DEVOIR 14 : RÉDUCTION PROBABILISTE

PSI 1 2024-2025 **mardi 17 décembre 2024**

QCM

1 *Dénombrement :* E *un ensemble de cardinal* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(E)$ *l'ensemble des parties de* E, $\mathcal{F}(E,E)$ *les applications de* E *dans* E. *Soit* $p \in [\![1;n]\!]$, $P_p(E)$ *l'ensemble des parties de* E *à* p *éléments*

1.1 $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ **1.2** $\text{card}(\mathcal{F}(E,E)) = n^2$ **1.3** $\text{card}(P_p(E)) = \binom{n}{p}$ **1.4** $\bigcup_{k=1}^{n} P_k(E) = \mathcal{P}(E)$

2 *Dénombrabilité : soit* E *un ensemble et* $f : E \to \mathbb{N}$ *et* $g : \mathbb{N} \to E$ *deux applications*

2.1 E est dénombrable si f surjective et g injective

2.2 E est dénombrable si f injective et g injective

2.3 $\mathbb{Q}$ est dénombrable

2.4 $\mathbb{R}$ dénombrable

3 *Tribu et probabilité : soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* I *un ensemble et* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille d'évènements,* A *et* B *deux évènements tels que* $B \neq \overline{A}$

3.1 $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, B, A\cap B, A\cup B, \Omega\}$ est possible

3.2 $\bigcup_{i\in I} A_i$ est un évènement (il est dans $\mathcal{A}$)

3.3 $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \iff A\cap B = \emptyset$

3.4 $A \subset B \iff \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

4 *Continuité et sous-additivité : soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite quelconque d'évènements telle que la série numérique* $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ *converge*

4.1 $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

4.2 $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big)$

4.3 $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

4.4 $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \iff$ les A_n sont incompatibles 2 à 2

Énoncé Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements. Donner le théorème de continuité décroissante et la relation de sous-additivité relatifs à cette famille.

Preuve Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et un entier $n \in [\![0; a+b]\!]$. Montrer à l'aide du dénombrement ou des polynômes la formule de VANDERMONDE suivante : $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

Exercice 1 Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection (c'est-à-dire telle que $P^2 = P$) et φ l'endomorphisme (on l'admet ici) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = PM + MP$. Déterminer $\varphi^2(M)$ et $\varphi^3(M)$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que φ est diagonalisable.

Exercice 2 Soit A l'ensemble des entiers dont l'écriture en base 10 comporte exactement 7 chiffres et pas le chiffre 1. On note A_1 les entiers de A qui ont 7 chiffres différents. On note A_2 les entiers pairs de A. On note A_3 les entiers de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (comme 2356789). Déterminer les cardinaux de A, A_1, A_2 et A_3 (en fonction de puissances a^b et de factorielles $c!$).

DEVOIR 14 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 14	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X		X		
2		X	X		
3					
4		X	X		

1.1 Vrai : chacun des n éléments a deux choix : être dans la partie ou pas **1.2** Faux : c'est n^n **1.3** Vrai : du cours **1.4** Faux : il manque $P_0(E)$ qui contient seulement $\emptyset$.
2.1 Faux : $E = \mathbb{R}$, $f : x \to \lfloor x^2 \rfloor$, et $g : n \to n$ **2.2** Vrai : Cantor-Bernstein **2.3** Vrai : vu **2.4** Faux : vu.
3.1 Faux : on doit avoir $\overline{A} \in \mathcal{A}$ puisque $A \in \mathcal{A}$ **3.2** Faux : ça ne marche que si la famille d'indices est dénombrable **3.3** Faux : on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ si $A \cap B$ est négligeable **3.4** Faux : on n'a que l'implication $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
4.1 Faux : $A_0 = \emptyset$ et $\forall n \geqslant 1,\ A_n = \Omega$ **4.2** Vrai : continuité croissante **4.3** Vrai : sous-additivité
4.4 Faux : il suffit que les $A_i \cap A_j$ soient négligeables si $i \neq j$; par exemple tous les A_n négligeables.

Énoncé Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements :

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (continuité décroissante).
- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (sous-additivité).

Preuve • Si A est de cardinal a et B est de cardinal b et A et B disjoints, on pose $E = A \cup B$, alors $\mathcal{P}_n(E) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{A}_{n,k}$ où $\mathcal{A}_{n,k} = \{X \subset E \mid \operatorname{card}(X) = n \text{ et } \operatorname{card}(A \cap X) = k\}$. Comme la réunion est disjointe, $\operatorname{card}(\mathcal{P}_n(E)) = \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}(\mathcal{A}_{n,k})$. Or, pour choisir X dans $\mathcal{A}_{n,k}$, il faut choisir une partie de A à k éléments qui sera $A \cap X$ ($\binom{a}{k}$ choix) et la compléter avec une partie de B à $n-k$ éléments qui sera $B \cap X$ ($\binom{b}{n-k}$ choix). Ainsi $\operatorname{card}(\mathcal{A}_{n,k}) = \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ et on a bien $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.
• $(1+X)^{a+b} = \sum_{n=0}^{a+b} \binom{a+b}{n} X^n = (1+X)^a(1+X)^b = \left(\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} X^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j} X^j\right)$ et on identifie le terme en X^n dans ce produit, d'où $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$ par définition du produit polynomial.

Exercice 1 Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puisque $P^2 = P$: $\varphi^2(M) = P(PM+MP)+(PM+MP)P = PM+MP+2PMP$ et, de même, $\varphi^3(M) = PM+MP+6PMP$. On en déduit que $\varphi^3(M)-3\varphi^2(M)+2\varphi(M) = 0$ donc $\varphi^3-3\varphi^2+2\varphi = 0$ et $Q = X(X-1)(X-2)$ est annulateur de φ. Comme Q est scindé à racines simples, φ est diagonalisable.

Exercice 2 Pour A : on choisit le premier chiffre dans $B = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ et les 6 suivants dans $C = \{0,2,3,4,5,6,7,8,9\} = B \cup \{0\}$ donc $\operatorname{card}(A) = 8 \times 9^6$. Pour A_1 : on choisit le premier chiffre c dans B, ensuite on prend un arrangement de 6 chiffres dans $C \setminus \{c\}$ donc $\operatorname{card}(A_1) = 8 \times A_8^6 = 4 \times 8!$. Pour A_2 : on choisit le premier chiffre c dans B, les 5 suivants dans C et le dernier (chiffre des unités) dans $\{0,2,4,6,8\} = D$ donc $\operatorname{card}(A_2) = 8 \times 9^5 \times 5$. Pour A_3 : on choisit celui parmi B qui n'est pas là et les 7 autres sont forcément dans le bon ordre donc $\operatorname{card}(A_3) = 8$.