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j} P_{i,j} X$. On en déduit que la famille $(P_{i,j}X)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ dont on peut donc extraire une base de $\mathbb{R}^n$. Il existe donc une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs de la forme $P_{i,j}X$ qui sont des vecteurs propres de A d'après **8.c**. On en déduit que $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$

Partie III

9. Il suffit de démontrer que $(I_n, A, \ldots, A^{m-1})$ est libre. Supposons cette famille liée, il existe alors un polynôme Q non nul tel que $\deg(Q) \leqslant m-1$ et $Q(A) = 0$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe $(T, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = TQ + R$ et $\deg(R) \leqslant m-2$. On a alors $P(A) = T(A)Q(A) + R(A) = R(A) \in \text{Vect}\left\{I_n, \ldots, A^{m-2}\right\}$. Ceci étant vrai pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on aurait alors $\dim(\mathbb{R}[A]) \leqslant m-1$ ce qui est absurde. Ainsi $(I_n, \ldots, A^{m-1})$ est libre donc $\boxed{\left(I_n, A, \ldots, A^{m-1}\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}[A]}$

10. On a $\phi_A\left(A^k\right) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{\mathbb{R}[A] \subset \ker(\phi_A) \text{ et } \dim(\ker(\phi_A)) \geqslant m}$

11. a) Si v commute avec u alors $E_{\lambda_k}(u)$ est stable par v. Réciproquement, si tous les espaces propres de u sont stables par v alors pour $x \in E_{\lambda_k}(u)$, on a $v(x) \in E_{\lambda_k}(u)$ donc $u \circ v(x) = \lambda_k v(x) = v(\lambda_k x) = v \circ u(x)$ donc $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur chaque $E_{\lambda_k}(u)$ donc sur $\bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u) = E$. On en déduit l'équivalence.

b) On en déduit $B \in \ker(\phi_A)$ si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale par blocs si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u)$.

c) On vient de prouver que $\ker(\phi_A)$ est isomorphe à l'ensemble des matrices diagonales par blocs de la forme $\text{diag}(B_1, \ldots, B_p)$ où $B_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$ donc $\ker(\phi_A) \simeq \prod_{k=1}^{p} \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$ ce qui donne $\boxed{\dim(\ker(\phi_A)) = \sum_{k=1}^{p} m_k^2}$

d) On a toujours $1 \leqslant p \leqslant n$ et $n = \sum_{k=1}^{p} m_k$ car u est diagonalisable. On calcule alors $\dim(\ker(\phi_A))$ en fonctions des valeurs de p (l'ordre des valeurs propres n'a pas d'influence sur la valeur de $\dim(\ker(\phi_A))$) :

p (nb de vp)	1	2		3		4	5
mult resp (m_k)	5	1,4	2,3	1,1,3	1,2,2	1,1,1,2	1,1,1,1,1
$\dim(\ker(\phi_A))$	25	17	13	11	9	7	5

Partie IV

12. a) Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$ ie $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}(y) = 0$, on montre par récurrence sur $i \in [\![0, n-1]\!]$ que $\alpha_{n-i} = 0$: en composant l'égalité par u^{n-1}, on a $\alpha_n u^{n-1}(y) = 0$ donc $\alpha_n = 0$ car $u^{n-1}(y) \neq 0$. Si on suppose $\alpha_n = \cdots = \alpha_{n-i} = 0$ alors il reste $\sum_{k=1}^{n-i-1} \alpha_k u^{n-k}(y) = 0$ et en composant par u^{n-i-2}, il reste $\alpha_{n-i-1} u^{n-1}(y) = 0$ donc $\alpha_{n-(i+1)} = 0$. On en déduit que $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ donc $\boxed{(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ est une base de } \mathbb{R}^n}$

b) Soit $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$; on montre que $v = w$ en montrant que ces endomorphismes coïncident sur la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$: comme $B \in \ker(\phi_A)$, on a $v \circ u = u \circ v$ et $v(e_k) = v \circ u^{n-k}(y) = u^{n-k} \circ v(y)$. De même, $w \in \mathbb{R}[u]$ donc u et w commutent, ce qui donne $w(e_k) = w \circ u^{n-k}(y) = u^{n-k} \circ w(y)$ et comme on a $v(y) = w(y)$, on a bien $v(e_k) = w(e_k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On en déduit $\boxed{v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k}}$

c) On vient de montrer que si $B \in \ker(\phi_A))$ alors $B \in \text{Vect}\left\{I_n, A, \ldots, A^{n-1}\right\}$. L'inclusion inverse a déjà été prouvée au **10.** donc $\boxed{\ker(\phi_A) = \mathbb{R}[A] = \text{Vect}\left\{I_n, \ldots, A^{n-1}\right\} \text{ et } n = m}$

13. a) On montre le résultat par récurrence sur k : on a $\phi_A(I_n) = 0 = \alpha \times 0 B^0$. Si on suppose $\phi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$ alors $\phi_A\left(B^{k+1}\right) = \phi_A\left(B^k\right) B + B^k \phi_A(B) \overset{HR}{=} k\alpha B^k + B^k \alpha B = (k+1)\alpha B^k$ donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \phi_A\left(B^k\right) = k\alpha B^k}$

b) Si $B^k \neq 0$ alors $k\alpha$ est une valeur propre de ϕ_A donc si on avait $B^k \neq 0$ pour tout k, alors on aurait $\{k\alpha, k \in \mathbb{N}\} \subset \text{Sp}(\phi_A)$. Comme $\alpha \neq 0$, les $k\alpha$ sont deux à deux distincts ; ϕ_A possèderait une infinité de valeurs propres, ce qui est absurde en dimension finie. On a donc $B^k = 0$ pour un certain entier k et $\boxed{B \text{ est nilpotente}}$