TD 13 : PROBABILITÉS

PSI 1 2024-2025 **vendredi 13 décembre 2024**

13.1 Quinte Flush (par exemple $7, 8, 9, 10$ et Valet de ♣) : $\underline{40 = 10 \times 4}$ mains.

- choix de la hauteur de la plus petite carte : 10 dans $\{\text{As}, 2, \cdots, 10\}$ (car 10/Valet/Dame/Roi/As).
- choix de la couleur de ces 5 cartes : 4 dans {Pique, Cœur, Carreau, Trèfle}.

Carré (par exemple les quatre Dames de ♢, ♡, ♠, ♣ et le 7 de ♠) : $\underline{624 = 13 \times 48}$ mains.

- choix de la hauteur des cartes du carré : 13 entre 2 et As.
- choix de la dernière et cinquième carte : 48 (toutes sauf les 4 du carré).

Full (par exemple les trois 8 de ♡, ♢, ♣, et les deux Rois de ♠ et ♢) : $\underline{3744 = 13 \times 4 \times 12 \times 6}$ mains.

- choix de la hauteur des cartes du brelan : 13.
- choix de la carte de cette hauteur qu'on ne prend pas dans le brelan : 4.
- choix de la hauteur des deux cartes de la paire : 12.
- choix des deux cartes dans cette hauteur : $\dbinom{4}{2} = 6$.

Couleur (par exemple $2, 7, 9$, Dame et As de ♠) : $\underline{5108 = 4 \times (1287 - 10)}$ mains.

- choix de la couleur des cartes : 4.
- choix simultané de 5 hauteurs dans cette couleur (hors quinte) : $\dbinom{13}{5} - 10$.

Suite (ou quinte) (par ex. As ♡, 2 ♣, 3 ♢, 4 ♠ et 5 ♣) : $\underline{10200 = 10 \times (1024 - 4)}$ mains.

- choix de la hauteur de la plus petite carte : 10.
- choix des couleurs de ces cartes dans chacune des 5 hauteurs (hors couleur) : $4^5 - 4$.

Brelan (par exemple 10 de ♠, ♡, ♢, 4 de ♣ et Roi de ♡) : $\underline{54912 = 13 \times 220 \times 4 \times 64}$ mains.

- choix de la hauteur des trois cartes du brelan : 13.
- choix simultané des hauteurs des trois autres cartes : $\dbinom{12}{3}$.
- choix de la carte de cette hauteur qu'on ne prend pas dans le brelan : 4.
- choix des couleurs des trois autres cartes dans chacune des trois hauteurs : 4^3.

Double paire (par exemple 5 de ♡, ♣, 9 de ♠, ♣ et 8 de ♢) : $\underline{123552 = 78 \times 6 \times 6 \times 44}$ mains.

- choix simultané des deux hauteurs des deux paires : $\dbinom{13}{2}$.
- choix des deux couleurs de la paire la plus haute : $\dbinom{4}{2}$.
- choix des deux couleurs de la paire la plus basse : $\dbinom{4}{2}$.
- choix de la dernière carte (hors les 8 des deux hauteurs des paires) : 44.

Paire (par exemple As de ♡, ♢, 2 de ♣, 7 de ♠ et Roi de ♣) : $\underline{1098240 = 13 \times 220 \times 6 \times 64}$ mains.

- choix de la hauteur de la paire : 13.
- choix simultané des trois hauteurs des trois autres cartes : $\dbinom{12}{3}$.
- choix des deux couleurs des cartes de la paire : $\dbinom{4}{2}$.
- choix des trois couleurs des trois autres cartes : 4^3.

Carte haute (par ex. 3 de ♢, 5 de ♣, 10 de ♠, Valet de ♣, As de ♢) : $\underline{1302540 = (1287 - 10) \times (1024 - 4)}$ mains.

- choix d'ensembles de 5 hauteurs différentes (hors quinte) : $\dbinom{13}{5} - 10$.
- choix des couleurs des cartes dans ces cinq hauteurs (hors couleur) : $4^5 - 4$.

On vérifie que le nombre total de mains de 5 cartes sur un jeu de 52 cartes, c'est-à-dire $\dbinom{52}{5}$, est la somme des cardinaux trouvés : $2598960 = 40 + 624 + 3744 + 10200 + 5108 + 54912 + 123552 + 1098240 + 1302540$.

13.2 **a.** La séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers 1 et 2 si et seulement si on fait pile au lancer 1 et face au lancer 2 donc $E_2 = P_1 \cap F_2$.

b. Méthode 1 : la famille $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements puisque ces évènements sont incompatibles deux à deux par construction et que $A_0 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n} = \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n}$.

Même si ce n'est pas demandé et pas nécessaire, on peut montrer que A_0 est négligeable ce qui montre que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'évènements. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_0 \subset \bigcap_{k=1}^{n} F_k$ (pour ne jamais tomber sur pile, il faut au moins ne pas faire pile dans les n premiers lancers). Ainsi, par indépendance de $F_1, \cdots, F_n$ (qu'on suppose de manière raisonnable sinon on ne sait rien faire) et par croissance de $\mathbb{P}$, on a $\mathbb{P}(A_0) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(F_k)$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(A_0) \leqslant \beta^n$. On passe à la limite dans cet encadrement et il vient $\mathbb{P}(A_0) = 0$.

Par la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n \cap A_k)$ (le cas $k = 0$ importe peu). Or $\forall k \geqslant n$, $E_n \cap A_k = \emptyset$ par définition de E_n et de A_k et on a aussi $E_n \cap A_0 = \emptyset$. Ainsi $\mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(E_n \cap A_k)$.

Méthode 2 : plus simplement, on a déjà clairement $\bigcup_{k=1}^{n-1} (E_n \cap A_k) \subset E_n$. Réciproquement, si $\omega \in E_n$, on a $\omega \in P_{n-1}$ donc on peut définir $k = \mathrm{Min}(i \in [\![1; n-1]\!] \mid \omega \in P_i)$ car $\{i \in [\![1; n-1]\!] \mid \omega \in P_i\}$ est non vide et minoré par 1. Par définition du minimum et de A_k, on a donc $\omega \in E_n \cap A_k$. Alors, on a bien $E_n \subset \bigcup_{k=1}^{n-1} (E_n \cap A_k)$. Ainsi, par double inclusion, on parvient à $E_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} (E_n \cap A_k)$. Comme $(E_n \cap A_k)_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ forme une famille d'évènements incompatibles deux à deux, par additivité (finie), on a donc à nouveau $\mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(E_n \cap A_k)$.

c. Par construction, $E_n \cap A_{n-1} = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ donc, par indépendance de ces évènements, on a $\mathbb{P}(E_n \cap A_{n-1}) = \left(\prod_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}(F_k)\right) \times \mathbb{P}(P_{n-1}) \times \mathbb{P}(F_n) = \alpha\beta^{n-1}$. On pouvait aussi dire, par la définition des probabilités conditionnelles, que $\mathbb{P}(E_n \cap A_{n-1}) = \mathbb{P}_{A_{n-1}}(E_n)\mathbb{P}(A_{n-1})$. Or si A_{n-1} est réalisé, la probabilité qu'on réalise E_n est clairement β (il ne reste qu'un face à faire après le pile du lancer $n-1$) : $\mathbb{P}_{A_{n-1}}(E_n) = \beta$. De plus $A_{n-1} = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-2} \cap P_n$, ce qui donne par indépendance de ces évènements, comme avant, $\mathbb{P}(A_{n-1}) = \beta^{n-2}\alpha$. Et on obtient à nouveau $\mathbb{P}(E_n \cap A_{n-1}) = \alpha\beta^{n-1}$.

d. Pour $k \in [\![1; n-2]\!]$, $E_n \cap A_k = F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k \cap P_{k+1} \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n$ (pas de face entre les tirages k et $n-1$ sinon la première séquence PF ne serait pas aux lancers $n-1$ et n).

Ainsi, par indépendance mutuelle de ces évènements, on a encore $\mathbb{P}(E_n \cap A_k) = \alpha^{n-k}\beta^k$.

e. Avec **b**, **c.** et **d.**, $\mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{n-k}\beta^k = \alpha\beta \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{n-2-(k-1)}\beta^{k-1} = \alpha\beta \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^{n-2-j}\beta^j$ (en posant $j = k-1$) ce qui donne, avec une célèbre formule à connaître, $\mathbb{P}(E_n) = \alpha\beta\left(\dfrac{\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}}{\beta - \alpha}\right)$ car $\alpha \neq \beta$ par hypothèse. Si on tolère le cas $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$, alors, la formule précédente montre que $\mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{n-1}{2^n}$.

f. Par définition, on a $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ et que ces évènements sont incompatibles deux à deux, $\mathbb{P}(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)$

par σ-additivité donc $\mathbb{P}(E) = \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\beta^{n-1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\alpha^{n-1}\right) = \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(\dfrac{1}{1-\beta} - \dfrac{1}{1-\alpha}\right)$ ce qui se simplifie en $\mathbb{P}(E) = \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta}\right) = \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha} \times \dfrac{\beta-\alpha}{\alpha\beta} = 1$: on s'y attendait un peu !

13.3 $F_n =$ "on obtient face au lancer n" et $A_n =$ "on obtient pile pour la première fois au bout de n lancers". Ainsi $A_n = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap \overline{F_n}$ ce qui donne, par indépendance (qu'on suppose sinon on ne peut plus rien faire) de la famille d'évènements $(F_n)_{n\geqslant 1}$, la relation $\mathbb{P}(A_n) = \left(\prod\limits_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(F_k)\right) \times \mathbb{P}(\overline{F_n}) = (1-p)^{n-1}p$.

Par définition, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_{2n}$ (réunion dénombrable d'évènements incompatibles deux à deux). On en déduit par σ-additivité que $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_{2n}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{2n-1}p = p(1-p)\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{2k} = \dfrac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \dfrac{1-p}{2-p}$.

De même, $B = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_{3n}$ (réunion dénombrable d'évènements incompatibles deux à deux). Par σ-additivité, on en déduit que $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_{3n}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{3n-1}p = p(1-p)^2\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{3k} = \dfrac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^3} = \dfrac{(1-p)^2}{3-3p+p^2}$.

Or, comme 2 et 3 sont premiers entre eux, on a $(2|n \text{ et } 3|n) \iff 6|n$.

• En effet, si n est un multiple de 6, n est clairement un multiple de 2 et de 3 par transitivité car $2|6$ et $3|6$.

• Réciproquement, soit $n \in \mathbb{N}$ à la fois multiple de 2 et de 3. Alors, en écrivant la division euclidienne de n par 6, on a $n = 6q + r$ avec $r \in [\![0;5]\!]$. Or $2|n$ et $2|6$ donc, par combinaison linéaire, $r = n - 6q$ est un multiple de 2. De même, comme $3|n$ et $3|6$, r est un multiple de 3. Le seul entier dans $[\![0;5]\!]$ à être à la fois multiple de 2 et 3 est 0 donc $n = 6q$ est un multiple de 6.

Ainsi, $A \cap B =$ "on a pile pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 6" $= \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_{6n}$ (réunion dénombrable d'évènements incompatibles deux à deux). Comme avant, $\mathbb{P}(A\cap B) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_{6n})$ donc $\mathbb{P}(A\cap B) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{6n-1}p = p(1-p)^5\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{6k} = \dfrac{p(1-p)^5}{1-(1-p)^6} = \dfrac{(1-p)^5}{6-15p+20p^2-15p^3+6p^4-p^5}$.

Alors $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \iff \dfrac{(1-p)^5}{6-15p+20p^2-15p^3+6p^4-p^5} = \dfrac{1-p}{2-p} \times \dfrac{(1-p)^2}{3-3p+p^2}$ donc, comme $p \neq 1$, cela devient $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \iff (1-p)^2(2-p)(3-3p+p^2) = 6-15p+20p^2-15p^3+6p^4-p^5$. En développant, on a $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \iff p^3 - 5p^2 + 9p - 6 = 0 \iff (p-2)(p^2-3p+3) = 0$ en simplifiant par $p \neq 0$. Puisque le discriminant de l'équation $p^2 - 3p + 3 = 0$ est $\Delta = 9 - 12 < 0$, il n'y a pas de solution réelle de l'équation $(p-2)(p^2-3p+3) = 0$ dans $]0;1[$.

En conclusion, pour tout $p \in]0;1[$, les évènements A et B ne sont pas indépendants.

13.4 **a.** D'abord, on convient que la première personne qui envoie la lettre n'a jamais reçu la lettre. Notons l'évènement $A_k =$ "la personne qui reçoit la lettre après son k-ième envoi n'a pas déjà reçu de lettre". Si on note $A =$ "les n personnes reçoivent une lettre", alors on a par construction $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. Par la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots A_{n-1}}(A_n)$. Or, $\mathbb{P}(A_1) = 1$, $\mathbb{P}(A_2) = 1$ et, si on suppose le choix du destinataire uniforme pour chaque expéditeur, on a $\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots A_{k-1}}(A_k) = \dfrac{n-k+1}{n-1}$ pour

$k \in [\![3;n]\!]$ car à part la personne qui fait le k-ième envoi, il y a $n-k+1$ personnes ayant déjà reçu une lettre et $n-1$ destinataires possibles. Par conséquent, $\mathbb{P}(A) = \prod_{k=3}^{n} \dfrac{n-k+1}{n-1} = \dfrac{(n-2)!}{(n-1)^{n-2}}$.

b. Pour une personne P fixée, chacune des $n-1$ autres personnes a une probabilité $\dfrac{1}{n-1}$ d'envoyer sa lettre à P. Comme les envois sont indépendants mutuellement, le nombre de lettres que reçoit P suit le schéma de BERNOULLI et, en notant P_k : “la personne P reçoit k lettres”, $\mathbb{P}(P_k) = \dbinom{n-1}{k}\left(\dfrac{1}{n-1}\right)^k\left(\dfrac{n-2}{n-1}\right)^{n-1-k}$.

Ainsi, la personne P reçoit p lettres avec une probabilité $\dbinom{n-1}{p}\left(\dfrac{1}{n-1}\right)^p\left(\dfrac{n-2}{n-1}\right)^{n-1-p}$.

13.5 **a.** Par la formule des probabilités totales, comme $\{A_n, B_n, C_n\}$ est un système complet d'évènements, on a $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n)$ donc, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n)\Big)$ car la puce “change” de point. Bien sûr, de même, on montre que l'on a $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(A_n)+\mathbb{P}(C_n)\Big)$ et $\mathbb{P}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(A_n)+\mathbb{P}(B_n)\Big)$. Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}MU_n$.

b. La matrice M est symétrique réelle donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral. Par un calcul simple, $\chi_M = (X+1)^2(X-2)$. Comme $M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, posons les vecteurs propres $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$ et $v_3 = (1,0,-1)$. Comme $E_{-1}(M)$ contient le plan $\mathrm{Vect}(v_2,v_3)$ (v_2 et v_3 ne sont pas colinéaires) et que $E_2(M)$ contient la droite $\mathrm{Vect}(v_1)$, M est diagonalisable car les ordres de multiplicité géométriques et algébriques coïncident pour les valeurs propres -1 et 2. Alors $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$ est une base de vecteurs propres et, par la formule de changement de base, $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Classiquement $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$ or, comme $v_1+v_2+v_3 = 3e_1$, $v_1-2v_2+v_3 = 3e_2$ et $v_1+v_2-2v_3 = 3e_3$, on a $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$.

Par un calcul fastidieux, on a donc $M^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n\\ 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n\\ 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n\end{pmatrix}$.

c. Il est clair que $J^3 = 3J$ donc $P = X(X-3)$ est annulateur de J. On écrit la division euclidienne de $(X-1)^n$ par P, à savoir $(X-1)^n = PQ_n + R_n$ avec $R_n = a_nX + b_n$ car $\deg(R_n) < \deg(P) = 2$. En évaluant en 0 et en 3, on a donc le système $(-1)^n = b_n$, $2^n = 3a_n + b_n$ donc $b_n = (-1)^n$ et $a_n = \dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$. Ainsi, $(X-1)^n = PQ_n + \dfrac{2^n-(-1)^n}{3}X + (-1)^n$ ce qui, en remplaçant X par A, devient comme à la question précédente, car $P(J) = 0$ et $M = J - I_3$, $M^n = \dfrac{2^n-(-1)^n}{3}J + (-1)^nI_3$ (c'est plus simple).

d. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}MU_n$, par une récurrence simple, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{1}{2^n}M^nU_0$. Par hypothèse, $U_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ donc, avec **b.**, $U_n = \dfrac{1}{3\times 2^n}\begin{pmatrix}2^n+2(-1)^n\\2^n-(-1)^n\\2^n-(-1)^n\end{pmatrix}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$.

e. Si $U_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ n'est pas imposé, avec le même calcul $U_n = \dfrac{1}{3 \times 2^n} \begin{pmatrix} (a+b+c)2^n + (2a-b-c)(-1)^n \\ (a+b+c)2^n + (2b-a-c)(-1)^n \\ (a+b+c)2^n + (2c-a-b)(-1)^n \end{pmatrix}$.
Comme on a tout de même $a+b+c = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(C_0) = 1$ car $\{A_0, B_0, C_0\}$ est un système complet d'évènements, comme ci-dessus, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

13.6 **a.** Si on note X_n l'état du jeu à l'étape n, comme $\{(X_n = 0), (X_n = 1)\}$ est un système complet d'évènements par hypothèse, on a $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0)\,\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0)\,\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)$ par la formule des probabilités totales. D'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 1-p$, $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = q$, $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = p$ et $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = 1-q$. Ainsi, en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$, les relations précédentes se traduisent matriciellement par $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$.
D'après Cayley-Hamilton, $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\,(A)X + \det(A) = X^2 - (2-p-q)X + 1 - p - q = (X-1)(X-(1-p-q))$ est annulateur de A. Soit $n \in \mathbb{N}$, effectuons la division euclidienne de X^n par χ_A, qui s'écrit $X^n = Q_n\chi_A + R_n$ avec $R_n = a_nX + b_n$ car $\deg(R_n) < \deg(\chi_A) = 2$. En évaluant ceci en 1 et $1-p-q$, on obtient le système $a_n + b_n - 1 = a_n(1-p-q) + b_n - (1-p-q)^n = 0$ qui se résout facilement en $a_n = \dfrac{1-(1-p-q)^n}{p+q}$ et $b_n = \dfrac{(1-p-q)^n - (1-p-q)}{p+q}$. Ainsi, en remplaçant X par A dans $X^n = Q_n\chi_A + a_nX + b_n$, on trouve $A^n = \dfrac{1-(1-p-q)^n}{p+q}A + \dfrac{(1-p-q)^n - (1-p-q)}{p+q}I_2 = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q + p(1-p-q)^n & q - q(1-p-q)^n \\ p - p(1-p-q)^n & p + q(1-p-q)^n \end{pmatrix}$.
Par une récurrence facile, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$. Comme $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ par définition, on a donc $\begin{pmatrix} 1-p_n \\ p_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1-p_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \dfrac{(p - p(1-p-q)^n)(1-p_0) + (p + q(1-p-q)^n)p_0}{p+q}$.

b. Comme $p \in]0;1[$ et $q \in]0;1[$, on a $1-p-q \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}(1-p-q)^n = 0$ donc, en passant à la limite dans la relation de la question précédente, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{p(1-p_0) + pp_0}{p+q} = \dfrac{p}{p+q}$.

13.7 **a.** Soit $(d, d') \in [\![1;n]\!]^2$ tel que d et d' sont des diviseurs de n premiers entre eux.

($\subset$) Soit $m \in A_d \cap A_{d'}$, alors il existe par définition k et k' tels que $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{d}$ et $1 \leqslant k' \leqslant \frac{n}{d'}$ et $m = kd = k'd'$. Ainsi, $d|k'd'$ mais d et d' sont premiers entre eux donc, d'après le lemme de Gauss, $d|k'$ et il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $k' = ad$. Comme $1 \leqslant ad \leqslant \frac{n}{d'}$, on a $1 \leqslant a \leqslant \frac{n}{dd'}$ donc, par définition, $m = add' \in A_{dd'}$. On vient d'établir que $A_d \cap A_{d'} \subset A_{dd'}$.

($\supset$) Soit $m \in A_{dd'}$, il existe donc k tel que $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{dd'}$ et $m = kdd'$. Comme $1 \leqslant kd' \leqslant \frac{n}{d}$ et $m = (kd')d$ et $1 \leqslant kd \leqslant \frac{n}{d'}$ et $m = (kd)d'$, on a $m \in A_d \cap A_{d'}$ par définition. On a montré que $A_{dd'} \subset A_d \cap A_{d'}$.

Par double inclusion, $A_d \cap A_{d'} = A_{dd'}$. Par définition de $\mathbb{P}$, comme $\mathbb{P}(A_q) = \dfrac{1}{q}$ par définition si $q|n$, on a $\mathbb{P}(A_d \cap A_{d'}) = \mathbb{P}(A_{dd'}) = \dfrac{1}{dd'} = \dfrac{1}{d} \times \dfrac{1}{d'} = \mathbb{P}(A_d)\,\mathbb{P}(A_{d'})$ ce qui justifie que A_d et $A_{d'}$ sont indépendants.

b. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, $k \in B_n \iff k \wedge (p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}) = 1 \iff (\forall j \in [\![1;r]\!],\ k \wedge p_j = 1) \iff (\forall j \in [\![1;r]\!],\ k \notin A_{p_j})$.

En effet, k est premier avec n si et seulement si k et n n'ont aucun nombre premier dans leur décomposition respective en produit de nombres premiers. Ainsi, $B_n = \bigcap_{j=1}^{r} \overline{A_{p_j}}$.

c. Par récurrence à partir de **a.**, on montre que puisque $p_1, \cdots, p_r$ sont premiers entre eux deux à deux, les $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont indépendants. On sait qu'alors $\overline{A_{p_1}}, \cdots, \overline{A_{p_r}}$ le sont aussi de sorte que $\mathbb{P}(B_n) = \prod_{j=1}^{r} \mathbb{P}(\overline{A_{p_j}})$ donc $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \mathbb{P}(A_{p_j})\right) = \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$ donc $\varphi(n) = n \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$.

d. Soit deux entiers n et m de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ premiers entre eux, si on décompose $n = p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$ et $m = q_1^{r_1} \cdots q_r^{r_t}$, puisque'aucun nombre premier divisant n ne divise m, et vice-versa, $p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r} q_1^{r_1} \cdots q_r^{r_t}$ est la décomposition en produit de nombres premiers de nm. D'après la question précédente, on a $\varphi(n) = n \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$, $\varphi(m) = m \prod_{k=1}^{t} \left(1 - \dfrac{1}{q_k}\right)$ et $\varphi(nm) = nm \left(\prod_{j=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)\right) \times \left(\prod_{k=1}^{t} \left(1 - \dfrac{1}{q_k}\right)\right)$ donc $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

e. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ que $z = e^{i\theta}$. On pose $t = \dfrac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{R}$ de sorte que $z = e^{2i\pi t}$. Comme $t \in \mathbb{R}$ et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} t_k = t$. En écrivant $t_k = \dfrac{a_k}{b_k}$ avec $a_k \in \mathbb{Z}$ et $b_k \in \mathbb{N}^*$, on a $z_k = e^{\frac{2i\pi a_k}{b_k}}$ donc z_k est une racine b_k-ième de l'unité et $z_k \in \mathbb{U}$. Comme $u \mapsto e^{iu} = \cos(u) + i\sin(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $\cos$ et $\sin$ le sont, et que $\lim_{k\to+\infty} t_k = t$, on a $\lim_{k\to+\infty} e^{it_k} = e^{it}$ donc $\lim_{k\to+\infty} z_k = z$. Il existe bien une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} z_k = z$.

f. Soit $z \in P_n$, alors $m_z = n$ donc $z^n = 1$ et $z \in \mathbb{U}_n$ car $m_z = \mathrm{Inf}\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid z^n = 1\right\} = \mathrm{Min}\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid z^n = 1\right\}$ puisque $\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid z^n = 1\right\}$ est une partie non vide (par hypothèse car $z \in \mathbb{U}$) de $\mathbb{N}$. Ainsi, $P_n \subset \mathbb{U}_n$ donc, comme $\mathbb{U}_n$ est fini de cardinal n d'après le cours, P_n est fini et $\mathrm{card}\,(P_n) \leqslant n$.

On sait que $\mathbb{U}_n = \{\omega_n^k \mid k \in [\![0; n-1]\!]\}$ avec $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Montrons que $P_n = \{\omega_n^k \mid k \in B_n\}$.

($\subset$) Soit $z \in P_n$, comme $P_n \subset \mathbb{U}_n$, il existe un unique entier $k \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $z = \omega_n^k$. Si on avait $\mathrm{pgcd}\,(n, k) = d > 1$, alors $z^{n/d} = \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^{n/d} = e^{\frac{2ik\pi}{d}} = 1$ car d divise k ce qui contredirait le fait que n est le pus petit entier m tel que $z^m = 1$ car $\dfrac{n}{d} < n$. Par l'absurde, on a donc prouvé que $\mathrm{pgcd}\,(n, k) = 1$ donc que $k \in B_n$. Ainsi, $P_n \subset \{\omega_n^k \mid k \in B_n\}$.

($\supset$) Soit $z \in \{\omega_n^k \mid k \in B_n\}$ qu'on écrit donc $z = \omega_n^k$ avec $k \in B_n$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^m = 1$, on a donc $\omega_n^{mk} = e^{\frac{2ikm\pi}{n}} = 1$ ce qui montre que $\dfrac{2km\pi}{n} \equiv 0\ [2\pi]$ donc que km est un multiple de n. Or, puisque n et k sont premiers entre eux et que n divise mk, par le lemme de Gauss, on a $n|m$ donc $m \geqslant n$. Comme $z^n = 1$, n est bien le plus petit entier m tel que $z^m = 1$ et on a $z \in P_n$. Ainsi, $\{\omega_n^k \mid k \in B_n\} \subset P_n$.

Par double inclusion, on a $P_n = \{\omega_n^k \mid k \in B_n\}$ donc l'application $\theta : B_n \mapsto P_n$ définie par $\theta(k) = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une bijection ce qui justifie bien que $|B_n| = \varphi(n) = |P_n|$.

g. ($\supset$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $P_n \subset \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$ par définition donc $P_n \subset \mathbb{U}$. On en déduit l'inclusion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} P_n \subset \mathbb{U}$.

($\subset$) Soit $z \in \mathbb{U} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{U}_n$, par définition, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z \in \mathbb{U}_n$. Ainsi, $z^n = 1$ et, par construction, $m_z = \mathrm{Inf}\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid z^k = 1\right\} \leqslant n$. Comme $z \in P_{m_z}$, $z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} P_n$ d'où l'inclusion $\mathbb{U} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} P_n$.

Par double inclusion, on a bien $\mathbb{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} P_n$.

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $n \neq m$, s'il existait un complexe $z \in P_n \cap P_m$, on aurait à la fois $m_z = n$ et $m_z = m$ par définition, ce qui est absurde car $n \neq m$. Ainsi, on a bien $P_n \cap P_m = \emptyset$ si $n \neq m$ ce qui justifie que $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{U}$. On appelle les éléments de P_n des racines primitives n-ièmes de l'unité. Par exemple, $P_1 = \{1\}$, $P_2 = \{-1\}$, $P_3 = \{j, j^2\}$, $P_4 = \{i, -i\}$.

13.8 Notons $\mathcal{F}_n^p$ l'ensemble des parties A à p éléments de $[\![1; n]\!]$ telles que l'on ait $\forall i \in [\![1; n-1]\!], i \in A$ ou $i+1 \in A$ de sorte que $F_n^p = \text{card}(\mathcal{F}_n^p)$. Prenons quatre exemples :

<u>Si $n = 2$</u> , $\mathcal{F}_2^0 = \emptyset$, $\mathcal{F}_2, 1 = \{\{1\}, \{2\}\}$, $\mathcal{F}_2^2 = \{\{1, 2\}\}$ d'où $F_2^0 = 0, F_2^1 = 2$ et $F_2^2 = 1$.

<u>Si $n = 3$</u> , $\mathcal{F}_3^0 = \emptyset$, $\mathcal{F}_3, 1 = \{\{2\}\}$, $\mathcal{F}_3^2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ et $\mathcal{F}_3^3 = \{\{1, 2, 3\}\}$ d'où $F_3^0 = 0, F_3^1 = F_3^3 = 1, F_3^2 = 3$.

<u>Si $n = 4$</u> , $\mathcal{F}_4^0 = \mathcal{F}_4^1 = \emptyset$, $\mathcal{F}_4^2 = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$, $\mathcal{F}_4^3 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ et on a enfin $\mathcal{F}_4^4 = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$ donc $F_4^0 = F_4^1 = 0, F_4^2 = 3, F_4^3 = 4, F_4^4 = 1$.

<u>Si $n = 5$</u> , $\mathcal{F}_5^0 = \mathcal{F}_5^1 = \emptyset$, $\mathcal{F}_5^2 = \{\{2, 4\}\}$, $\mathcal{F}_5^3 = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$, puis on a aussi $\mathcal{F}_5^4 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$ et on a enfin $\mathcal{F}_5^5 = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ ce qui donne les valeurs $F_5^0 = F_5^1 = 0, F_5^2 = 1, F_5^3 = 6, F_5^4 = 4$ et $F_5^5 = 1$.

• On constate que les premiers termes sont nuls. En effet, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $p \in [\![0; n]\!]$ et s'il existe une partie A à p éléments de $[\![1; n]\!]$ ayant la propriété (C), alors il faut au moins un élément de A dans $\{1, 2\}$, au moins un (et différent du premier) dans $\{3, 4\}$, etc... Ainsi, comme il existe $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ parties disjointes deux à deux du type $\{2k-1, 2k\}$ dans $[\![1; n]\!]$, on a $\text{card}(A) = p \geqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > \frac{n}{2} - 1$ donc $n < 2p + 2$, c'est-à-dire $n \leqslant 2p + 1$. Par contraposée, si $n > 2p + 1$, $\mathcal{F}_n^p = \emptyset$ donc $F_n^p = 0$.

• Si $2 \leqslant n \leqslant 2p + 1$, on va partitionner $\mathcal{F}_n^p$ en $\mathcal{F}_n^{p,1} = \{A \in \mathcal{F}_n^p \mid n \in A\}$ et $\mathcal{F}_n^{p,2} = \{A \in \mathcal{F}_n^p \mid n \notin A\}$ de sorte que $\mathcal{F}_n^p = \mathcal{F}_n^{p,1} \sqcup \mathcal{F}_n^{p,2}$ donc, en notant $F_n^{p,1} = \text{card}(\mathcal{F}_n^{p,1})$ et $F_n^{p,2} = \text{card}(\mathcal{F}_n^{p,2})$, on a $F_n^p = F_n^{p,1} + F_n^{p,2}$.

<u>$\mathcal{F}_n^{p,1}$</u> : si $A \in \mathcal{F}_n^{p,1}$, alors $A' = A \setminus \{n\}$ est de cardinal $p - 1$, inclus dans $[\![1; n-1]\!]$ et A' vérifie la propriété (C) puisque A le fait. On vient donc de construire $\varphi_1 : \mathcal{F}_n^{p,1} \to \mathcal{F}_{n-1}^{p-1}$ qui vérifie $\varphi_1(A) = A'$. Il est clair que φ_1 est bijective et que $\varphi_1^{-1}(A') = A' \cup \{n\}$. Ainsi, $\text{card}(\mathcal{F}_n^{p,1}) = \text{card}(\mathcal{F}_{n-1}^{p-1}) = F_{n-1}^{p-1}$.

<u>$\mathcal{F}_n^{p,2}$</u> : si $A \in \mathcal{F}_n^{p,2}$, alors $n \notin A$ donc $n - 1 \in A$ car A vérifie la propriété (C) donc $A'' = A \setminus \{n-1\}$ est de cardinal $p - 1$, inclus dans $[\![1; n-2]\!]$ et A'' vérifie la propriété (C) puisque A le fait. On vient donc de construire $\varphi_2 : \mathcal{F}_n^{p,2} \to \mathcal{F}_{n-2}^{p-1}$ qui vérifie $\varphi_1(A) = A''$. Il est clair que φ_2 est bijective et que $\varphi_2^{-1}(A'') = A'' \cup \{n-1\}$. Ainsi, $\text{card}(\mathcal{F}_n^{p,2}) = \text{card}(\mathcal{F}_{n-2}^{p-1}) = F_{n-2}^{p-1}$.

Par conséquent, $F_n^p = F_{n-1}^{p-1} + F_{n-2}^{p-1}$ (1).

Les trois cas particuliers nous permettent de conjecturer que $\forall n \geqslant 2$, $\forall p \in [\![0; n]\!]$, $F_n^p = \binom{p+1}{n-p}$ car par exemple $F_3^1 = 1 = \binom{2}{2}$, $F_4^3 = 4 = \binom{4}{1}$ et $F_5^3 = 6 = \binom{4}{2}$.

<u>Initialisation</u> : on a bien $\forall n \in [\![2; 5]\!]$, $\forall p \in [\![0; n]\!]$, $F_n^p = \binom{p+1}{n-p}$, il suffit de regarder les 18 valeurs.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 6$ tel que $\forall m \in [\![2; n-1]\!]$, $\forall p \in [\![0; m]\!]$, $F_m^p = \binom{p+1}{m-p}$, alors d'après la relation (1),

pour tout entier $p \in [\![0;n]\!]$, on a $F_n^p = F_{n-1}^{p-1} + F_{n-2}^{p-1} = \binom{p}{n-p} + \binom{p}{n-p-1}$ car $n-1 \geqslant 2$ et $n-2 \geqslant 2$ donc, avec la formule de Pascal, on a $F_n^p = \binom{p+1}{n-p}$ comme attendu.

Conclusion : par principe de récurrence forte (à deux pas en fait), $\forall n \geqslant 2,\ \forall p \in [\![0;n]\!],\ F_n^p = \binom{p+1}{n-p}$.

13.9 **a.** Posons $B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$ de sorte que $A = \bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k$. Comme $B_k = A_k \cup \left(\bigcup_{n=k+1}^{+\infty} A_n\right) = A_k \cup B_{k+1}$, il vient $B_{k+1} \subset B_k$ et la suite $(B_k)_{k\geqslant 0}$ est décroissante pour l'inclusion. Ainsi, par théorème de continuité décroissante, $\mathbb{P}(A) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\Big)$. Par positivité d'une probabilité et sous-additivité, on a l'encadrement $0 \leqslant \mathbb{P}(B_k) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Comme $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, en notant $R'_k = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ le reste d'ordre $k-1$ de cette série convergente, on sait d'après le cours que $\lim_{k\to+\infty} R_k = 0$. Ainsi, par encadrement, on a $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(B_k) = 0$. Par conséquent, $\mathbb{P}(A) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(B_k) = 0$.

b. Par définition, $\omega \in B \iff (\forall k \geqslant 0,\ \exists n \geqslant k,\ \omega \in A_n) \iff \omega \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$ car pour qu'il existe une infinité d'indice n tels que $\omega \in A_n$, il faut pouvoir en trouver au delà de k quelle que soit la valeur de k. Ainsi, en termes ensemblistes, on a $B = A$.

c. On s'intéresse à $\overline{A} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{B_k}$. Mais, $\overline{B_k} = \bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n} = \overline{A_k} \cap \left(\bigcap_{n=k+1}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = \overline{A_k} \cap \overline{B_{k+1}}$ donc $\overline{B_k} \subset \overline{B_{k+1}}$ donc $(\overline{B_k})_{k\geqslant 0}$ est croissante pour l'inclusion. Par continuité croissante, $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{B_k}\Big) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{B_k})$.

Soit un entier $k \geqslant 1$, alors $\forall m \geqslant k,\ \emptyset \subset \overline{B_k} = \bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n} \subset \bigcap_{n=k}^{m} \overline{A_n}$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(\overline{B_k}) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{m} \overline{A_n}\right)$ par croissance de $\mathbb{P}$. Or les évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants donc $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont aussi indépendants d'après le cours. Alors, $0 \leqslant \mathbb{P}(\overline{B_k}) \leqslant \prod_{n=k}^{m} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \prod_{n=k}^{m} \big(1 - \mathbb{P}(A_n)\big) \quad (1)$.

Si $f : x \mapsto e^{-x} - 1 + x$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 - e^{-x}$ donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$, elle est donc minimale en 0 où $f(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$. Ainsi, $\forall x \in [0;1],\ 1 - x \leqslant e^{-x}$. Bien sûr, cette inégalité provient aussi de la convexité de la fonction $g : x \mapsto e^{-x}$ (sa dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}$) car elle se traduit par le fait que la courbe de g est au dessus de la tangente en $(0,1)$ à la courbe de g.

Pour $n \in \mathbb{N}$, en notant $x = \mathbb{P}(A_n) \in [0;1]$, on a $\mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - x \leqslant e^{-x} = e^{-\mathbb{P}(A_n)}$. En multipliant ces inégalités entre réels positifs, il vient $\prod_{n=k}^{m} \big(1 - \mathbb{P}(A_n)\big) \leqslant \prod_{n=k}^{m} e^{-\mathbb{P}(A_n)} = \exp\Big(-\sum_{n=k}^{m} \mathbb{P}(A_n)\Big)$. Or, par hypothèse, la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ est divergente donc ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. Ainsi, comme $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=k}^{m} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, et que $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$, par composition, il vient $\lim_{m\to+\infty} \prod_{n=k}^{m} \big(1 - \mathbb{P}(A_n)\big) = 0$. Par encadrement dans (1), on en déduit que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\overline{B_k}) = 0$. Ainsi, $\mathbb{P}(\overline{A}) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{B_k}) = 0$ donc $\mathbb{P}(A) = 1$.

Pour une suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'évènements indépendants et qu'on pose l'évènement $A = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$ qui s'écrit aussi $A = \Big\{\omega \in \Omega \ \Big|\ \{n \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_n\} \text{ est infini}\Big\}$, on a l'alternative (c'est la loi du zéro-un de Borel) :

- $\mathbb{P}(A) = 0$ si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ converge
- $\mathbb{P}(A) = 1$ si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.