TD 14 : INTÉGRALES À PARAMÈTRE

PSI 1 2024-2025 **vendredi 10 janvier 2025**

Intégrales à paramètre discret

14.1 *Centrale Maths1 PSI 2017* Alexandre Chamley et Sam Pérochon Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}dx$.

a. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie.

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}du$.

c. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $I_{n+2} + I_n = 2I_{n+1}$.

d. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

14.2 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Eneko Jauretche II

Que dire de la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n}dx$ en fonction de la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}_+$?
Et pour l'absolue convergence ?

14.3 *Mines PSI 2017 et 2018* Célia Detrez I et Martin Gros II On admet que $\forall t \in [0;1[,\ \ln(1-t^2) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n}$.

a. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}dt$.

b. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}$.

c. Calculer la valeur exacte de I avec des constantes usuelles.

14.4 *Centrale Maths1 PSI 2017 et 2023* Grégoire Verdès et Arthur Séguette Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}}dx$.

a. Vérifier que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie.

b. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

d. En déduire un équivalent de I_n.

14.5 *Mines PSI 2023* Esteban Maurer I Pour $n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n$ et $v_n = \displaystyle\int_2^n \left(1-\frac{1}{x}\right)^n dx$.

a. Montrer que $v_n \underset{+\infty}{\sim} n\displaystyle\int_0^1 e^{-1/t}dt$.

b. En déduire un équivalent simple de u_n.

14.6 *CCINP PSI 2023* Arthur Melnitchenko II et Marie-Lys Ruzic II

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}dt$ existe et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$.

14.7 *Mines-Télécom PSI 2023* Armand Dépée II Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}dx$.

a. Montrer que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

c. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3}u_n$.

e. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$ (question rajoutée).

Intégrales à paramètre continu

14.8 <u>*Mines PSI 2016*</u> Marine Saint-Mézard I On définit $f(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}-1}{\ln(t)}dt$.

a. Montrer que f est bien définie sur un domaine D à préciser.
b. Montrer que f est de classe C^1 sur D. En déduire une expression simple de f.

14.9 <u>*Mines PSI 2018*</u> Paul Simon I Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}dt$.

a. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
b. Quelles sont les limites de F, F', F'' en $+\infty$?
c. Expliciter $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

14.10 <u>*X PSI 2020*</u> Louis Carillo I Soit la fonction f définie par $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}dt$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$.
c. En déduire une expression simple de $f(x)$.

14.11 <u>*Mines PSI 2021*</u> Mathilde Arnaud II On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}dt$.

a. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
b. Calculer $F'(x)$ et en déduire une expression simple de $F(x)$.

14.12 <u>*Petites Mines PSI 2014 et ENS Cachan PSI 2016 et ENS Cachan PSI 2018 (2) et Mines PSI 2021*</u>
Alizée Mayet et Charly Castes et Amélie Guyot et Jean-Baptiste Malagnoux et Johan Haramboure II

a. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}dt$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ sont bien définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)+g^2(x)=\frac{\pi}{4}$. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

14.13 <u>*CCINP PSI 2021*</u> Antonio Treilhou I Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}dt$.

a. Trouver le domaine de définition D de f. Montrer que f est continue sur D.
b. Montrer que si $x \in D$, alors $1-x \in D$ et $f(1-x)=f(x)$.
c. Déterminer des équivalents de f aux bornes de D.

14.14 <u>*Centrale Maths1 PSI 2023*</u> Arthur Biot et Alban Dujardin Pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}dt$.

a. Donner l'ensemble de définition D de F et montrer que F est continue sur D.
b. Montrer que F est de classe C^1 sur D et calculer $F'(x)$.
c. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour $x \in D$.
b. Déterminer la valeur de $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(\theta)\big)d\theta$.

14.15 <u>*Mines PSI 2022 et 2023*</u> Baptiste Savarit I et Paul Picard I Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f. Étudier la monotonie de f sur D.
b. Sur quel domaine la fonction f est-elle continue ? dérivable ? Étudier la monotonie de f'.
c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
d. Calculer $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3e^{-xt}dt$ pour $x>0$. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{6}{x^4}$. Indication : majorer $|f(x)-g(x)|$.
e. Déterminer la limite de f en 0^+.

14.16 <u>*Mines PSI 2023*</u> Maxence Prieur II Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^1 |\ln(t)|^x dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.
b. Montrer que f est de classe C^∞ sur D.
c. Exprimer f en fonction de Γ. En déduire la valeur de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.