SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 7 PROBABILITÉS

7.1 Dénombrement

7.1 Une relation binaire sur $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$ est une application $\mathcal{R} : E \times E \to \{V, F\}$, on peut la représenter par un tableau de vérité avec n lignes et n colonnes avec dans la case (i, j) de ce tableau la valeur de vérité $x_i \mathcal{R} x_j$.
• Il y a donc 2^{n^2} relations binaires sur E.
• $\mathcal{R}$ est réflexive si et seulement s'il y a des V sur la diagonale de ce tableau, ce qui ne fait plus que $n^2 - n$ cases à remplir avec V ou F, ainsi il y a 2^{n^2-n} relations réflexives.
• $\mathcal{R}$ est symétrique ($x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$) si et seulement si le tableau est symétrique, ce qui ne fait plus que $\dfrac{1}{2}(n^2 - n) + n$ cases à remplir avec V ou F, ainsi il y a $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ relations symétriques.
• $\mathcal{R}$ est symétrique et réflexive si et seulement si le tableau est symétrique avec des V sur la diagonale, ce qui ne fait plus que $\dfrac{1}{2}(n^2 - n)$ cases à remplir avec V ou F : il y a $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations réflexives et symétriques.
• $\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement s'il n'y a pas simultanément V dans les cases (i, j) et (j, i) du tableau quand $i \neq j$ ce qui fait en dehors de la diagonale ou on met ce qu'on veut, seulement $\dfrac{n(n-1)}{2}$ couples de cases ou on peut mettre (V, F) (F, V) ou (F, F) : il y a $3^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^n$ relations antisymétriques.
• $\mathcal{R}$ est antisymétrique et réflexive si et seulement si elle est antisymétrique (déjà vu juste avant) et s'il y a des V sur la diagonale : il y a $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations antisymétriques et réflexives.

7.2 **a.** Une surjection f de $[\![1; n+1]\!]$ dans $[\![1; n]\!]$ est une application telle qu'un seul des éléments de l'ensemble d'arrivée possède deux antécédents et les $n - 1$ autres possèdent un seul antécédent.
Protocole de choix bijectif de f :

- on choisit le $y \in [\![1; n]\!]$ qui a deux antécédents : n choix.
- on choisit les deux antécédents $x_1 \neq x_2$ de y par f : $\dbinom{n+1}{2}$ choix.
- on choisit une permutation entre $[\![1; n+1]\!] \setminus \{x_1, x_2\}$ et $[\![1; n]\!] \setminus \{y\}$: $(n-1)!$ choix

On en déduit finalement que $T_n = n \times \dbinom{n+1}{2} \times (n-1)! = \dfrac{n(n+1)!}{2}$.

b. On partitionne les surjections f de $[\![1; n+2]\!]$ dans $[\![1; n]\!]$ en deux sous-ensembles : celles pour lesquelles un seul élément de l'ensemble d'arrivée possède trois antécédents et tous les autres un seul (cas 1) et celles pour lesquelles deux éléments de l'ensemble d'arrivée possèdent deux antécédents et tous les autres un seul (cas 2).

c. Protocole de choix bijectif de f du cas 1 :

- on choisit le $y \in [\![1; n]\!]$ qui a trois antécédents : n choix.
- on choisit les trois antécédents x_1, x_2, x_3 de y par f : $\dbinom{n+2}{3}$ choix.
- on choisit une permutation entre $[\![1; n+2]\!] \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ et $[\![1; n]\!] \setminus \{y\}$: $(n-1)!$ choix.

Protocole de choix bijectif de f du cas 2 :

- on choisit les $(y_1, y_2) \in [\![1; n]\!]^2$ (avec $y_1 < y_2$) qui ont deux antécédents par f : $\dbinom{n}{2}$ choix.
- on choisit les deux antécédents x_1, x_2 de y_1 et x_3, x_4 de y_2 par f : $\dbinom{n+2}{2}\dbinom{n}{2}$ choix.

- on choisit une permutation entre $[\![1;n+2]\!] \setminus \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ et $[\![1;n]\!] \setminus \{y_1,y_2\}$: $(n-2)!$ choix.

Ainsi : $S_{1,n} = n\binom{n+2}{3}(n-1)!$ et $S_{2,n} = \binom{n}{2}\binom{n+2}{2}\binom{n}{2}(n-2)!$.

Alors $S_n = S_{1,n} + S_{2,n} = n\binom{n+2}{3}(n-1)! + \binom{n}{2}\binom{n+2}{2}\binom{n}{2}(n-2)! = \dfrac{(n+2)!n(3n+1)}{24}$.

7.3 On modélise notre expérience par le choix équiprobable d'une permutation $\sigma \in P_n$ (une chance sur $n!$ pour chaque) telle que $\sigma(1)$ est le numéro du danseur que va "récupérer" la danseuse 1, etc...
L'évènement A : " aucun couple ne se reforme comme avant" est $\{\sigma \in P_n \mid \forall k \in [\![1;n]\!],\ \sigma(k) \neq k\}$.
Par conséquent $\overline{A} = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ avec les notations de l'énoncé car $F_k = \{\sigma \in P_n \mid \sigma(k) = k\}$.
Avec la formule du crible : $\text{card}\,(\overline{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \text{card}\Big(\bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j}\Big)\Big)$. Or, pour $k \in [\![1;n]\!]$ et $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, on a $\text{card}\Big(\bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j}\Big) = (n-k)!$ car on fixe k éléments et laisse libres les $n-k$ autres de faire n'importe laquelle des $(n-k)!$ permutations.
Ainsi $\text{card}\,(\overline{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!$ car il existe $\binom{n}{k}$ choix de cette famille $(i_1,\cdots,i_k)$ pour une valeur de k fixée. Alors : $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(P_n)} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$ qui tend extrêmement vite vers $e^{-1} \sim 0,37$.

7.4 Quinte Flush (par exemple $7,8,9,10$ et Valet de ♣) : $40 = 10 \times 4$ mains.

- choix de la hauteur de la plus petite carte : 10 dans $\{\text{As},2,\cdots,10\}$ (car 10/Valet/Dame/Roi/As).
- choix de la couleur de ces 5 cartes : 4 dans {Pique, Cœur, Carreau, Trèfle}.

Carré (par exemple les quatre Dames de ♢, ♡, ♠, ♣ et le 7 de ♠) : $624 = 13 \times 48$ mains.
- choix de la hauteur des cartes du carré : 13 entre 2 et As.
- choix de la dernière et cinquième carte : 48 (toutes sauf les 4 du carré).

Full (par exemple les trois 8 de ♡, ♢, ♣, et les deux Rois de ♠ et ♢) : $3744 = 13 \times 4 \times 12 \times 6$ mains.
- choix de la hauteur des cartes du brelan : 13.
- choix de la carte de cette hauteur qu'on ne prend pas dans le brelan : 4.
- choix de la hauteur des deux cartes de la paire : 12.
- choix des deux cartes dans cette hauteur : $\binom{4}{2} = 6$.

Couleur (par exemple $2,7,9$, Dame et As de ♠) : $5108 = 4 \times (1287 - 10)$ mains.
- choix de la couleur des cartes : 4.
- choix simultané de 5 hauteurs dans cette couleur (hors quinte) : $\binom{13}{5} - 10$.

Suite (ou quinte) (par ex. As ♡, 2 ♣, 3 ♢, 4 ♠ et 5 ♣) : $10200 = 10 \times (1024 - 4)$ mains.
- choix de la hauteur de la plus petite carte : 10.
- choix des couleurs de ces cartes dans chacune des 5 hauteurs (hors couleur) : $4^5 - 4$.

Brelan (par exemple 10 de ♠, ♡, ♢, 4 de ♣ et Roi de ♡) : $54912 = 13 \times 220 \times 4 \times 64$ mains.
- choix de la hauteur des trois cartes du brelan : 13.
- choix simultané des hauteurs des trois autres cartes : $\binom{12}{3}$.
- choix de la carte de cette hauteur qu'on ne prend pas dans le brelan : 4.
- choix des couleurs des trois autres cartes dans chacune des trois hauteurs : 4^3.

Double paire (par exemple 5 de ♡, ♣, 9 de ♠, ♣ et 8 de ♢) : $123552 = 78 \times 6 \times 6 \times 44$ mains.
- choix simultané des deux hauteurs des deux paires : $\binom{13}{2}$.

- choix des deux couleurs de la paire la plus haute : $\binom{4}{2}$.
- choix des deux couleurs de la paire la plus basse : $\binom{4}{2}$.
- choix de la dernière carte (hors les 8 des deux hauteurs des paires) : 44.

<u>Paire</u> (par exemple As de $\heartsuit, \diamondsuit$, 2 de $\clubsuit$, 7 de $\spadesuit$ et Roi de $\clubsuit$) : <u>$1098240 = 13 \times 220 \times 6 \times 64$ mains</u>.
- choix de la hauteur de la paire : 13.
- choix simultané des trois hauteurs des trois autres cartes : $\binom{12}{3}$.
- choix des deux couleurs des cartes de la paire : $\binom{4}{2}$.
- choix des trois couleurs des trois autres cartes : 4^3.

<u>Carte haute</u> (par ex. 3 de $\diamondsuit$, 5 de $\clubsuit$, 10 de $\spadesuit$, Valet de $\clubsuit$, As de $\diamondsuit$) : <u>$1302540 = (1287 - 10) \times (1024 - 4)$ mains</u>.
- choix d'ensembles de 5 hauteurs différentes (hors quinte) : $\binom{13}{5} - 10$.
- choix des couleurs des cartes dans ces cinq hauteurs (hors couleur) : $4^5 - 4$.

On vérifie que le nombre total de mains de 5 cartes sur un jeu de 52 cartes, c'est-à-dire $\binom{52}{5}$, est la somme des cardinaux trouvés : $2598960 = 40 + 624 + 3744 + 10200 + 5108 + 54912 + 123552 + 1098240 + 1302540$.

7.5 On note $A_{n,p} = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} |\alpha_i| = p\}$ qu'on veut dénombrer et, pour $k \in [\![1;n]\!]$, la partie $A_{n,p,k} = \left\{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in A_{n,p} \;\middle|\; \mathrm{card}\,\{i \in [\![1;n]\!] \mid |\alpha_i| = p\} = k\right\}$ de $A_{n,p}$. Il est clair que $A_{n,p} = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_{n,p,k}$ et que cette réunion est disjointe. Ainsi, $\mathrm{card}\,(A_{n,p}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card}\,(A_{n,p,k})$.

Protocole de choix bijectif pour compter les éléments $A_{n,p,k}$:

- on choisit les k indices $i \in [\![1;n]\!]$ tels que $|\alpha_i| = p$: $\binom{n}{k}$ choix.
- on choisit les signes de ces k termes : 2^k choix.
- on choisit les $n - k$ termes α_i restants dans $[\![-(p-1);(p-1)]\!]$: $(2p-1)^{n-k}$ choix.

Ainsi $\mathrm{card}\,(A_{n,p,k}) = \binom{n}{k} 2^k (2-1)^{n-k}$. Par conséquent, on a $\mathrm{card}\,(A_{n,p}) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k (2-1)^{n-k}$ ou encore $\mathrm{card}\,(A_{n,p}) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (2-1)^{n-k}\right) - (2p-1)^n = (2p+1)^n - (2p-1)^n$ par le binôme de Newton.

On pouvait le voir plus simplement en écrivant que $A_{n,p} = [\![-p;p]\!]^n \setminus [\![-(p-1);(p-1)]\!]^n$ ce qui permet d'affirmer que $\mathrm{card}\,(A_{n,p}) = \mathrm{card}\,([\![-p;p]\!]^n) - \mathrm{card}\,([\![-(p-1);(p-1)]\!]^n)$ car $[\![-(p-1);(p-1)]\!]^n \subset [\![-p;p]\!]^n$. On trouve de même $\mathrm{card}\,(A_{n,p}) = (2p+1)^n - (2p-1)^n$.

7.6 **a.** Pour une surjection d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, on sait que $p \geqslant n$. Ainsi, il vient $S_{p,n} = 0$ si $n > p$.

b. On partitionne $\mathcal{F}(E,F)$ selon le cardinal de $\mathrm{Im}\,(f)$, c'est-à-dire $\mathcal{F}(E,F) = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ où l'on a défini l'ensemble $F_k = \{f \in \mathcal{F}(E,F) \mid \mathrm{card}\,(\mathrm{Im}\,(f)) = k\}$. Comme $p \geqslant 1$, on a bien $1 \leqslant \mathrm{card}\,(\mathrm{Im}\,(f)) \leqslant n$ si $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

Pour dénombrer F_k, c'est-à-dire pour construire de manière bijective une fonction $f \in F_k$:

- on choisit les k éléments $y_1, \ldots, y_k$ de F qui seront dans l'image de f : $\binom{n}{k}$ choix !
- on choisit une surjection de E dans $\{y_1, \ldots, y_k\}$ donc f sera juste le prolongement : $S_{p,k}$ choix.

La partition implique que $n^p = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card}\,(F_k) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_{p,k}$.

Comme $S_{p,0}=0$ car $p\geqslant 1$, et d'après **a.**, on a donc $\forall n\geqslant 1,\ \forall p\geqslant 1,\ n^p=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_{p,k}=\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}S_{p,k}$.
Pour $n=0$ et $p\geqslant 1$, cette relation revient à $0=0$ car $S_{p,0}=0$ par convention.
Pour $n\geqslant 1$ et $p=0$, cette relation revient à $1=1$ car $S_{0,0}=0$ par convention.
On peut donc affirmer que : $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\ n^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}S_{p,k}$.

c. On écrit $A=MB$ et ${}^tM=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f)=\left(\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ où $f:P\mapsto P(X+1)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Or $f^{-1}:P\mapsto P(X-1)$ donc $({}^tM)^{-1}={}^t(M^{-1})=\left((-1)^{j-i}\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$. Mais $A=MB\iff B=M^{-1}A$, d'où la formule d'inversion de Pascal : $(\forall k\in[\![0;n]\!],\ a_k=\sum_{i=0}^{n}\binom{k}{i}b_i)\iff(\forall k\in[\![0;n]\!],\ b_k=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{k}{i}a_i)$.

d. Il suffit d'écrire, en fixant $p\geqslant 0$, que $\forall n\in[\![0;p]\!],\ n^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}S_{p,k}$ et d'utiliser la formule d'inversion de Pascal de la question **c.** pour avoir $\forall p\geqslant 0,\ \geqslant n\in[\![0;p]\!],\ S_{p,n}=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p$.

7.2 Espaces probabilisés infinis

7.7 **a.** La séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers 1 et 2 si et seulement si on fait pile au lancer 1 et face au lancer 2 donc $E_2=P_1\cap F_2$.

b. Méthode 1 : la famille $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements puisque ces évènements sont incompatibles deux à deux par construction et que $A_0=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\overline{A_n}=\overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n}$.
Même si ce n'est pas demandé et pas nécessaire, on peut montrer que A_0 est négligeable ce qui montre que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'évènements. En effet, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A_0\subset\bigcap_{k=1}^{n}F_k$ (pour ne jamais tomber sur pile, il faut au moins ne pas faire pile dans les n premiers lancers). Ainsi, par indépendance de $F_1,\cdots,F_n$ (qu'on suppose de manière raisonnable sinon on ne sait rien faire) et par croissance de $\mathbb{P}$, on a $\mathbb{P}(A_0)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(F_k)$ donc $0\leqslant\mathbb{P}(A_0)\leqslant\beta^n$. On passe à la limite dans cet encadrement et il vient $\mathbb{P}(A_0)=0$.
Par la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(E_n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n\cap A_k)$ (le cas $k=0$ importe peu). Or $\forall k\geqslant n,\ E_n\cap A_k=\emptyset$ par définition de E_n et de A_k et on a aussi $E_n\cap A_0=\emptyset$. Ainsi $\mathbb{P}(E_n)=\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(E_n\cap A_k)$.

Méthode 2 : plus simplement, on a déjà clairement $\bigcup_{k=1}^{n-1}(E_n\cap A_k)\subset E_n$. Réciproquement, si $\omega\in E_n$, on a $\omega\in P_{n-1}$ donc on peut définir $k=\mathrm{Min}(i\in[\![1;n-1]\!]\mid\omega\in P_i)$ car $\{i\in[\![1;n-1]\!]\mid\omega\in P_i\}$ est non vide et minoré par 1. Par définition du minimum et de A_k, on a donc $\omega\in E_n\cap A_k$. Alors, on a bien $E_n\subset\bigcup_{k=1}^{n-1}(E_n\cap A_k)$. Ainsi, par double inclusion, on parvient à $E_n=\bigcup_{k=1}^{n-1}(E_n\cap A_k)$. Comme $(E_n\cap A_k)_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ forme une famille d'évènements incompatibles deux à deux, par additivité (finie), on a donc à nouveau $\mathbb{P}(E_n)=\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(E_n\cap A_k)$.

c. Par construction, $E_n\cap A_{n-1}=F_1\cap\cdots\cap F_{n-2}\cap P_{n-1}\cap F_n$ donc, par indépendance de ces évènements, on a $\mathbb{P}(E_n\cap A_{n-1})=\left(\prod_{k=1}^{n-2}\mathbb{P}(F_k)\right)\times\mathbb{P}(P_{n-1})\times\mathbb{P}(F_n)=\alpha\beta^{n-1}$. On pouvait aussi dire, par la définition des probabilités conditionnelles, que $\mathbb{P}(E_n \cap A_{n-1}) = \mathbb{P}_{A_{n-1}}(E_n)\mathbb{P}(A_{n-1})$. Or si A_{n-1} est réalisé, la probabilité qu'on réalise E_n est clairement β (il ne reste qu'un face à faire après le pile du lancer $n-1$) : $\mathbb{P}_{A_{n-1}}(E_n) = \beta$. De plus $A_{n-1} = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-2} \cap P_n$, ce qui donne par indépendance de ces évènements, comme avant, $\mathbb{P}(A_{n-1}) = \beta^{n-2}\alpha$. Et on obtient à nouveau $\mathbb{P}(E_n \cap A_{n-1}) = \alpha\beta^{n-1}$.

d. Pour $k \in [\![1; n-2]\!]$, $E_n \cap A_k = F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k \cap P_{k+1} \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n$ (pas de face entre les tirages k et $n-1$ sinon la première séquence PF ne serait pas aux lancers $n-1$ et n).

Ainsi, par indépendance mutuelle de ces évènements, on a encore $\mathbb{P}(E_n \cap A_k) = \alpha^{n-k}\beta^k$.

e. Avec **b**, **c.** et **d.**, $\mathbb{P}(E_n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha^{n-k}\beta^k = \alpha\beta \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha^{n-2-(k-1)}\beta^{k-1} = \alpha\beta \sum\limits_{j=1}^{n-1} \alpha^{n-2-j}\beta^j$ (en posant $j = k-1$) ce qui donne, avec une célèbre formule à connaître, $\mathbb{P}(E_n) = \alpha\beta\left(\dfrac{\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}}{\beta - \alpha}\right)$ car $\alpha \neq \beta$ par hypothèse. Si on tolère le cas $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$, alors, la formule précédente montre que $\mathbb{P}(E_n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{n-1}{2^n}$.

f. Par définition, on a $E = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n$ et que ces évènements sont incompatibles deux à deux, $\mathbb{P}(E) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)$ par σ-additivité donc $\mathbb{P}(E) = \dfrac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \beta^{n-1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha^{n-1}\right) = \dfrac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}\left(\dfrac{1}{1-\beta} - \dfrac{1}{1-\alpha}\right)$ ce qui se simplifie en $\mathbb{P}(E) = \dfrac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}\left(\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta}\right) = \dfrac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} \times \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} = 1$: on s'y attendait un peu !

7.8 **a.** Pour modéliser l'expérience d'un seul lancer des deux dès, en les supposant indépendants et non pipés, on peut prendre pour univers $\Omega = [\![1; 6]\!]^2$ (en mettant un ordre (ou une couleur) sur les deux dés puisqu'on parle de couple), la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et la probabilité $\mathbb{P}$ uniforme sur Ω.

- Il y a 5 manières de faire une somme de 6 avec deux dés : $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$, $(5,1)$.
- Il y a 6 manières de faire une somme de 7 avec deux dés : $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$, $(6,1)$.

Notons $p = \dfrac{5}{36}$ et $q = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$. Comme $A_1 = E_1$, on a $\mathbb{P}(A_1) = p$. De plus, par les règles du jeu, on a $A_2 = \overline{E_1} \cap \overline{F_1} \cap E_2$. Par indépendance mutuelle (supposée) des lancers, par la formule des probabilités composées, il vient $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\overline{E_1}) \times \mathbb{P}(\overline{F_1}|\overline{E_1}) \times \mathbb{P}(E_2|\overline{E_1} \cap \overline{F_1}) = (1-p)(1-q)p$.

b. De même, pour $k \geqslant 1$, $A_k = \left(\bigcap\limits_{j=1}^{k-1} (\overline{E_j} \cap \overline{F_j})\right) \cap E_k$ donc, encore par indépendance mutuelle des E_i et F_j, $\mathbb{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}p$. Or $G_A = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ est une réunion dénombrable d'évènements incompatibles deux à deux, $\mathbb{P}(G_A) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$ par σ-additivité. Comme $|(1-p)(1-q)| < 1$, on calcule la série géométrique $\mathbb{P}(G_A) = p\sum\limits_{k=1}^{+\infty} ((1-p)(1-q))^{k-1} = \dfrac{p}{1-(1-p)(1-q)} = \dfrac{5/36}{1-(31/36)\times(5/6)} = \dfrac{5\times 6}{216 - 31\times 5} = \dfrac{30}{61}$.

c. De même, pour $k \geqslant 1$, $B_k = \left(\bigcap\limits_{j=1}^{k-1} (\overline{E_j} \cap \overline{F_j})\right) \cap (\overline{E_k} \cap F_k)$ donc, à nouveau par indépendance mutuelle des E_i et F_j, $\mathbb{P}(B_k) = (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}(1-p)q$. Comme $G_B = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} B_k$ est une réunion dénombrable d'évènements incompatibles, $\mathbb{P}(G_B) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$ par σ-additivité donc $\mathbb{P}(G_B) = \dfrac{(1-p)q}{1-(1-p)(1-q)} = \dfrac{31}{61}$.

d. Par définition, on a $\Omega = G_A \cup G_B \cup C$ et cette réunion est disjointe donc $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(G_A) - \mathbb{P}(G_B) = 0$. La partie s'arrête presque sûrement (il y a un vainqueur dans 100% des cas.... mais pas tous).

7.9 **a.** Par la formule des probabilité totales en utilisant le système complet d'évènements (SCE) (A_n, B_n, C_n) : $a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid C_n)\mathbb{P}(C_n) = \frac{b_n}{2}$. De même $b_{n+1} = \frac{a_n}{2}$.

b. Comme $c_{n+1} = 1 - a_{n+1} - b_{n+1} = 1 - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{1 + c_n}{2}$ car on a aussi $a_n + b_n = 1 - c_n$.

En posant $d_n = 1 - c_n$, on a $d_0 = 1$ car $a_0 = 1 \Longrightarrow b_0 = c_0 = 0$, et de plus : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} = \frac{d_n}{2}$.

Il est classique qu'alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \frac{1}{2^n}$ donc $c_n = 1 - \frac{1}{2^n}$.

c. Comme $C_n \subset C$, on a $\overline{C} \subset \overline{C_n}$ donc $\mathbb{P}(\overline{C}) \leqslant \mathbb{P}(\overline{C_n}) = 1 - c_n = \frac{1}{2^n}$. Ainsi $\mathbb{P}(\overline{C}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{P}(C) = 1$.

d. $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} C_n$ et $(C_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante : $\mathbb{P}(C) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(C_n) = 1$ par continuité croissante.

7.10 **a.** $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable donc $U_n \in \mathcal{A}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ car les A_k sont dans $\mathcal{A}$ par hypothèse. Ensuite $B \in \mathcal{A}$ comme intersection dénombrable des U_n. Par construction de B, on a $\omega \in \mathcal{B} \Longleftrightarrow \Big(\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geqslant n,\ \omega \in A_k\Big) \Longleftrightarrow$ (il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $\omega \in A_n$).

b. Comme $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, par continuité décroissante : $\mathbb{P}(B) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(U_n)$.

Or, par sous-additivité, $0 \leqslant \mathbb{P}(U_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = R_{n-1}$ qui est le reste d'ordre $n-1$ de la série $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ qui est convergente par hypothèse. Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} R_{n-1} = 0$ donc, par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(U_n) = \mathbb{P}(B) = 0$.

c. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'évènements indépendants donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \geqslant n$, $\overline{A_n}, \cdots, \overline{A_m}$ sont indépendants aussi. Ainsi, $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\Big) = \prod_{k=n}^{m} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{m} (1 - \mathbb{P}(A_k))$. Or, par une étude de fonction ou par le fait que $\exp$ est convexe, on montre classiquement l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - x \leqslant e^{-x}$. Ainsi, on obtient la majoration $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\Big) \leqslant \prod_{k=n}^{m} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = \exp\Big(-\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)\Big)$.

- Dans le cas où $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, on vient de voir à la question **b.** que $\mathbb{P}(B) = 0$ indépendamment de l'hypothèse d'indépendance mutuelle de la famille $(A_n)_{n \geqslant 0}$.
- Dans le cas où $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, en utilisant ce qui précède, comme $\overline{U_n} = \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k} = \bigcap_{m=n}^{+\infty} \Big(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\Big)$ et que la famille $\Big(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\Big)_{m \geqslant n}$ est décroissante, par continuité décroissante, $\mathbb{P}(\overline{U_n}) = \lim_{m \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\Big)$.

Or $\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$ par divergence de $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$, $\lim_{m \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\Big) = 0$ par encadrement donc $\mathbb{P}(\overline{U_n}) = 0$ et $\mathbb{P}(U_n) = 1$. On pouvait aussi utiliser l'inclusion $\overline{U_n} \subset \bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}$ et conclure aussi $\mathbb{P}(\overline{U_n}) = 0$ par encadrement. On conclut comme en question **b.** par continuité décroissante que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(U_n) = \mathbb{P}(B) = 1$.

On a donc $\mathbb{P}(B) = 0$ si $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge et $\mathbb{P}(B) = 1$ si $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

d. En notant P_k = "on fait pile au tirage k", on a $A_n = \bigcap_{k=n}^{2n-1} P_k$ et les P_k sont indépendants donc

$\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=n}^{2n-1} \mathbb{P}(P_k) = \frac{1}{2^n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge (série géométrique) donc $\mathbb{P}(B) = 0$ avec **b.**.

e. Avec les mêmes notations, on a maintenant $A_n = \bigcap_{k=n}^{n+p-1} P_k$ donc $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^p}$. Toutefois, la famille $(A_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas une famille d'évènements indépendants. On se sert donc de l'inclusion $\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_{pk} \subset \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ qui provient de $\{pk \mid k \geqslant n\} \subset \{k \mid k \geqslant n\}$. Comme ils portent sur des tirages qui ne se recoupent pas, les A_{pk} sont indépendants donc, en notant $B' = \bigcap_{n=0}^{+\infty} U'_n$ où $U'_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_{pk}$, on a $B' \subset B$ et $\mathbb{P}(B') = 1$ d'après la question **c.** puisque la série $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(A_{pk})$ diverge puisque $\mathbb{P}(A_{pk}) = \frac{1}{2^p} > 0$ est indépendant de k. Puisque $B' \subset B \subset \Omega$ et que $\mathbb{P}(B') = \mathbb{P}(\Omega) = 1$, on a $\mathbb{P}(B) = 1$.

7.3 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

7.11 On modélise cette expérience en estimant qu'on tire toutes les allumettes des deux boîtes, on associe à ce tirage un $2n$-uplet de 1 et de 2 (représentant bien sûr les boîtes 1 et 2). $(1,2,2,1,1,2)$ signifie qu'avec deux boîtes de 3 allumettes, on a tiré dans l'ordre des allumettes dans les boîtes 1, puis 2 deux fois, puis 1 deux fois, puis 2 de sorte que la boîte 1 a été vide au tirage 5 et qu'il restait $k = 1$ allumette dans la boîte 2.
Ainsi $\Omega = \{(a_1, \cdots, a_{2n}) \in \{1,2\}^{2n} \mid \text{card}(\{k \in [\![1;2n]\!] \mid a_k = 1\}) = \text{card}(\{k \in [\![1;2n]\!] \mid a_k = 2\})\}$.
On définit R_k = "il reste k allumettes dans l'une des boîtes quand l'autre est vide". Alors $R_k = R_k^{(1)} \sqcup R_k^{(2)}$ où $R_k^{(i)}$ = "il reste k allumettes dans la boîte i quand l'autre est vide". Ces évènements $R_k^{(1)}$ et $R_k^{(2)}$ étant incompatibles, on a $\mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(R_k^{(1)}) + \mathbb{P}(R_k^{(2)}) = 2\,\mathbb{P}(R_k^{(1)})$ par symétrie entre les boîtes 1 et 2.
Or les $2n$-uplets $(a_1, \cdots, a_{2n})$ de $R_k^{(1)}$ terminent par k fois la valeur 1 ($a_{2n-k+1} = \cdots = a_{2n} = 1$) et vérifient $a_{2n-k} = 2$ (pour vider la boîte 2 au bon moment). Dénombrer les éléments de $R_k^{(1)}$ revient à choisir les positions des $n-1$ autres 2 du $2n$-uplet parmi les $2n-k-1$ premiers tirages. Ainsi, $\text{card}(R_k^{(1)}) = \binom{2n-k-1}{n-1}$.
La difficulté vient du fait que la probabilité n'est pas uniforme sur tous les $2n$-uplets. L'énoncé précise que l'on pioche dans les deux boîtes de manière équiprobable mais bien sûr tant qu'il y a au moins une allumette dans les deux boîtes. Dès que l'une est vide, on n'a plus de choix. Ainsi, chaque évènement élémentaire $(a_1, \cdots, a_{2n}) \in R_k^{(1)}$ a une probabilité $\frac{1}{2^{2n-k}}$ d'intervenir car on a le choix de la boîte $2n-k$ fois et on n'a plus le choix pour les k derniers tirages qui ne se font que dans la boîte 1 (la boîte 2 est vide). Ainsi $\mathbb{P}(R_k) = \frac{2}{2^{2n-k}} \times \binom{2n-k-1}{n-1} = \frac{1}{2^{2n-k-1}}\binom{2n-k-1}{n-1}$. Comme $k \in [\![1;n]\!]$, on a $\Omega = \bigsqcup_{k=1}^{n} R_k$ et ces évènements sont incompatibles 2 à 2. Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2n-k-1}{n-1}}{2^{2n-k-1}} = \sum_{j=n-1}^{2n-2} \frac{\binom{j}{n-1}}{2^j} = 1$.

7.12 F_n = "on obtient face au lancer n" et A_n = "on obtient pile pour la première fois au bout de n lancers". Ainsi $A_n = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap \overline{F_n}$ ce qui donne, par indépendance (qu'on suppose sinon on ne peut plus rien faire) de la famille d'évènements $(F_n)_{n\geqslant 1}$, la relation $\mathbb{P}(A_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(F_k)\right) \times \mathbb{P}(\overline{F_n}) = (1-p)^{n-1}p$.

Par définition, $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{2n}$ (réunion dénombrable d'évènements incompatibles deux à deux). On en déduit par σ-additivité que $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_{2n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{2n-1}p = p(1-p)\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{2k} = \dfrac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \dfrac{1-p}{2-p}$.

De même, $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{3n}$ (réunion dénombrable d'évènements incompatibles deux à deux). Par σ-additivité, on en déduit que $\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_{3n}) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{3n-1}p = p(1-p)^2\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{3k} = \dfrac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^3} = \dfrac{(1-p)^2}{3-3p+p^2}$.

Or, comme 2 et 3 sont premiers entre eux, on a $(2|n$ et $3|n) \iff 6|n$.

• En effet, si n est un multiple de 6, n est clairement un multiple de 2 et de 3 par transitivité car $2|6$ et $3|6$.

• Réciproquement, soit $n \in \mathbb{N}$ à la fois multiple de 2 et de 3. Alors, en écrivant la division euclidienne de n par 6, on a $n = 6q + r$ avec $r \in [\![0;5]\!]$. Or $2|n$ et $2|6$ donc, par combinaison linéaire, $r = n - 6q$ est un multiple de 2. De même, comme $3|n$ et $3|6$, r est un multiple de 3. Le seul entier dans $[\![0;5]\!]$ à être à la fois multiple de 2 et 3 est 0 donc $n = 6q$ est un multiple de 6.

Ainsi, $A \cap B =$ "on a pile pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 6" $= \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{6n}$ (réunion dénombrable d'évènements incompatibles deux à deux). Comme avant, $\mathbb{P}(A\cap B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_{6n})$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{6n-1}p = p(1-p)^5\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{6k} = \dfrac{p(1-p)^5}{1-(1-p)^6} = \dfrac{(1-p)^5}{6-15p+20p^2-15p^3+6p^4-p^5}$.

Alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \iff \dfrac{(1-p)^5}{6-15p+20p^2-15p^3+6p^4-p^5} = \dfrac{1-p}{2-p} \times \dfrac{(1-p)^2}{3-3p+p^2}$ donc, comme $p \neq 1$, cela devient $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \iff (1-p)^2(2-p)(3-3p+p^2) = 6-15p+20p^2-15p^3+6p^4-p^5$.

En développant, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \iff p^3-5p^2+9p-6 = 0 \iff (p-2)(p^2-3p+3) = 0$ en simplifiant par $p \neq 0$. Puisque le discriminant de l'équation $p^2-3p+3 = 0$ est $\Delta = 9 - 12 < 0$, il n'y a pas de solution réelle de l'équation $(p-2)(p^2-3p+3) = 0$ dans $]0;1[$.

En conclusion, pour tout $p \in]0;1[$, les évènements A et B ne sont pas indépendants.

7.13 **a.** Le joueur A_0 gagne si et seulement s'il gagne les trois premières parties donc $p_0 = \dfrac{1}{8}$ et $q_0 = 1$.

Si $n \geqslant 1$, on constate d'abord que si la partie n a bien lieu (personne n'a gagné avant), alors elle fait forcément intervenir le personnage A_n d'après la définition du jeu. Ensuite, pour que le personnage A_n gagne le jeu (en entier), il est nécessaire et suffisant qu'il gagne la partie numéro n (contre A_{n-2} ou A_{n-1}) et qu'il gagne la partie numéro $n+1$ contre A_{n+1} et la partie numéro $n+2$ contre A_{n+2}.

On pose donc les évènements :

- $U_n =$ "A_n gagne la partie numéro n",
- $Q_n =$ "A_n joue au moins une fois" $=$ "A_n joue la partie numéro n" et
- $P_n =$ "A_n gagne le jeu".

Alors $P_n = U_n \cap \overline{U_{n+1}} \cap \overline{U_{n+2}}$ et, comme $U_n \subset Q_n$, par la formule des probabilités composées, on a $p_n = \mathbb{P}(P_n) = \mathbb{P}(Q_n \cap U_n \cap V_n \cap W_n) = \mathbb{P}(Q_n)\,\mathbb{P}_{Q_n}(U_n)\,\mathbb{P}_{U_n}(V_n)\,\mathbb{P}_{U_n\cap V_n}(W_n)$. Avec l'énoncé, $p_n = \dfrac{q_n}{8}$.

b. Les premiers qui peuvent gagner le jeu sont A_0 et A_1 en ayant gagné le premier match l'un contre l'autre puis contre A_2 et A_3. Ainsi, les quatre premiers personnages sont forcés de jouer au moins une partie, d'où $q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = 1$. D'après la question **a.**, on a $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = \dfrac{1}{8}$.

Pour que le personnage A_4 joue, il est nécessaire et suffisant que les trois premières parties voient les vainqueurs successifs $A_0A_0A_3$ ou $A_0A_2A_2$ ou $A_0A_2A_3$ ou $A_1A_1A_3$ ou $A_1A_2A_2$ ou $A_1A_2A_3$: $q_4 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

c. <u>Méthode 1</u> : pour $n \geqslant 2$, comme $\{U_{n+1}, \overline{U_{n+1}}\}$ est un système complet d'évènements, on peut décomposer l'évènement Q_{n+2} en $Q_{n+2} = (Q_{n+2} \cap U_{n+1}) \sqcup (Q_{n+2} \cap \overline{U_{n+1}})$.

• Or $Q_{n+2} \cap U_{n+1} = Q_{n+1} \cap U_{n+1}$ car si le joueur A_{n+1} gagne sa partie, il joue contre A_{n+2}.

• Si A_{n+1} perd sa partie et que A_{n+2} joue, c'est que le joueur A_n a gagné sa partie contre A_{n-1} ou A_{n-2} et qu'il arrive contre A_{n+2} avec deux victoires d'affilée. Ainsi, $Q_{n+2} \cap \overline{U_{n+1}} = Q_n \cap U_n \cap \overline{U_{n+1}}$.

Par conséquent, $\mathbb{P}(Q_{n+2}) = \mathbb{P}(Q_{n+1})\,\mathbb{P}_{Q_{n+1}}(U_{n+1}) + \mathbb{P}(Q_n)\,\mathbb{P}_{Q_n}(U_n)\,\mathbb{P}_{Q_n \cap U_n}(\overline{U_{n+1}})$ et on la récurrence double $q_{n+2} = q_{n+1} \times \frac{1}{2} + q_n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ donc $q_{n+2} = \frac{q_{n+1}}{2} + \frac{q_n}{4}$. Les racines de l'équation caractéristique $z^2 - \frac{z}{2} - \frac{1}{4} = 0$ étant $w_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $w_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, il existe α, β tels que $\forall n \geqslant 2,\ q_n = \alpha w_1^n + \beta w_2^n$. Avec les conditions $q_2 = q_3 = 1$ et $q_4 = \frac{3}{4}$, $\alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ et $\beta = \frac{4}{\sqrt{5}}$. Ainsi, $\forall n \geqslant 2,\ q_n = \frac{4}{4^n\sqrt{5}}\big((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\big)$.

<u>Méthode 2</u> : soit $n \geqslant 1$, le personnage A_{n+3} ne joue pas équivaut, par le principe du jeu, au fait que le jeu soit terminé avant qu'on en arrive à lui, c'est-à-dire que l'un des joueurs $A_0, \cdots, A_n$ gagne le jeu. Ainsi, on en déduit $\overline{Q_{n+3}} = \bigsqcup_{k=0}^{n} P_k$. Si $n \geqslant 2$, comme $\bigsqcup_{k=0}^{n} P_k = P_n \sqcup \Big(\bigsqcup_{k=0}^{n-1} P_k\Big)$, on a $\overline{Q_{n+3}} = P_n \sqcup \overline{Q_{n+2}}$.

Comme P_n et $\overline{Q_{n+2}}$ sont incompatibles, on a $\forall n \geqslant 2,\ 1 - q_{n+3} = p_n + 1 - q_{n+2} = \frac{q_n}{8} + 1 - q_{n+2}$. Ainsi, on a la récurrence d'ordre 3 : $\forall n \geqslant 2,\ q_{n+3} - q_{n+2} + \frac{q_n}{8} = 0$ dont l'équation caractéristique associée (comme pour les récurrences linéaires d'ordre 2) est $z^3 - z^2 + \frac{1}{8} = 0$.

Les racines de cette équation sont $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $z_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Ainsi $q_0 = 1$, $q_1 = 1$ et il existe trois réels A, B, C tels que $\forall n \geqslant 2,\ q_n = Az_1^n + Bz_2^n + Cz_3^n$. On trouve, avec les trois conditions $q_2 = q_3 = 1$ et $q_4 = \frac{3}{4}$, $A = 0$, $B = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ et $C = \frac{4}{\sqrt{5}}$. Ainsi, $\forall n \geqslant 2,\ q_n = \frac{4}{4^n\sqrt{5}}\big((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\big)$.

d. <u>Méthode 1</u> : si G = “le jeu s'arrête”, alors $G = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} P_n$ et, comme $(P_n)_{n\geqslant 0}$ est une famille d'évènements incompatibles deux à deux, par σ-additivité, $\mathbb{P}(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\Big(\sum_{n=2}^{+\infty} w_2^n - \sum_{n=2}^{+\infty} w_1^n\Big)$ ($|w_1| < 1$ et $|w_2| < 1$). Ainsi, $\mathbb{P}(G) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\Big(\frac{w_2^2}{1-w_2} - \frac{w_1^2}{1-w_1}\Big) = \frac{1}{4} + \frac{(w_1+w_2)(w_2-w_1) - w_1w_2(w_2-w_1)}{2\sqrt{5}(1-w_1)(1-w_2)}$.

Mais $w_1 + w_2 = \frac{1}{2}$, $w_1w_2 = -\frac{1}{4}$ et $w_2 - w_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $(1-w_1)(1-w_2) = 1 - (w_1+w_2) + w_1w_2 = \frac{1}{4}$ donc $\mathbb{P}(G) = \frac{1}{4} + \frac{(\sqrt{5}/4) + (\sqrt{5}/8)}{(\sqrt{5}/2)} = \frac{1}{4} + \frac{(1/4)+(1/8)}{(1/2)} = \frac{1}{4} + \frac{(3/8)}{(1/2)} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

<u>Méthode 2</u> : puisque $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ et $|z_3| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = 0$. Si G = “le jeu s'arrête”, alors $G = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} P_n$ et, comme $(P_n)_{n\geqslant 0}$ est une famille d'évènements incompatibles deux à deux, on a par σ-additivité la relation $\mathbb{P}(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = p_0 + p_1 + \sum_{n=2}^{+\infty}(q_{n+2} - q_{n+3}) = p_0 + p_1 + q_4 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = 1$ par télescopage.

Quelle que soit la méthode, quelqu'un finit presque sûrement par gagner !

<u>Question en plus</u> : On pose T = “l'élève travaille”, R = ”l'élève réussit”. L'énoncé nous dit que $\mathbb{P}_T(R) = 1$,

$\mathbb{P}(T) = 0,85$, $\mathbb{P}_{\overline{T}}(R) = 0,5$. Alors, la probabilité p qu'un élève ayant réussi ait travaillé est, d'après la formule de BAYES, $p = \mathbb{P}_R(T) = \dfrac{\mathbb{P}_T(R)\,\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}_T(R)\,\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}_{\overline{T}}(R)\,\mathbb{P}(\overline{T})} = \dfrac{1 \times 0,85}{1 \times 0,85 + 0,5 \times 0,15} \sim 0,919$.

7.14 **a.** D'abord, on convient que la première personne qui envoie la lettre n'a jamais reçu la lettre. Notons l'évènement $A_k =$ "la personne qui reçoit la lettre après son k-ième envoi n'a pas déjà reçu de lettre". Si on note $A =$ "les n personnes reçoivent une lettre", alors on a par construction $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. Par la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots A_{n-1}}(A_n)$. Or, $\mathbb{P}(A_1) = 1$, $\mathbb{P}(A_2) = 1$ et, si on suppose le choix du destinataire uniforme pour chaque expéditeur, on a $\mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots A_{k-1}}(A_k) = \dfrac{n-k+1}{n-1}$ pour $k \in [\![3;n]\!]$ car à part la personne qui fait le k-ième envoi, il y a $n-k+1$ personnes ayant déjà reçu une lettre et $n-1$ destinataires possibles. Par conséquent, $\mathbb{P}(A) = \prod\limits_{k=3}^{n} \dfrac{n-k+1}{n-1} = \dfrac{(n-2)!}{(n-1)^{n-2}}$.

b. Pour une personne P fixée, chacune des $n-1$ autres personnes a une probabilité $\dfrac{1}{n-1}$ d'envoyer sa lettre à P. Comme les envois sont indépendants mutuellement, le nombre de lettres que reçoit P suit le schéma de BERNOULLI et, en notant P_k : "la personne P reçoit k lettres", $\mathbb{P}(P_k) = \dbinom{n-1}{k}\left(\dfrac{1}{n-1}\right)^k\left(\dfrac{n-2}{n-1}\right)^{n-1-k}$.

Ainsi, la personne P reçoit p lettres avec une probabilité $\dbinom{n-1}{p}\left(\dfrac{1}{n-1}\right)^p\left(\dfrac{n-2}{n-1}\right)^{n-1-p}$.

7.15 **a.** Comme $\Omega = \mathbb{N}^*$, les conditions imposées à $\lambda \in \mathbb{R}$ sont $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(\{n\}) \in [0;1]$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$. On doit donc prendre $\lambda > 0$ et λ vérifiant la relation $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda n^{-s} = \lambda\zeta(s) = 1$ (la série de RIEMANN converge car justement $s > 1$). La seule valeur λ telle que la famille $\left(\lambda n^{-s}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ avec $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \lambda n^{-s}$ est donc $\lambda = \dfrac{1}{\zeta(s)}$.

b. Par définition, la variable aléatoire X admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n\,\mathbb{P}(X = n)$ converge. Or $n\,\mathbb{P}(X = n) = n\dfrac{n^{-s}}{\zeta(s)} = \dfrac{1}{\zeta(s)n^{s-1}}$. Ainsi, d'après les résultats sur les séries de RIEMANN, on sait que X admet une espérance finie si et seulement si $s - 1 > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $s > 2$.

c. Pour un entier $m \in \mathbb{N}^*$ quelconque, comme $A_m = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \{mn\}$, on a par σ-additivité

$$\mathbb{P}(A_m) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{mn\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(mn)^{-s}}{\zeta(s)} = \frac{1}{m^s}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} = \frac{1}{m^s}.$$

Soit p et q deux nombres premiers distincts. Il est clair qu'un multiple de pq est un multiple à la fois de p et de q donc $A_{pq} \subset A_p \cap A_q$. Réciproquement, soit un entier n à la fois multiple de p et de q. La décomposition en produit de nombres premiers de n contient donc au moins p^1 et q^1, ce qui fait que n est aussi un multiple de pq et on a établi que $A_p \cap A_q \subset A_{pq}$. On aurait pu dire que puisque p et q sont premiers entre eux, on a $(p|n$ et $q|n) \iff pq|n$ mais ce n'est pas au programme dans notre filière. Par double inclusion, $A_{pq} = A_p \cap A_q$ donc $\mathbb{P}(A_p \cap A_q) = \mathbb{P}(A_{pq}) = \dfrac{1}{(pq)^s} = \dfrac{1}{p^s}\dfrac{1}{q^s} = \mathbb{P}(A_p)\,\mathbb{P}(A_q)$ donc les évènements A_p et A_q sont indépendants par définition.

Plus généralement, on se donne une famille $p_{i_1}, \cdots, p_{i_r}$ une liste de nombres premiers tous différents.

- Un multiple de $\prod\limits_{k=1}^{r} p_{i_k}$ est (par transitivité de la divisibilité) un multiple de chaque p_{i_j} pour $j \in [\![1;r]\!]$.

• Réciproquement, si n est un multiple de tous les $p_{i_1}, \cdots, p_{i_r}$, alors la décomposition en produit de nombres premiers de n contient au moins $p_{i_1}^1 \times \cdots p_{i_r}^1$ donc n est un multiple de $m = \prod_{k=1}^{r} p_{i_k}$. Par double inclusion, comme ci-dessus, on a $A_m = \bigcap_{k=1}^{r} A_{i_k}$ donc $\mathbb{P}(A_m) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{r} A_{i_k}\Big) = \dfrac{1}{m^s} = \prod_{k=1}^{r} \dfrac{1}{p_{i_k}^s} = \prod_{k=1}^{r} \mathbb{P}(A_{i_k})$.

Par définition, les évènements $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont mutuellement indépendants (pour la loi précédente).

d. Tout entier $n \geqslant 2$ est le multiple d'au moins un nombre premier donc $\mathbb{N}^* \setminus \{1\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{p_k}$ ce qui donne, en passant au complémentaire, $\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_{p_k}} = \{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k \not| n\} = \{1\}$. On peut écrire $\{1\} = \bigcap_{N=1}^{+\infty} I_N$ avec $I_N = \bigcap_{k=1}^{N} \overline{A_{p_k}}$ et la suite des $(I_N)_{N\geqslant 1}$ étant décroissante pour l'inclusion, on peut conclure avec le théorème de continuité décroissante que $\mathbb{P}(\{1\}) = \dfrac{1}{\zeta(s)} = \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}(I_N)$. Or les $(A_{p_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ étant indépendants mutuellement, les $(\overline{A_{p_k}})_{k\in\mathbb{N}^*}$ le sont aussi ce qui montre que $\mathbb{P}(I_N) = \prod_{k=1}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_{p_k}}) = \prod_{k=1}^{N} \Big(1 - \dfrac{1}{p_k^s}\Big)$. On a bien, en passant à l'inverse : $\zeta(s) = \lim\limits_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N} \dfrac{1}{1-p_k^{-s}}$ qu'on note naturellement $\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \Big(1 - \dfrac{1}{p_k^s}\Big)$.

e. On va montrer que la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{p_n}$ diverge. Si $s > 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^s}$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{k^s} \geqslant \int_k^{k+1} \dfrac{dt}{t^s}$ par comparaison série-intégrale. On somme pour $k \in \mathbb{N}^*$ (tout converge) et on trouve avec Chasles $\zeta(s) \geqslant \int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^s} = \Big[\dfrac{t^{1-s}}{1-s}\Big]_1^{+\infty} = \dfrac{1}{s-1}$.

Ainsi, par encadrement, $\lim\limits_{s\to 1^+} \zeta(s) = +\infty$.

Soit $A \geqslant 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall s \in]1; 1+\alpha]$, $A+1 \leqslant \zeta(s)$. Or $\zeta(1+\alpha) = \lim\limits_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1-p_n^{-1-\alpha}}$ d'après la question **d.**, donc il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall N \geqslant N_0$, $\zeta(1+\alpha) - 1 \leqslant \prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1-p_n^{-1-\alpha}} (\leqslant \zeta(1+\alpha))$. Par conséquent, $\forall N \geqslant N_0$, $\prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1-p_n^{-1-\alpha}} \geqslant A$. Or $\prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1-p_n^{-1}} \geqslant \prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1-p_n^{-1-\alpha}}$ donc $\prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1-p_n^{-1}} \geqslant A$. Ceci montre que $\lim\limits_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1-p_n^{-1}} = +\infty$ ce qui s'énonce aussi $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \ln\Big(1 - \dfrac{1}{p_n}\Big) = -\infty$ en passant au logarithme. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\Big(1 - \dfrac{1}{p_n}\Big)$ diverge. Or, comme il existe une infinité de nombres premiers, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$ donc $\ln\Big(1 - \dfrac{1}{p_n}\Big) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{p_n} < 0$ d'où la divergence de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{p_n}$.

7.16 **a.** Notons, $n \in \mathbb{N}$, les évènements A_n = "vote pour A", B_n = "vote pour B", de sorte que, d'après l'énoncé, $B_n = \overline{A_n}$, $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $q_n = \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - p_n$. Pour $n \geqslant 1$, comme $\{A_{n-1}, B_{n-1}\}$ est un système complet d'évènements, on a par la formule des probabilités totales :

$$p_n = \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-1})\,\mathbb{P}(A_n|A_{n-1}) + \mathbb{P}(B_{n-1})\,\mathbb{P}(A_n|B_{n-1}) = (1-a)p_{n-1} + bq_{n-1},$$
$$q_n = \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_{n-1})\,\mathbb{P}(B_n|A_{n-1}) + \mathbb{P}(B_{n-1})\,\mathbb{P}(B_n|B_{n-1}) = ap_{n-1} + (1-b)q_{n-1}$$

Ceci se traduit matriciellement par $U_n = AU_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ avec $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$. Par une récurrence facile, on montre alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$. Reste donc à calculer A^n.

Comme $\mathrm{Tr}\,(A) = 2-a-b$ et $\det(A) = 1-a-b$, on a $\chi_A = X^2-(2-a-b)X+1-a-b = (X-1)(X-1+a+b)$ (1 est toujours valeur propre d'une matrice stochastique : la somme des termes dans chaque colonne fait 1). Effectuons la division euclidienne de X^n par χ_A, cela donne $X^n = Q_n\chi_A + R_n$ avec $R_n = a_nX + b_n$ et, en remplaçant X par 1 puis par $1-a-b < 1$, on obtient $1 = a_n + b_n$ et $(1-a-b)^n = a_n(1-a-b)+b_n$. En résolvant ce système, on trouve $a_n = \dfrac{1-(1-a-b)^n}{a+b}$ et $b_n = \dfrac{(1-a-b)^n-(1-a-b)}{a+b}$.
Ainsi, $A^n = Q_n(A)\chi_A(A)+R_n(A) = a_nA+b_nI_2 = \dfrac{1-(1-a-b)^n}{a+b}A+\dfrac{(1-a-b)^n-(1-a-b)}{a+b}I_2$. Après simplifications, $A^n = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b+a(1-a-b)^n & b-b(1-a-b)^n \\ a-a(1-a-b)^n & a+b(1-a-b)^n \end{pmatrix}$ et, comme $U_n = A^nU_0$, on obtient

$$p_n = \frac{(b+a(1-a-b)^n)p_0+(b-b(1-a-b)^n)q_0}{a+b},\ q_n = \frac{(a-a(1-a-b)^n)p_0+(a+b(1-a-b)^n)q_0}{a+b}.$$

b. Par hypothèse, $-1 < 1-a-b < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-a-b)^n = 0$ et la relation de la question précédente montre, comme $p_0+q_0 = 1$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{b}{a+b}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \dfrac{a}{a+b}$.

7.17 **a.** Par la formule des probabilités totales, comme $\{A_n, B_n, C_n\}$ est un système complet d'évènements, on a $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n)$ donc, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(B_n)+\mathbb{P}(C_n)\Big)$ car la puce "change" de point. Bien sûr, de même, on montre que l'on a $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(A_n)+\mathbb{P}(C_n)\Big)$ et $\mathbb{P}(C_{n+1}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(A_n)+\mathbb{P}(B_n)\Big)$. Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}MU_n$.

b. La matrice M est symétrique réelle donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral. Par un calcul simple, $\chi_M = (X+1)^2(X-2)$. Comme $M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, posons les vecteurs propres $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$ et $v_3 = (1,0,-1)$. Comme $E_{-1}(M)$ contient le plan $\mathrm{Vect}(v_2,v_3)$ (v_2 et v_3 ne sont pas colinéaires) et que $E_2(M)$ contient la droite $\mathrm{Vect}(v_1)$, M est diagonalisable car les ordres de multiplicité géométriques et algébriques coïncident pour les valeurs propres -1 et 2. Alors $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$ est une base de vecteurs propres et, par la formule de changement de base, $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Classiquement $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$ or, comme $v_1+v_2+v_3 = 3e_1$, $v_1-2v_2+v_3 = 3e_2$ et $v_1+v_2-2v_3 = 3e_3$, on a $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$.
Par un calcul fastidieux, on a donc $M^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n\\ 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n\\ 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n\end{pmatrix}$.

c. Il est clair que $J^3 = 3J$ donc $P = X(X-3)$ est annulateur de J. On écrit la division euclidienne de $(X-1)^n$ par P, à savoir $(X-1)^n = PQ_n + R_n$ avec $R_n = a_nX+b_n$ car $\deg(R_n) < \deg(P) = 2$. En évaluant en 0 et en 3, on a donc le système $(-1)^n = b_n$, $2^n = 3a_n+b_n$ donc $b_n = (-1)^n$ et $a_n = \dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$.
Ainsi, $(X-1)^n = PQ_n + \dfrac{2^n-(-1)^n}{3}X+(-1)^n$ ce qui, en remplaçant X par A, devient comme à la question

précédente, car $P(J)=0$ et $M=J-I_3$, $M^n=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}J+(-1)^nI_3$ (c'est plus simple).

d. Comme $\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}=\frac{1}{2}MU_n$, par une récurrence simple, on montre que $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n=\frac{1}{2^n}M^nU_0$. Par hypothèse, $U_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ donc, avec **b.**, $U_n=\dfrac{1}{3\times 2^n}\begin{pmatrix}2^n+2(-1)^n\\2^n-(-1)^n\\2^n-(-1)^n\end{pmatrix}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$.

e. Si $U_0=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ n'est pas imposé, avec le même calcul $U_n=\dfrac{1}{3\times 2^n}\begin{pmatrix}(a+b+c)2^n+(2a-b-c)(-1)^n\\(a+b+c)2^n+(2b-a-c)(-1)^n\\(a+b+c)2^n+(2c-a-b)(-1)^n\end{pmatrix}$.
Comme on a tout de même $a+b+c=\mathbb{P}(A_0)+\mathbb{P}(B_0)+\mathbb{P}(C_0)=1$ car $\{A_0,B_0,C_0\}$ est un système complet d'évènements, comme ci-dessus, $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$.

7.18 **a.** Soit $\{a_1,\cdots,a_r\}\in F_{n,r}$ où l'on impose comme dans l'énoncé $1\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_r\leqslant n+r-1$ et la condition $\forall i\in[\![1;r-1]\!],\ a_{i+1}-a_i>1$. Posons, pour tout $i\in[\![1;r]\!]$, $b_i=a_i-i+1$. Alors $b_1=a_1\geqslant 1$. De plus, pour $i\in[\![1;r-1]\!]$, $b_{i+1}-b_i=a_{i+1}-a_i-1>0$ par hypothèse donc $b_{i+1}>b_i$ et on a donc $\text{card}(\{b_1,\cdots,b_r\})=r$. Enfin, $b_r=a_r-r+1\leqslant n+r-1-r+1=n$ donc $\{b_1,\cdots,b_r\}\in E_{n,r}$. On vient de créer une application $\varphi:F_{n,r}\to E_{n,r}$ par $\varphi(\{a_1,\cdots,a_r\})=\{b_1,\cdots,b_r\}$.

<u>Injectivité</u> : soit $(\{a_1,\cdots,a_r\},\{a'_1,\cdots,a'_r\})\in F_{n,r}^2$ telles que $\varphi(\{a_1,\cdots,a_r\})=\varphi(\{a'_1,\cdots,a'_r\})$ avec $1\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_r\leqslant n+r-1$ et $1\leqslant a'_1\leqslant\cdots\leqslant a'_r\leqslant n+r-1$. Alors, pour tout entier $i\in[\![1;r]\!]$, on a la relation $a_i-i+1=b_i=b'_i=a'_i-i+1$ donc $a_i=a'_i$ ce qui montre que $\{a_1,\cdots,a_r\}=\{a'_1,\cdots,a'_r\}$.

<u>Surjectivité</u> : soit $\{b_1,\cdots,b_r\}\in E_{n,r}$ où $1\leqslant b_1<\cdots<b_r\leqslant n$. Si, pour $i\in[\![1;r]\!]$, on pose $a_i=b_i+i-1\in[\![1;n+r-1]\!]$, on a bien $\text{card}(\{a_1,\cdots,a_r\})=r$ et $\{a_1,\cdots,a_r\}\subset[\![1;n+r-1]\!]$ et $a_{i+1}-a_i=b_{i+1}-b_i+1>1$. On a bien $\{a_1,\cdots,a_r\}\in F_{n,r}$ et $\varphi(\{a_1,\cdots,a_r\})=\{b_1,\cdots,b_r\}$.

L'application φ étant une bijection entre ces deux ensembles, on a donc $\text{card}(E_{n,r})=\text{card}(F_{n,r})$.

b. L'énoncé prend visiblement $\Omega=E_{49,4}$ donc, d'après le cours, $\text{card}(\Omega)=\binom{49}{4}=\dfrac{49.48.47.46}{24}=2^2.7^2.23.47$ donc $\text{card}(\Omega)=211876$. On convient que $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$ et que la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme sur Ω.
Soit $A=$ « le tirage a au moins deux éléments consécutifs ». Alors $\overline{A}=$ « le tirage n'a pas deux éléments consécutifs » $=F_{46,4}$. D'après **a.**, $\text{card}(F_{46,4})=\text{card}(E_{46,4})=\binom{46}{4}=\dfrac{46.45.44.43}{24}=3.5.11.23.43=163185$.
Comme $\mathbb{P}$ est uniforme, $\mathbb{P}(\overline{A})=\dfrac{\text{card}(\overline{A})}{\text{card}(\Omega)}=\dfrac{3.5.11.23.43}{2^2.7^2.23.47}=\dfrac{3.5.11.43}{2^2.7^2.47}\sim 0.77$. Ainsi, $\mathbb{P}(A)=1-\mathbb{P}(\overline{A})\sim 0.23$.

c. Notons $D=$ « le tirage a exactement deux éléments consécutifs ». Alors $D=\bigsqcup\limits_{i=1}^{48}D_i$ où D_i est l'ensemble des tirages ayant exactement deux éléments consécutifs, i et $i+1$. $\text{card}(D)=\sum\limits_{i=1}^{48}\text{card}(D_i)$. Pour choisir un quadruplet dans D_i, on a trois possibilités qui s'excluent l'une l'autre, soit les deux autres termes à part i et $i+1$ sont tous les deux strictement avant $i-1$ mais non consécutifs (choix (1)), soit tous les deux strictement après $i+2$ mais non consécutifs (choix (2)), soit on en a un avant $i-2$ et un autre après $i+3$ (choix (3)).

- Si les éléments consécutifs sont $1,2$ ou $2,3$ ou $47,48$ ou $48,49$, seul un des trois cas est possible et on a $\mathrm{card}(D_1) = \mathrm{card}(F_{45,2}) = \mathrm{card}(E_{45,2}) = \dfrac{45.44}{2} = 990$, $\mathrm{card}(D_2) = \mathrm{card}(F_{44,2}) = \dfrac{44.43}{2} = 946$ puis $\mathrm{card}(D_{47}) = \mathrm{card}(F_{44,2}) = \dfrac{44.43}{2} = 946$, $\mathrm{card}(D_{48}) = \mathrm{card}(F_{45,2}) = \mathrm{card}(E_{45,2}) = \dfrac{45.44}{2} = 990$.

- Pour tout entier $i \in [\![3;46]\!]$, on a $\mathrm{card}(D_i) = \underbrace{\mathrm{card}(F_{i-3,2})}_{\mathrm{choix}(1)} + \underbrace{\mathrm{card}(F_{49-i-3,2})}_{\mathrm{choix}(2)} + \underbrace{(i-2)(49-i-2)}_{\mathrm{choix}(3)}$

donc $\mathrm{card}(D_i) = \dfrac{(i-3)(i-4)}{2} + \dfrac{(46-i)(45-i)}{2} + (i-2)(47-i) = 947$.

Ainsi, $\mathrm{card}(D) = 2 \times 990 + 2 \times 946 + 44 \times 947 = 45540$ et la probabilité d'avoir exactement deux éléments consécutifs dans le tirage vaut donc $\mathbb{P}(D) = \dfrac{\mathrm{card}(D)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \dfrac{45540}{211876} \sim 0.21$.

On pouvait aussi dénombrer les tirages avec trois ou quatre éléments consécutifs et les soustraire à ceux de la question **b.** pour trouver la même probabilité.

7.19 On suppose l'équiprobabilité d'être dans chacun des étages. On pose l'évènement $H_I =$ "l'homme est dans l'immeuble". D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(H_I) = p$. On pose aussi H_e : " l'homme est à l'étage e'' pour tout $e \in [\![1;7]\!]$. On vient de supposer que $\forall e \in [\![1;7]\!],\ \mathbb{P}(E_e) = \mathbb{P}(E_1)$. Or, comme $H_I = \bigsqcup_{e=1}^{7} H_e$ (réunion disjointe), on a $\mathbb{P}(H_I) = \sum_{e=1}^{7} \mathbb{P}(H_e)$ donc $\forall e \in [\![1;7]\!],\ \mathbb{P}(H_e) = \frac{p}{7}$. On définit l'évènement $A =$ "l'homme n'est pas dans les six premiers étages". Alors, avec ces notations, $A = \overline{H_I} \sqcup H_7$ donc $\mathbb{P}(A) = (1 - \mathbb{P}(H_I)) + \mathbb{P}(H_7) = 1 - p + \frac{p}{7}$ d'où $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{6p}{7}$. On demande de calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(H_7)$: probabilité qu'il soit dans l'immeuble sachant qu'il n'est pas dans les six premiers étages. Ainsi, $\mathbb{P}_A(H_7) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap H_7)}{\mathbb{P}(A)}$. Or $A \cap H_7 = H_7$ donc $\mathbb{P}_A(H_7) = \dfrac{p/7}{1 - (6p)/7} = \dfrac{p}{7 - 6p}$. On constate que si p tend vers 1, $\mathbb{P}_A(H_7)$ tend aussi vers 1 : l'homme est presque sûrement au septième étage ; et que si p tend vers 0, $\mathbb{P}_A(H_7)$ tend vers 0 : l'homme est presque sûrement hors de l'immeuble. C'est rassurant !

7.20 **a.** Par définition, $B = \bigcap_{i=0}^{+\infty} \overline{A_i} \subset \bigcap_{i=0}^{n} \overline{A_i}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ donc, par croissante de la probabilité $\mathbb{P}$, on a $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=0}^{n} \overline{A_i}\Big)$. Comme $A_0, \cdots, A_n$ sont indépendants, $\overline{A_0}, \cdots, \overline{A_n}$ le sont aussi et on a donc $\mathbb{P}(B) \leqslant \prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_i}) = \prod_{i=0}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_i))$. Or $\forall x \in [0;1[,\ \ln(1-x) \leqslant -x$ ce qui donne $\forall x \in [0;1],\ 1 - x \leqslant e^{-x}$ (même vrai si $x = 1$) par croissance de l'exponentielle. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(B) \leqslant \prod_{i=0}^{n} e^{-\mathbb{P}(A_i)} = \exp\Big(-\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(A_i)\Big)$. Que la série $\sum_{i \geqslant 0} \mathbb{P}(A_i)$ converge ou pas, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, $\mathbb{P}(B) \leqslant \exp\Big(-\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\Big)$.

b. Si $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, on a donc $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = +\infty$ (les sommes partielles tendent vers $+\infty$ car c'est une série divergente à termes positifs) donc $\mathbb{P}(B) = 0$.

c. $\mathbb{N} = \{0\} \sqcup \mathbb{N}^*$ donc $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(1.\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(\{0\}) + 1$ par hypothèse donc $\mathbb{P}(\{0\}) = 0$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n nombres premiers $p_1, \cdots, p_n$ distincts. On a vu (enfin surtout les ex-MPSI) que pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, on avait l'équivalence $(\forall i \in [\![1;n]\!],\ p_i | k) \iff (\prod_{i=1}^{n} p_i \Big| k)$. Ainsi, $\bigcap_{i=1}^{n} A_{p_i} = A_{p_1 \cdots p_n}$ donc, par hypothèse, $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_{p_i}\Big) = \mathbb{P}(A_{p_1\cdots p_n}) = \dfrac{1}{p_1\cdots p_n} = \prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{p_i} = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_{p_i})$. Cette relation étant vraie pour tout choix des nombres premiers distincts $p_1,\cdots,p_n$, $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une suite d'évènements indépendants.

e. Posons $B = \bigcap_{p\in\mathcal{P}}\overline{A_p} = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\overline{A_{p_n}}$, d'après les questions **a.** et **d.**, on a $\mathbb{P}(B) \leqslant exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_{p_n})\Big)$. Or $\omega\in B$ s'il n'est le multiple d'aucun nombre premier donc $B=\{0,1\}$ et on conclut avec **c.** que $\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(\{1\})$. Or la série de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge par comparaison série-intégrale car une primitive de la fonction $f : x\mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ qui est continue et décroissante sur $[e;+\infty[$ est $F : x\mapsto \ln(\ln(x))$ qui admet une limite infinie en $+\infty$. Ainsi, avec l'énoncé, $\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(A_{p_n})$ diverge donc, avec **b.**, on a $\mathbb{P}(\{1\})=0$.

Pour $m\in\mathbb{N}^*$, si on note $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent m, si on pose $B_m = \bigcap_{p\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}_m}\overline{A_p}$, comme avant, puisque $\mathcal{P}_m$ est fini, on trouve encore $\mathbb{P}(B_m)=0$. Or $m\in B_m$ car m n'est pas un multiple des nombres premiers qui ne divisent par m par définition. Comme $\{m\}\subset B_m$, on a donc $\mathbb{P}(\{m\})=0$.

On a donc $\forall m\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{m\})=0$ ce qui est impossible car $\mathbb{N}=\bigsqcup_{m=0}^{+\infty}\{m\}$ et $\mathbb{P}(\mathbb{N})=1$. Il n'existe donc aucune probabilité $\mathbb{P}:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to[0;1]$ construite sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, un entier a une probabilité égale à $\dfrac{1}{k}$ d'être un multiple de k.

7.21 On considère l'évènement U_i : "la boule tirée dans l'urne a pour numéro i". Pour $i\in[\![1;n-1]\!]$, on note $J_{i,k}$ = "après voir tiré la boule i, on tire le jeton k dans la boîte i". On note aussi $K_{i,k}$ = "après voir tiré la boule i, on tire le jeton k dans la boîte $i+1$".

a. Si $n=2$, $(a=b)=K_{1,1}$ car on tire la boule 1 dans l'urne et on tire le jeton 1 dans la boîte B_1 donc $p_2=\mathbb{P}(a=b)=\mathbb{P}(K_{1,1})=\dfrac{1}{2}$ car les tirages dans l'urne et dans les boîtes sont indépendants et la boîte B_2 ne contient qu'un jeton numéroté 1 et un autre numéroté 2.

b. Comme on a $(a=b)=\bigsqcup_{k=1}^{n-1}\Big(\bigsqcup_{i=k}^{n-1}(J_{i,k}\cap K_{i,k})\Big)$, par incompatibilité des ces évènements, on a la relation $p_n=\mathbb{P}(a=b)=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k}^{n-1}\mathbb{P}(J_{i,k}\cap K_{i,k})=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k}^{n-1}\Big(\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{i}\times\dfrac{1}{i+1}\Big)$ car, par la formule des probabilités composées, comme $J_{i,k}\cap K_{i,k}=U_i\cap J_{i,k}\cap K_{i,k}$, on a $\mathbb{P}(J_{i,k}\cap K_{i,k})=\mathbb{P}(U_i)\,\mathbb{P}_{U_i}(J_{i,k})\,\mathbb{P}_{U_i\cap J_{i,k}}(K_{i,k})$. Ainsi, par télescopage, $p_n=\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k}^{n-1}\Big(\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i+1}\Big)=\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{n}\Big)=\dfrac{1}{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}\Big)-\dfrac{1}{n}$. On peut transformer $p_n=\dfrac{1}{n-1}\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}\Big)-\dfrac{n-1}{n}\Big)=\dfrac{1}{n-1}\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}\Big)-1+\dfrac{1}{n}\Big)=\dfrac{1}{n-1}\Big(\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}\Big)=\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k+1}$.

On pouvait écrire aussi, en inversant la réunion double, que $(a=b)=\bigsqcup_{i=1}^{n-1}\Big(\bigsqcup_{k=1}^{i}(J_{i,k}\cap K_{i,k})\Big)$ et, avec les mêmes arguments, $p_n=\mathbb{P}(a=b)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{i}\Big(\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{i}\times\dfrac{1}{i+1}\Big)=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{i+1}$.

On pouvait enfin dire, en notant M_i = "on tire le même numéro de jeton dans la boîte i et la boîte $i+1$", que $(a=b)=\bigsqcup_{i=1}^{n-1}(U_i\cap M_i)$ donc $\mathbb{P}(a=b)=\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(U_i)\,\mathbb{P}_{U_i}(M_i)=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{i+1}$ par incompatibilité de ces évènements car seul un jeton parmi les $i+1$ jetons de la boîte B_{i+1} permet d'avoir $a=b$.

c. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\ln$ est de classe C^1 sur $[k; k+1]$ donc, par l'égalité des accroissements finis, il existe un réel $c_k \in]k; k+1[$ tel que $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln'(c_k)(k+1-k) = \dfrac{1}{c_k}$. Ainsi, comme $k < c_k < k+1$, on a l'encadrement $\dfrac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \dfrac{1}{k}$.

d. On somme les inégalités de la question précédente, pour $k \in [\![1; n-1]\!]$ à gauche et pour $k \in [\![2; n]\!]$ à droite, d'où $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k+1} < \sum\limits_{k=1}^{n-1} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n)$ et $\sum\limits_{k=2}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n+1) - \ln(2) < \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k+1}$. On obtient donc $\dfrac{\ln(n+1) - \ln(2)}{n-1} < p_n < \dfrac{\ln(n)}{n-1}$. Ainsi, comme $\dfrac{\ln(n+1) - \ln(2)}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$, par encadrement, on a l'équivalent $p_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

7.22 **a.** Si on note X_n l'état du jeu à l'étape n, comme $\{(X_n = 0), (X_n = 1)\}$ est un système complet d'évènements par hypothèse, on a $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0)\,\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0)\,\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)$ par la formule des probabilités totales. D'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 1 - p$, $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = q$, $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = p$ et $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = 1 - q$. Ainsi, en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$, les relations précédentes se traduisent matriciellement par $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$.

D'après Cayley-Hamilton, $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\,(A)X + \det(A) = X^2 - (2-p-q)X + 1 - p - q = (X-1)(X-(1-p-q))$ est annulateur de A. Soit $n \in \mathbb{N}$, effectuons la division euclidienne de X^n par χ_A, qui s'écrit $X^n = Q_n\chi_A + R_n$ avec $R_n = a_nX + b_n$ car $\deg(R_n) < \deg(\chi_A) = 2$. En évaluant ceci en 1 et $1-p-q$, on obtient le système $a_n + b_n - 1 = a_n(1-p-q) + b_n - (1-p-q)^n = 0$ qui se résout facilement en $a_n = \dfrac{1-(1-p-q)^n}{p+q}$ et $b_n = \dfrac{(1-p-q)^n - (1-p-q)}{p+q}$. Ainsi, en remplaçant X par A dans $X^n = Q_n\chi_A + a_nX + b_n$, on trouve $A^n = \dfrac{1-(1-p-q)^n}{p+q}A + \dfrac{(1-p-q)^n - (1-p-q)}{p+q}I_2 = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q + p(1-p-q)^n & q - q(1-p-q)^n \\ p - p(1-p-q)^n & p + q(1-p-q)^n \end{pmatrix}$.

Par une récurrence facile, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$. Comme $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ par définition, on a donc $\begin{pmatrix} 1-p_n \\ p_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 1-p_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \dfrac{(p - p(1-p-q)^n)(1-p_0) + (p + q(1-p-q)^n)p_0}{p+q}$.

b. Comme $p \in]0; 1[$ et $q \in]0; 1[$, on a $1-p-q \in]-1; 1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-p-q)^n = 0$ donc, en passant à la limite dans la relation de la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{p(1-p_0) + pp_0}{p+q} = \dfrac{p}{p+q}$.

7.23 **a.** Soit $(d, d') \in [\![1; n]\!]^2$ tel que d et d' sont des diviseurs de n premiers entre eux.

($\subset$) Soit $m \in A_d \cap A_{d'}$, alors il existe par définition k et k' tels que $1 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{d}$ et $1 \leqslant k' \leqslant \dfrac{n}{d'}$ et $m = kd = k'd'$. Ainsi, $d | k'd'$ mais d et d' sont premiers entre eux donc, d'après le lemme de Gauss, $d | k'$ et il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $k' = ad$. Comme $1 \leqslant ad \leqslant \dfrac{n}{d'}$, on a $1 \leqslant a \leqslant \dfrac{n}{dd'}$ donc, par définition, $m = add' \in A_{dd'}$. On vient d'établir que $A_d \cap A_{d'} \subset A_{dd'}$.

($\supset$) Soit $m \in A_{dd'}$, il existe donc k tel que $1 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{dd'}$ et $m = kdd'$. Comme $1 \leqslant kd' \leqslant \dfrac{n}{d}$ et $m = (kd')d$ et $1 \leqslant kd \leqslant \dfrac{n}{d'}$ et $m = (kd)d'$, on a $m \in A_d \cap A_{d'}$ par définition. On a montré que $A_{dd'} \subset A_d \cap A_{d'}$.

Par double inclusion, $A_d \cap A_{d'} = A_{dd'}$. Par définition de $\mathbb{P}$, comme $\mathbb{P}(A_q) = \dfrac{1}{q}$ par définition si $q|n$, on a $\mathbb{P}(A_d \cap A_{d'}) = \mathbb{P}(A_{dd'}) = \dfrac{1}{dd'} = \dfrac{1}{d} \times \dfrac{1}{d'} = \mathbb{P}(A_d)\mathbb{P}(A_{d'})$ ce qui justifie que A_d et $A_{d'}$ sont indépendants.

b. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, $k \in B_n \iff k \wedge (p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}) = 1 \iff (\forall j \in [\![1;r]\!],\ k \wedge p_j = 1) \iff (\forall j \in [\![1;r]\!],\ k \notin A_{p_j})$. En effet, k est premier avec n si et seulement si k et n n'ont aucun nombre premier dans leur décomposition respective en produit de nombres premiers. Ainsi, $B_n = \bigcap\limits_{j=1}^{r} \overline{A_{p_j}}$.

c. Par récurrence à partir de **a.**, on montre que puisque $p_1, \cdots, p_r$ sont premiers entre eux deux à deux, les $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont indépendants. On sait qu'alors $\overline{A_{p_1}}, \cdots, \overline{A_{p_r}}$ le sont aussi de sorte que $\mathbb{P}(B_n) = \prod\limits_{j=1}^{r} \mathbb{P}(\overline{A_{p_j}})$ donc $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \prod\limits_{j=1}^{r} \left(1 - \mathbb{P}(A_{p_j})\right) = \prod\limits_{j=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$ donc $\varphi(n) = n \prod\limits_{j=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$.

d. Soit deux entiers n et m de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ premiers entre eux, si on décompose $n = p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$ et $m = q_1^{r_1} \cdots q_r^{r_t}$, puisque'aucun nombre premier divisant n ne divise m, et vice-versa, $p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r} q_1^{r_1} \cdots q_r^{r_t}$ est la décomposition en produit de nombres premiers de nm. D'après la question précédente, on a $\varphi(n) = n \prod\limits_{j=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$, $\varphi(m) = m \prod\limits_{k=1}^{t} \left(1 - \dfrac{1}{q_k}\right)$ et $\varphi(nm) = nm \left(\prod\limits_{j=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)\right) \times \left(\prod\limits_{k=1}^{t} \left(1 - \dfrac{1}{q_k}\right)\right)$ donc $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

e. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ que $z = e^{i\theta}$. On pose $t = \dfrac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{R}$ de sorte que $z = e^{2i\pi t}$. Comme $t \in \mathbb{R}$ et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = t$. En écrivant $t_k = \dfrac{a_k}{b_k}$ avec $a_k \in \mathbb{Z}$ et $b_k \in \mathbb{N}^*$, on a $z_k = e^{\frac{2i\pi a_k}{b_k}}$ donc z_k est une racine b_k-ième de l'unité et $z_k \in \mathbb{U}$. Comme $u \mapsto e^{iu} = \cos(u) + i\sin(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $\cos$ et $\sin$ le sont, et que $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = t$, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} e^{it_k} = e^{it}$ donc $\lim\limits_{k \to +\infty} z_k = z$. Il existe bien une suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{k \to +\infty} z_k = z$.

f. Soit $z \in P_n$, alors $m_z = n$ donc $z^n = 1$ et $z \in \mathbb{U}_n$ car $m_z = \mathrm{Inf}\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid z^n = 1\right\} = \mathrm{Min}\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid z^n = 1\right\}$ puisque $\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid z^n = 1\right\}$ est une partie non vide (par hypothèse car $z \in \mathbb{U}$) de $\mathbb{N}$. Ainsi, $P_n \subset \mathbb{U}_n$ donc, comme $\mathbb{U}_n$ est fini de cardinal n d'après le cours, P_n est fini et $\mathrm{card}\,(P_n) \leqslant n$.
On sait que $\mathbb{U}_n = \{\omega_n^k \mid k \in [\![0;n-1]\!]\}$ avec $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Montrons que $P_n = \{\omega_n^k \mid k \in B_n\}$.
($\subset$) Soit $z \in P_n$, comme $P_n \subset \mathbb{U}_n$, il existe un unique entier $k \in [\![0;n-1]\!]$ tel que $z = \omega_n^k$. Si on avait $\mathrm{pgcd}\,(n,k) = d > 1$, alors $z^{n/d} = \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^{n/d} = e^{\frac{2ik\pi}{d}} = 1$ car d divise k ce qui contredirait le fait que n est le pus petit entier m tel que $z^m = 1$ car $\dfrac{n}{d} < n$. Par l'absurde, on a donc prouvé que $\mathrm{pgcd}\,(n,k) = 1$ donc que $k \in B_n$. Ainsi, $P_n \subset \{\omega_n^k \mid k \in B_n\}$.
($\supset$) Soit $z \in \{\omega_n^k \mid k \in B_n\}$ qu'on écrit donc $z = \omega_n^k$ avec $k \in B_n$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^m = 1$, on a donc $\omega_n^{mk} = e^{\frac{2ikm\pi}{n}} = 1$ ce qui montre que $\dfrac{2km\pi}{n} \equiv 0\ [2\pi]$ donc que km est un multiple de n. Or, puisque n et k sont premiers entre eux et que n divise mk, par le lemme de Gauss, on a $n|m$ donc $m \geqslant n$. Comme $z^n = 1$, n est bien le plus petit entier m tel que $z^m = 1$ et on a $z \in P_n$. Ainsi, $\{\omega_n^k \mid k \in B_n\} \subset P_n$.
Par double inclusion, on a $P_n = \{\omega_n^k \mid k \in B_n\}$ donc l'application $\theta : B_n \mapsto P_n$ définie par $\theta(k) = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une bijection ce qui justifie bien que $|B_n| = \varphi(n) = |P_n|$.

g. ($\supset$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $P_n \subset \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$ par définition donc $P_n \subset \mathbb{U}$. On en déduit l'inclusion $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} P_n \subset \mathbb{U}$.

$(\subset)$ Soit $z \in \mathbb{U} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{U}_n$, par définition, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z \in \mathbb{U}_n$. Ainsi, $z^n = 1$ et, par construction, $m_z = \mathrm{Inf}\{k \in \mathbb{N}^* \mid z^k = 1\} \leqslant n$. Comme $z \in P_{m_z}$, $z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} P_n$ d'où l'inclusion $\mathbb{U} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} P_n$.

Par double inclusion, on a bien $\mathbb{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} P_n$.

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $n \neq m$, s'il existait un complexe $z \in P_n \cap P_m$, on aurait à la fois $m_z = n$ et $m_z = m$ par définition, ce qui est absurde car $n \neq m$. Ainsi, on a bien $P_n \cap P_m = \emptyset$ si $n \neq m$ ce qui justifie que $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{U}$. On appelle les éléments de P_n des racines primitives n-ièmes de l'unité. Par exemple, $P_1 = \{1\}$, $P_2 = \{-1\}$, $P_3 = \{j, j^2\}$, $P_4 = \{i, -i\}$.

7.24 Notons $\mathcal{F}_n^p$ l'ensemble des parties A à p éléments de $[\![1; n]\!]$ telles que l'on ait $\forall i \in [\![1; n-1]\!], i \in A$ ou $i+1 \in A$ de sorte que $F_n^p = \text{card}(\mathcal{F}_n^p)$. Prenons quatre exemples :

<u>Si $n = 2$</u> , $\mathcal{F}_2^0 = \emptyset$, $\mathcal{F}_2, 1 = \{\{1\}, \{2\}\}$, $\mathcal{F}_2^2 = \{\{1,2\}\}$ d'où $F_2^0 = 0, F_2^1 = 2$ et $F_2^2 = 1$.

<u>Si $n = 3$</u> , $\mathcal{F}_3^0 = \emptyset$, $\mathcal{F}_3, 1 = \{\{2\}\}$, $\mathcal{F}_3^2 = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ et $\mathcal{F}_3^3 = \{\{1,2,3\}\}$ d'où $F_3^0 = 0, F_3^1 = F_3^3 = 1, F_3^2 = 3$.

<u>Si $n = 4$</u> , $\mathcal{F}_4^0 = \mathcal{F}_4^1 = \emptyset$, $\mathcal{F}_4^2 = \{\{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$, $\mathcal{F}_4^3 = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$ et on a enfin $\mathcal{F}_4^4 = \{\{1,2,3,4\}\}$ donc $F_4^0 = F_4^1 = 0, F_4^2 = 3, F_4^3 = 4, F_4^4 = 1$.

<u>Si $n = 5$</u> , $\mathcal{F}_5^0 = \mathcal{F}_5^1 = \emptyset$, $\mathcal{F}_5^2 = \{\{2,4\}\}$, $\mathcal{F}_5^3 = \{\{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{1,4,5\}, \{2,3,4\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}\}$, puis on a aussi $\mathcal{F}_5^4 = \{\{1,2,3,4\}, \{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}\}$ et on a enfin $\mathcal{F}_5^5 = \{\{1,2,3,4,5\}\}$ ce qui donne les valeurs $F_5^0 = F_5^1 = 0, F_5^2 = 1, F_5^3 = 6, F_5^4 = 4$ et $F_5^5 = 1$.

• On constate que les premiers termes sont nuls. En effet, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $p \in [\![0; n]\!]$ et s'il existe une partie A à p éléments de $[\![1; n]\!]$ ayant la propriété (C), alors il faut au moins un élément de A dans $\{1,2\}$, au moins un (et différent du premier) dans $\{3,4\}$, etc... Ainsi, comme il existe $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ parties disjointes deux à deux du type $\{2k-1, 2k\}$ dans $[\![1; n]\!]$, on a $\text{card}(A) = p \geqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > \frac{n}{2} - 1$ donc $n < 2p + 2$, c'est-à-dire $n \leqslant 2p + 1$.

Par contraposée, si $n > 2p + 1$, $\mathcal{F}_n^p = \emptyset$ donc $F_n^p = 0$.

• Si $2 \leqslant n \leqslant 2p + 1$, on va partitionner $\mathcal{F}_n^p$ en $\mathcal{F}_n^{p,1} = \{A \in \mathcal{F}_n^p \mid n \in A\}$ et $\mathcal{F}_n^{p,2} = \{A \in \mathcal{F}_n^p \mid n \notin A\}$ de sorte que $\mathcal{F}_n^p = \mathcal{F}_n^{p,1} \sqcup \mathcal{F}_n^{p,2}$ donc, en notant $F_n^{p,1} = \text{card}(\mathcal{F}_n^{p,1})$ et $F_n^{p,2} = \text{card}(\mathcal{F}_n^{p,2})$, on a $F_n^p = F_n^{p,1} + F_n^{p,2}$.

<u>$\mathcal{F}_n^{p,1}$</u> : si $A \in \mathcal{F}_n^{p,1}$, alors $A' = A \setminus \{n\}$ est de cardinal $p-1$, inclus dans $[\![1; n-1]\!]$ et A' vérifie la propriété (C) puisque A le fait. On vient donc de construire $\varphi_1 : \mathcal{F}_n^{p,1} \to \mathcal{F}_{n-1}^{p-1}$ qui vérifie $\varphi_1(A) = A'$. Il est clair que φ_1 est bijective et que $\varphi_1^{-1}(A') = A' \cup \{n\}$. Ainsi, $\text{card}(\mathcal{F}_n^{p,1}) = \text{card}(\mathcal{F}_{n-1}^{p-1}) = F_{n-1}^{p-1}$.

<u>$\mathcal{F}_n^{p,2}$</u> : si $A \in \mathcal{F}_n^{p,2}$, alors $n \notin A$ donc $n - 1 \in A$ car A vérifie la propriété (C) donc $A'' = A \setminus \{n-1\}$ est de cardinal $p-1$, inclus dans $[\![1; n-2]\!]$ et A'' vérifie la propriété (C) puisque A le fait. On vient donc de construire $\varphi_2 : \mathcal{F}_n^{p,2} \to \mathcal{F}_{n-2}^{p-1}$ qui vérifie $\varphi_1(A) = A''$. Il est clair que φ_2 est bijective et que $\varphi_2^{-1}(A'') = A'' \cup \{n-1\}$. Ainsi, $\text{card}(\mathcal{F}_n^{p,2}) = \text{card}(\mathcal{F}_{n-2}^{p-1}) = F_{n-2}^{p-1}$.

Par conséquent, $F_n^p = F_{n-1}^{p-1} + F_{n-2}^{p-1}$ (1).

Les trois cas particuliers nous permettent de conjecturer que $\forall n \geqslant 2$, $\forall p \in [\![0; n]\!]$, $F_n^p = \binom{p+1}{n-p}$ car par exemple $F_3^1 = 1 = \binom{2}{2}$, $F_4^3 = 4 = \binom{4}{1}$ et $F_5^3 = 6 = \binom{4}{2}$.

Initialisation : on a bien $\forall n \in [\![2;5]\!],\ \forall p \in [\![0;n]\!],\ F_n^p = \binom{p+1}{n-p}$, il suffit de regarder les 18 valeurs.

Hérédité : soit $n \geqslant 6$ tel que $\forall m \in [\![2;n-1]\!],\ \forall p \in [\![0;m]\!],\ F_m^p = \binom{p+1}{m-p}$, alors d'après la relation (1), pour tout entier $p \in [\![0;n]\!]$, on a $F_n^p = F_{n-1}^{p-1} + F_{n-2}^{p-1} = \binom{p}{n-p} + \binom{p}{n-p-1}$ car $n-1 \geqslant 2$ et $n-2 \geqslant 2$ donc, avec la formule de Pascal, on a $F_n^p = \binom{p+1}{n-p}$ comme attendu.

Conclusion : par principe de récurrence forte (à deux pas en fait), $\forall n \geqslant 2,\ \forall p \in [\![0;n]\!],\ F_n^p = \binom{p+1}{n-p}$.

7.4 Officiel de la Taupe

7.25 Par continuité décroissante, comme $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n} = \bigcap_{m=0}^{+\infty}\Big(\bigcap_{n=0}^{m} \overline{B_n}\Big)$, $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}\Big) = \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{m} \overline{B_n}\Big)$. Or les évènements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants donc $(\overline{B_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont aussi mutuellement indépendants. Alors on a $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}\Big) = \lim_{m\to+\infty}\Big(\prod_{n=0}^{m} \mathbb{P}(\overline{B_n})\Big) = \lim_{m\to+\infty}\Big(\prod_{n=0}^{m}\big(1-\mathbb{P}(B_n)\big)\Big)$.

La suite $\Big(\sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(B_n)\Big)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n)$ converge ou ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. L'inégalité proposée a bien un sens en convenant que $\exp(-\infty) = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, en notant $x = \mathbb{P}(B_n) \in [0;1]$, on a $\mathbb{P}(\overline{B_n}) = 1 - x \leqslant e^{-x} = e^{-\mathbb{P}(B_n)}$ car on a l'inégalité classique $\forall t > -1,\ \ln(1+t) \leqslant t$ (concavité de la fonction $\ln$) en on prend $t = -x$ ce qui donne $\ln(1-x) \leqslant -x$ et on passe à l'exponentielle (croissante) : cette inégalité marche aussi pour $x = 1$!

On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\overline{B_n}) \leqslant e^{-\mathbb{P}(B_n)}$ et on obtient $\forall m \in \mathbb{N},\ \prod_{n=0}^{m} \mathbb{P}(\overline{B_n}) \leqslant \prod_{n=0}^{m} e^{-\mathbb{P}(B_n)} = e^{-\sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(B_n)}$ en multipliant ces inégalités entre réels positifs. Il suffit ensuite de passer à la limite quand m tend vers $+\infty$ (dans le cas de la convergence ou celui qui donne $0 \leqslant 0$) pour avoir $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}\Big) \leqslant \exp\Big(-\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)\Big)$.

7.26 **a.** Posons $B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$ de sorte que $A = \bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k$. Comme $B_k = A_k \cup \Big(\bigcup_{n=k+1}^{+\infty} A_n\Big) = A_k \cup B_{k+1}$, il vient $B_{k+1} \subset B_k$ et la suite $(B_k)_{k\geqslant 0}$ est décroissante pour l'inclusion. Ainsi, par théorème de continuité décroissante, $\mathbb{P}(A) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\Big)$. Par positivité d'une probabilité et sous-additivité, on a l'encadrement $0 \leqslant \mathbb{P}(B_k) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Comme $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, en notant $R'_k = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ le reste d'ordre $k-1$ de cette série convergente, on sait d'après le cours que $\lim_{k\to+\infty} R_k = 0$. Ainsi, par encadrement, on a $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(B_k) = 0$. Par conséquent, $\mathbb{P}(A) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(B_k) = 0$.

b. Par définition, $\omega \in B \iff (\forall k \geqslant 0,\ \exists n \geqslant k,\ \omega \in A_n) \iff \omega \in \bigcap_{k=0}^{+\infty}\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$ car pour qu'il existe une infinité d'indice n tels que $\omega \in A_n$, il faut pouvoir en trouver au delà de k quelle que soit la valeur de k. Ainsi, en termes ensemblistes, on a $B = A$.

c. On s'intéresse à $\overline{A} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{B_k}$. Mais, $\overline{B_k} = \bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n} = \overline{A_k} \cap \Big(\bigcap_{n=k+1}^{+\infty} \overline{A_n}\Big) = \overline{A_k} \cap \overline{B_{k+1}}$ donc $\overline{B_k} \subset \overline{B_{k+1}}$

donc $(\overline{B_k})_{k\geqslant 0}$ est croissante pour l'inclusion. Par continuité croissante, $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{+\infty}\overline{B_k}\Big) = \lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}(\overline{B_k})$.

Soit un entier $k \geqslant 1$, alors $\forall m \geqslant k$, $\emptyset \subset \overline{B_k} = \bigcap_{n=k}^{+\infty}\overline{A_n} \subset \bigcap_{n=k}^{m}\overline{A_n}$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(\overline{B_k}) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{m}\overline{A_n}\right)$ par croissance de $\mathbb{P}$. Or les évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants donc $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont aussi indépendants d'après le cours. Alors, $0 \leqslant \mathbb{P}(\overline{B_k}) \leqslant \prod_{n=k}^{m}\mathbb{P}(\overline{A_n}) = \prod_{n=k}^{m}\big(1-\mathbb{P}(A_n)\big)$ (1).

Si $f : x \mapsto e^{-x} - 1 + x$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 - e^{-x}$ donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$, elle est donc minimale en 0 où $f(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$. Ainsi, $\forall x \in [0;1]$, $1 - x \leqslant e^{-x}$. Bien sûr, cette inégalité provient aussi de la convexité de la fonction $g : x \mapsto e^{-x}$ (sa dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}$) car elle se traduit par le fait que la courbe de g est au dessus de la tangente en $(0,1)$ à la courbe de g.

Pour $n \in \mathbb{N}$, en notant $x = \mathbb{P}(A_n) \in [0;1]$, on a $\mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1-x \leqslant e^{-x} = e^{-\mathbb{P}(A_n)}$. En multipliant ces inégalités entre réels positifs, il vient $\prod_{n=k}^{m}\big(1-\mathbb{P}(A_n)\big) \leqslant \prod_{n=k}^{m} e^{-\mathbb{P}(A_n)} = \exp\Big(-\sum_{n=k}^{m}\mathbb{P}(A_n)\Big)$. Or, par hypothèse, la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_n)$ est divergente donc ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. Ainsi, comme $\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=k}^{m}\mathbb{P}(A_n) = +\infty$, et que $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$, par composition, il vient $\lim_{m\to+\infty}\prod_{n=k}^{m}\big(1-\mathbb{P}(A_n)\big) = 0$. Par encadrement dans (1), on en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\overline{B_k}) = 0$. Ainsi, $\mathbb{P}(\overline{A}) = \lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}(\overline{B_k}) = 0$ donc $\mathbb{P}(A) = 1$.

Pour une suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'évènements indépendants et qu'on pose l'évènement $A = \bigcap_{k=0}^{+\infty}\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$ qui s'écrit aussi $A = \Big\{\omega \in \Omega \;\Big|\; \{n \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_n\} \text{ est infini}\Big\}$, on a l'alternative :

- $\mathbb{P}(A) = 0$ si $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_n)$ converge.
- $\mathbb{P}(A) = 1$ si $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_n)$ diverge.

C'est la loi du zéro-un de Borel.