DEVOIR 13 : RÉDUCTION

PSI 1 2024-2025 **mardi 10 décembre 2024**

QCM

1 *CNS de diagonalisabilité : soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ (on écrira SARS pour "scindé à racines simples")*

- **1.1** u DZ $\Longleftrightarrow u^2$ DZ
- **1.2** u DZ $\Longleftrightarrow \chi_u$ est SARS
- **1.3** u DZ $\Longleftrightarrow (\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u))$
- **1.4** u DZ $\Longleftrightarrow$ (il existe une base de E composée de vecteurs propres de u)

2 *Diagonalisabilité : soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $u^4 - u^2 = 0$*

- **2.1** u diagonalisable
- **2.2** u non diagonalisable
- **2.3** $u \in \mathrm{GL}(E) \Longrightarrow u$ diagonalisable
- **2.4** u diagonalisable $\Longrightarrow u \in \mathrm{GL}(E)$

3 *Polynômes annulateurs : soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire annulateur de u et F un sous-espace de E stable par u*

- **3.1** $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ divise P
- **3.2** $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule $u \Longleftrightarrow u$ DZ
- **3.3** P est un multiple de χ_u
- **3.4** P est un polynôme annulateur de u_F

4 *Trigonalisabilité : soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$*

- **4.1** A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$
- **4.2** B est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
- **4.3** A nilpotente $\Longrightarrow A^3 = 0$
- **4.4** $(1 \in \mathrm{Sp}(B)$ et $\det(B) < 0) \Longrightarrow B$ trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Énoncé Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Donner une caractérisation de la diagonalisabilité de u qui fait intervenir les différents ordres de multiplicité de ses valeurs propres.

Preuve Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.
Montrer que toutes les valeurs propres de u sont des racines de P.

Exercice 1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer χ_A et montrer que A n'est pas diagonalisable.

b. Trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

DEVOIR 13 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 13 NOM : COCO PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1				X	
2			X		
3	X	X		X	
4	X		X	X	

1.1 Faux : $u(x,y) = (y,0)$ par exemple qui est nilpotent d'ordre 2 (et non nul) donc non diagonalisable **1.2** Faux : $u = \mathrm{id}_E$ est DZ alors que $\chi_u = (X-1)^n$ n'est pas SARS **1.3** Faux : $u(x,y,z) = (-y,x,z)$ (rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans l'espace) qui n'a que 1 comme valeur propre réelle et $\dim(E_1(u)) = 1 = m_1(u)$ et qui n'est pas DZ **1.4** Vrai : l'une des 5 assertions d'un théorème.
2.1 Faux : par exemple si u est nilpotent d'indice 2 et $u \neq 0$ **2.2** Faux : $u = \mathrm{id}_E$ vérifie $u^4 = u^2$ **2.3** Vrai : on compose par u^{-2} et on a $u^2 = \mathrm{id}_E$ donc u est une symétrie (X^2-1 annulateur de u) **2.4** Faux : tout projecteur $u \neq \mathrm{id}_E$ vérifie $u^4 = (u^2)^2 = u^2$ et $u \notin GL(E)$.
3.1 Vrai : les valeurs propres de u sont des racines de tout polynôme annulateur de u **3.2** Vrai : théorème **3.3** Faux : $u = \mathrm{id}_E$ et $P = X-1$ alors que $\chi_u = (X-1)^n$ **3.4** Vrai : $\forall x \in F,\ P(u_F)(x) = P(u)(x) = 0_E$.
4.1 Vrai : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos donc χ_A est scindé **4.2** Faux : si $\chi_B = X(X^2+1)$ par exemple **4.3** Vrai : si A nilpotente alors son unique valeur propre est 0 donc $\chi_A = X^3$ dnc $A^3 = 0$ par CAYLEY-HAMILTON **4.4** Vrai : les deux autres valeurs propres de B (à part 1) ne peuvent pas être complexes conjuguées (λ et $\overline{\lambda}$) car alors on aurait $\det(B) = 1 \times \lambda \times \overline{\lambda} = |\lambda|^2 > 0$ donc χ_B est scindé dans $\mathbb{R}$ et B trigonalisable.

Énoncé Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence :

$$\big(u \text{ est diagonalisable}\big) \iff \big(\chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \text{ et } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim\big(E_\lambda(u)\big) = m_\lambda(u)\big).$$

Preuve Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$ (récurrence simple) et, en écrivant $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on a $P(u)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k(x) = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \lambda^k\Big) x = 0_E$ donc, comme $x \neq 0_E$, on a $P(\lambda) = 0$.

Exercice 1 $\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & 2 \\ -1 & X-a & 1 \\ -1 & -1 & X+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -1 & 2 \\ 0 & X-a & 1 \\ X & -1 & X+1 \end{vmatrix}$ avec $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$. On utilise la linéarité par rapport à C_1 et $\chi_A = X \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & X-a & 1 \\ 1 & -1 & X+1 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & X-a & 1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = X(X-a)(X-1)$ avec $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.

• Si $a \notin \{0,1\}$, χ_A est scindé à racines simples : A est diagonalisable.

• Si $a = 0$, $\chi_A = X^2(X-1)$ et $\dim(E_0(A)) = 1 = 3 - \mathrm{rg}(A)$ car $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2. Ainsi, comme les ordres de multiplicité algébrique et géométrique de 0 ne coïncident pas : A n'est pas diagonalisable.

• Si $a = 1$, $\chi_A = X(X-1)^2$ et $\dim(E_1(A)) = 1 = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3)$ car $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2. Les ordres de multiplicité algébrique et géométrique de 1 ne coïncident pas : A n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 **a.** On trouve facilement $\chi_A = (X-1)^3$ et, comme $\dim(E_1(A)) \neq 3$ car $A \neq I_3$, A est non DZ.

b. Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1,0,0)$ et $v_2 = (0,-1,1)$. D'après T, on cherche v_3 tel que $Av_3 = v_3 + v_2 \iff (A - I_3)v_3 = v_2$. On peut donc prendre, en regardant les colonnes de $A - I_3$, $v_3 = e_2$ ou $v_3 = e_3$. Prenons $v_3 = e_3 = (0,0,1)$, ce qui donne $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P \in GL_3(\mathbb{R})$ car $\det(P) = -1$ donc $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Par la formule de changement de base, $A = PTP^{-1}$.