DEVOIR 15 : PROBABILITÉS DOMINÉES

PSI 1 2024-2025 **mardi 07 janvier 2025**

QCM

1 *Trigonométrie des angles doubles*

1.1 $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

1.2 $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = 2\cos^2 x + 1$

1.3 $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

1.4 $\forall x \in \mathbb{R},\ x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Longrightarrow \cos(2x) = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

2 *Conditionnement : soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* A, B, C *trois évènements tels que* $\mathbb{P}(A) > 0$ *et* $\mathbb{P}(B) > 0$ *et un système complet d'évènements* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_n) > 0$

2.1 $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B)\,\mathbb{P}(A_n)$

2.2 $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B)\,\mathbb{P}_B(C)$

2.3 $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}_B(A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$

2.4 $\mathbb{P}_A$ est une probabilité

3 *Convergence dominée : soit pour* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f_n(x) = (n+1)x^n$. *On note* θ *la fonction nulle.*

3.1 $f_n \overset{CVS}{\to} \theta$ sur $[0;1]$

3.2 $f_n \overset{CVS}{\to} \theta$ sur $[0;1[$

3.3 Les f_n et θ sont intégrables sur $[0;1[$

3.4 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \theta$

4 *Continuité sous le signe somme : soit* I *et* J *deux intervalles,* $f : I\times J \to \mathbb{K}$ *une fonction, dire si les hypothèses qui suivent sont les bonnes parmi les hypothèses du théorème du cours qui garantit que* $g : I \to \mathbb{K}$ *définie par* $g(x) = \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ *est continue sur* I *(c.p.m. pour "continue par morceaux" et int. pour "intégrable")*

4.1 $\forall x \in I,\ t \mapsto f(x,t)$ c.p.m sur J

4.2 $\forall t \in J,\ x \mapsto f(x,t)$ c.p.m. sur I

4.3 $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}_+,\ \forall (x,t) \in I\times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(x)$ et φ int. sur I

4.4 $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}_+,\ \forall (x,t) \in I\times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ et φ int. sur J

Énoncé Donner un énoncé du théorème de continuité sous le signe somme.

Preuve Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A,B) \in \mathcal{A}^2$ tel que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$.

Montrer la formule de BAYES : $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}_A(B)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.

Exercice 1 Une urne contient à l'étape $n = 1$ une boule noire et une boule blanche. On effectue une infinité de tirages de la manière suivante : on tire une boule...

- si elle est noire, on la remet dans l'urne et on effectue un ultime tirage dans l'urne.
- si elle est blanche, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche et on continue le processus.

On note, pour $n \geqslant 1$, l'évènement B_n : "le n-ième tirage donne une boule blanche".

a. Écrire N_n : " la boule noire apparaît la première fois au tirage n" à l'aide des $(B_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. Calculer $P(N_n)$.

b. Quelle est la probabilité que l'on ne tire que des boules blanches ?

c. Quelle est la probabilité p que la dernière boule tirée soit noire ?

Exercice 2 Prouver que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n}\mathrm{d}t$ est défini si $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ grâce au TCD.

DEVOIR 15 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 15 NOM : COCO PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X			X	
2	X			X	
3		X	X		
4	X			X	

1.1 Vrai : $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$ **1.2** Faux : $\cos(2x) = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2(x) - 1$ **1.3** Faux : formule correcte mais pas pour tous les réels **1.4** Vrai : la formule est classique et les x convenables. **2.1** Vrai : probabilités totales **2.2** Faux : la bonne formule est $P(A \cap B \cap C) = P(A)P_A(B)P_{A\cap B}(C)$ **2.3** Faux : la vraie formule est $P_A(B) = \dfrac{P_B(A)P(B)}{P(A)}$ **2.4** Vrai : cours.

3.1 Faux : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = +\infty \neq 0 = \theta(0)$ **3.2** Vrai : par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)x^n = 0 = \theta(x)$ si $x \in [0;1[$ **3.3** Vrai : clair **3.4** Faux : (H_3) n'est pas vérifiée, de plus $\int_0^1 f_n = [x^{n+1}]_0^1 = 1 \neq 0 = \int_0^1 \theta$.

4.1 Vrai : c'est une partie de (H_2) **4.2** Faux : on veut la continuité dans (H_1) **4.3** Faux : la domination doit se faire indépendamment de x **4.4** Vrai : c'est (H_3).

Énoncé Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$ (I et J sont des intervalles), on suppose que :

(H_1) pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I,
(H_2) pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux,
(H_3) $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, intégrable sur J avec $\forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

Alors la fonction $g : x \in I \mapsto \int_J f(x,t)dt$ est continue sur I.

Preuve Comme $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, les probabilités conditionnelles de l'énoncé sont bien définies et on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B)$. En divisant par $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \left(= \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \right)$.

Exercice 1 **a.** $N_n = B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap \overline{B_n}$ donc $\mathbb{P}(N_n) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \cdots \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$ (prob. comp.).

b. B = "on ne tire que les boules blanches" vérifie $\overline{B} = \bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} N_n$ (incompatibles). Par σ-additivité, $\mathbb{P}(\overline{B}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$. Donc $\mathbb{P}(B) = 0$. Ou alors $B \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k$ donc, par croissance de $\mathbb{P}$, $0 \leqslant \mathbb{P}(B) \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \cdots \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{n}$ donc, par encadrement, $\mathbb{P}(B) = 0$.

c. L'évènement X_n = "les deux boules noires sont prises aux tirages n et $n+1$" est $N_n \cap \overline{B_{n+1}}$ de probabilité $\mathbb{P}(N_n)\mathbb{P}_{N_n}(\overline{B_{n+1}}) = \dfrac{1}{n(n+1)} \times \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)^2}$. Ces évènements étant incompatibles deux à deux, $p = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} X_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \left(\dfrac{\pi^2}{6} - 1\right) = 2 - \dfrac{\pi^2}{6} \sim 0{,}35$.

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ donc, par comparaison, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car φ l'est puisque $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ par Riemann. De plus, la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ si $t < 1$, $f(1) = \dfrac{1}{3}$ et $f(t) = 0$ si $t > 1$. Comme les fonctions f_n et la fonction f sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et qu'on a la domination $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut conclure avec le théorème de convergence dominée que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2} = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$.