TD 14 : INTÉGRALES À PARAMÈTRE

PSI 1 2024-2025 **vendredi 10 janvier 2025**

Intégrales à paramètre discret

14.1 **a.** Pour $n \geqslant 1$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}$ est continue sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et on peut la prolonger par continuité en 0 en posant $f_n(0) = n^2$ puisque $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. Ainsi, f_n devient continue sur le segment $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ ce qui prouve que I_n est bien définie pour tout $n \geqslant 1$.

b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\dfrac{I_n}{n} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin^2(nx)}{n\sin^2(x)}dx = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \dfrac{\sin^2(u)}{n^2\sin^2\left(\dfrac{u}{n}\right)}du$ avec le changement de variable $x = \dfrac{u}{n} = \varphi_n(u)$ (φ_n de classe C^1 du segment $\left[0; \dfrac{n\pi}{2}\right]$ dans le segment $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$). Soit $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(u) = \dfrac{\sin^2(u)}{n^2\sin^2\left(\dfrac{u}{n}\right)}$ si $0 < u \leqslant \dfrac{n\pi}{2}$ et $f_n(u) = 0$ sinon. Alors $\dfrac{I_n}{n} = \displaystyle\int_0^{\frac{n\pi}{2}} f_n = \int_0^{+\infty} f_n$.

(H_1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\sin^2\left(\frac{u}{n}\right) = u^2$ donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ avec $f(u) = \dfrac{\sin^2(u)}{u^2}$.

(H_2) De plus, les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et f l'est aussi.

(H_3) Par concavité de la fonction $\sin$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a l'inégalité classique $\forall t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$. Ainsi, $\forall n \geqslant 1,\ \forall u > 0,\ |f_n(u)| \leqslant \dfrac{\pi^2\sin^2(u)}{4u^2} = \varphi(u) = \dfrac{\pi^2}{4}f(u)$ (et ceci même si $u > \dfrac{n\pi}{2}$) et la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \dfrac{\pi^2}{4}$ et $\varphi(u) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$.

Par convergence dominée, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait) et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}du$.

c. Si $n \geqslant 0$ et $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin^2((n+2)x) + \sin^2(nx) = \sin^2(((n+1)+1)x) + \sin^2((n+1)-1)x)$ qu'on développe en $\sin^2((n+2)x) + \sin^2(nx) = 2\sin^2((n+1)x)\cos^2(x) + 2\cos^2((n+1)x)\sin^2(x)$ avec la relation $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a)$ puis avec la relation fondamentale $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ en $\sin^2((n+2)x) + \sin^2(nx) = 2\sin^2((n+1)x) + 2\cos^2((n+1)x)\sin^2(x) - 2\sin^2((n+1)x)\sin^2(x)$ puis en $\sin^2((n+2)x) + \sin^2(nx) = 2\sin^2((n+1)x) + 2\cos(2(n+1)x)\sin^2(x)$ avec $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.

Ainsi : $I_{n+2} + I_n = 2I_{n+1} + 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2(n+1)x)dx = 2I_{n+1} + 2\left[\frac{\sin(2(n+1)x)}{2n+1}\right]_0^{\pi/2} = 2I_{n+1}$.

d. L'équation caractéristique de cette récurrence linéaire est $z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = 0$. On sait qu'alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \geqslant 0,\ I_n = An + B$. Comme $I_0 = 0$ et $I_1 = \dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que $\forall n \geqslant 1,\ I_n = \dfrac{n\pi}{2}$.

On pouvait aussi calculer $I_2 = 4\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)dx = 2\int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2x))dx = \pi$ si on ne pensant pas à intégrer I_0 dans la relation de récurrence. Ainsi, d'après la question **b.** : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}du = \frac{\pi}{2}$. On pose $a(u) = -\dfrac{1}{u}$ et $b(u) = \sin^2(u)$ de sorte que a et b sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\displaystyle\lim_{u\to 0} a(u)b(u) = \lim_{u\to+\infty} a(u)b(u) = 0$ (le crochet converge) donc, par intégration par parties, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2u)}{u}du = \frac{\pi}{2}$ et le changement de variable $u = \dfrac{t}{2}$ permet enfin d'avoir l'intégrale de DIRICHLET $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

14.2 Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = e^{-x^n}$. f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[\alpha; +\infty[$. Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n} dx$ existe. Comme f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$, $u_n \geqslant 0$. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n} dx$ est une série alternée.

(H_1) $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers f telle que $f(x) = 1$ si $x < 1$, $f(1) = e^{-1}$, $f(x) = 0$ si $x > 1$.

(H_2) Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ avec φ telle que $\varphi(x) = 1$ si $x \in [0; 1]$ et $\varphi(x) = e^{-x}$ si $x > 1$. Or φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (intégrale de référence).

On peut appliquer le théorème de convergence dominée sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+$.

- Si $\alpha < 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_\alpha^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^1 1dx = 1 - \alpha > 0$ donc $\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n} dx$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha \geqslant 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_\alpha^{+\infty} f(x)dx = 0$. Comme $\forall x \in [\alpha; +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \geqslant x^{n+1}$ (car $x \geqslant 1$), on en déduit que $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$ par croissance de l'intégrale. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n} dx$ converge par le critère spécial des séries alternées car $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et tend vers 0.

Quant à la convergence absolue de cette série, il nous faut être plus précis sur u_n.

- Si $\alpha < 1$, $\sum_{n\geqslant 1} \int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n} dx$ diverge grossièrement d'après ce qui précède.
- Si $\alpha = 1$, on pose $x = h(u) = u^{1/n}$ avec h de classe C^1, bijective et strictement croissante de $[1; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$ et on a $u_n = \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{1/n} du$. On pose $g_n : u \mapsto \frac{e^{-u}}{u} u^{1/n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

  (H_1) La suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[1; +\infty[$ vers $g : u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}$.

  (H_2) Les g_n et g sont continues sur $[1; +\infty[$.

  (H_3) $\forall n \geqslant 1$, $\forall u \geqslant 1$, $|g_n(u)| \leqslant e^{-u}$ et $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

  Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} g_n = \int_1^{+\infty} g = I > 0$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{I}{n}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} \int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n} dx$ diverge par comparaison à la série harmonique.
- Si $\alpha > 1$, comme $\forall t > 1$, $te^{-t} \leqslant 1$ (faire une étude de fonction), on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [\alpha; +\infty[$, $e^{-x^n} \leqslant \frac{1}{x^n}$ donc $u_n \leqslant \int_\alpha^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{(n-1)\alpha^{n-1}}$. Comme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)\alpha^{n-1}}$ converge car $\frac{1}{(n-1)\alpha^{n-1}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées, $\sum_{n\geqslant 1} \int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n} dx$ converge par comparaison.

Au final, $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n} dx$ converge $\Longleftrightarrow \alpha \geqslant 1$ et $\sum_{n\geqslant 1} \int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n} dx$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

14.3 **a.** La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}$ est continue sur $]0; 1[$. Puisque $\ln(1-t^2) \underset{0}{\sim} -t^2$, on obtient $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{-t^2 \ln(t^2)}{t^2} = -2\ln(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées donc f est intégrable sur $\left]0; \frac{1}{2}\right]$ par critère de Riemann. De plus, $\ln(1-t^2) = \ln(1-t) + \ln(1+t) \underset{1^-}{\sim} \ln(1-t)$ car $\lim_{t\to 1^-} \ln(1+t) = \ln(2)$ et, comme $\lim_{t\to 1^-} t^2 = 1$, on sait que $\ln(t^2) \underset{1^-}{\sim} t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \underset{1^-}{\sim} 2(t-1)$ donc $f(t) \underset{1^-}{\sim} 2(t-1)\ln(1-t)$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t)=0$ car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$. On peut donc prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1)=0$ ce qui montre que f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$. Ainsi, f est intégrable sur $]0;1[$ donc I existe.

b. $\forall t\in]0;1[,\ \ln(1-t^2)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{n}$ donc $\forall t\in]0;1[,\ f(t)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ en posant $f_n(t)=-\frac{2t^{2n-2}\ln(t)}{n}$.

(H_1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $]0;1[$ d'après ce qui précède.

(H_2) Les f_n sont continues et intégrables sur $]0;1[$ car on peut prolonger f_n en 1 en posant $f_n(1)=0$ et en 0 en posant $f_n(0)=0$ si $n\geqslant 2$ et $f_1(t)=-2\ln(t)\underset{0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. De plus, f est continue sur $]0;1[$.

(H_3) Pour $n\geqslant 1$, $\int_0^1|f_n(t)|dt=-\frac{2}{n}\int_0^1 t^{2n-2}\ln(t)dt$ car f_n est positive sur $]0;1[$. Posons $u(t)=\ln(t)$ et $v(t)=\frac{t^{2n-1}}{2n-1}$ de sorte que u et v sont C^1 sur $]0;1[$ et que $\lim\limits_{t\to 0}u(t)v(t)=\lim\limits_{t\to 1}u(t)v(t)=0$. Par intégration par parties, $\int_0^1|f_n(t)|dt=\frac{2}{n(2n-1)}\int_0^1 t^{2n-2}dt=\frac{2}{n(2n-1)^2}$. Comme $\frac{2}{n(2n-1)^2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^3}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\int_0^1|f_n(t)|dt$ converge par comparaison eux séries de RIEMANN.

On conclut avec le théorème d'intégration terme à terme que $I=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(2n-1)^2}$.

c. On décompose $\frac{2}{n(2n-1)^2}=\frac{2}{n}-\frac{4}{2n-1}+\frac{4}{(2n-1)^2}$ en procédant par identification par exemple. Ainsi, en posant $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{k(2k-1)^2}$, $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, on a $S_n=2H_n-4\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}+4\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}$ donc $S_n=2H_n-4\left(H_{2n}-\frac{H_n}{2}\right)+4\left(T_{2n}-\frac{T_n}{4}\right)=4(H_n-H_{2n})+4T_{2n}-T_n$ en rajoutant et en enlevant les termes d'indices pairs. Or on sait que $H_n\underset{+\infty}{=}\ln(n)+\gamma+o(1)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\frac{\pi^2}{6}$ donc, en injectant ceci dans la relation précédente, $S_n\underset{+\infty}{=}4(\ln(n)+\gamma-\ln(2n)-\gamma)+\frac{4\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{6}+o(1)\underset{+\infty}{=}\frac{\pi^2}{2}-4\ln(2)+o(1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{\pi^2}{2}-4\ln(2)$ ce qui montre finalement que $\int_0^1\frac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}dt=\frac{\pi^2}{2}-4\ln(2)\sim 2,16$.

14.4 **a.** Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n: x\mapsto\frac{\text{Arctan}(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}}$ est continue sur $I=\mathbb{R}_+^*$. Or $f_n(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2x^{3/2}}$ donc f_n est intégrable que $[1;+\infty[$ d'après RIEMANN car $\frac{3}{2}>1$. De plus, $f_0(x)\underset{0}{\sim}\frac{1}{\sqrt{x}}$ et, pour $n\geqslant 1$, $f_n(x)\underset{0}{\sim}\frac{\text{Arctan}(n)}{n\sqrt{x}}$ donc f_n est intégrable sur $]0;1]$ d'après RIEMANN car $\frac{1}{2}<1$. Ainsi, la fonction f_n est intégrable sur I et la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est donc bien définie.

b. Utilisons le théorème de convergence dominée :

(H_1) Pour $x>0$, on a l'inégalité $0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{\pi}{2n\sqrt{x}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$ par encadrement. La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge donc simplement sur I vers la fonction nulle, notée f.

(H_2) Toutes les fonctions f_n et la fonction f sont continues sur I.

(H_3) Puisque $\forall x>0,\ 0\leqslant\text{Arctan}(x)\leqslant x$ (par le théorème des accroissements finis par exemple car $\exists c\in]0;x[,\ \text{Arctan}(x)=\frac{1}{1+c^2}x$ ou par une petite étude de fonctions), on a $\forall x\in]0;1],\ 0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$. Mais $\text{Arctan}(x)\leqslant\frac{\pi}{2}$ et $n+x\geqslant x$ donc $\forall x>1,\ 0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{\pi}{2x\sqrt{x}}$. Ainsi, en posant $\varphi:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+$ définie par $\forall x\in]0;1],\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\forall x>1,\ \varphi(x)=\frac{\pi}{2x\sqrt{x}}$, alors φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme avant) et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \varphi(x)$.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f = 0$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{(n+x)\sqrt{x}}$ est continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$, $g_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3/2}}$ et $g_n(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{x}}$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}}$ existe. En effectuant le changement de variable $x = u^2 = \varphi(u)$ avec φ bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on trouve $v_n = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{n+u^2} = 2\Big[\frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{Arctan}\Big(\frac{u}{\sqrt{n}}\Big)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{n}}$.

d. Méthode 1 : par croissance de Arctan sur $[n;+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \operatorname{Arctan}(n) \leqslant \operatorname{Arctan}(n+x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc, par croissance de l'intégrale, on a $\operatorname{Arctan}(n)v_n \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi v_n}{2}$. Comme $\operatorname{Arctan}(n)v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi v_n}{2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$, par encadrement, on a $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$.

Méthode 2 : La relation $\forall x > 0,\ \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{x}\Big) + \operatorname{Arctan}(x) = \dfrac{\pi}{2}$ se montre avec $\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{x}\Big) + \operatorname{Arctan}(x)$, en constatant que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, que $\psi'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} + \dfrac{1}{1+x^2} = 0$, ce qui prouve que φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et vaut $\varphi(1) = 2\operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\Big(\frac{1}{n+x}\Big)\Big)\frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}} - \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}\Big(\frac{1}{n+x}\Big)\frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}}$.

Par croissance de la fonction Arctan, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}\Big(\frac{1}{n+x}\Big)\frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}} \leqslant \operatorname{Arctan}\Big(\frac{1}{n}\Big)v_n$. Ainsi, $I_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{\pi v_n}{2} + o(v_n)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = 0$ donc $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi v_n}{2} = \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$.

14.5 **a.** Pour $n \geqslant 2$, la fonction $g_n : x \mapsto \Big(1 - \dfrac{1}{x}\Big)^n$ est continue sur le segment $[2,n]$ donc v_n existe. Dans l'intégrale v_n, on pose $x = nt = \varphi_n(t)$ avec $\varphi_n : [2/n;1] \to [2;n]$ de classe C^1 donc, par changement de variable et par linéarité de l'intégrale, on a $v_n = n\displaystyle\int_{2/n}^1 \Big(1 - \frac{1}{nt}\Big)^n dt$. Ainsi, $v_n = n\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ avec $f_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = 0$ si $t \in \Big]0;\dfrac{2}{n}\Big[$ et $f_n(t) = \Big(1 - \dfrac{1}{nt}\Big)^n$ pour $t \in \Big[\dfrac{2}{n};1\Big]$.

(H_1) Pour $t \in]0;1]$, comme $\forall n \geqslant \dfrac{2}{t},\ f_n(t) = \Big(1 - \dfrac{1}{nt}\Big)^n = \exp\Big(n\ln\Big(1 - \dfrac{1}{nt}\Big)\Big)$, et puisque l'on a $\ln\Big(1 - \dfrac{1}{nt}\Big) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{nt}$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-1/t} = f(t)$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement vers f sur $]0;1]$.

(H_2) Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0;1]$ et f est continue sur $]0;1]$.

(H_3) $\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in]0;1],\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant f(t)$ car $\ln$ est concave donc si $t \geqslant \dfrac{2}{n}$, $\ln\Big(1 - \dfrac{1}{nt}\Big) \geqslant -\dfrac{1}{nt}$. De plus, f est continue et intégrable sur $]0;1]$ car f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ car $\lim\limits_{t\to 0^+}\Big(-\dfrac{1}{t}\Big) = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$. Ainsi, comme $v_n = n\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$, il vient $v_n \underset{+\infty}{\sim} n\displaystyle\int_0^1 e^{-1/t}dt$ car $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt > 0$ puisque f est positive, continue et non nulle sur $]0;1]$.

b. Pour $n \geqslant 2$, on a $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \Big(1 - \frac{1}{k+1}\Big)^n = \sum_{k=1}^n g_n(k+1)$. Or, la fonction dérivable g_n est croissante sur

$[1;n+1]$ car $g_n'(x)=\dfrac{n}{x^2}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{n-1}>0$ donc $\forall k\in[\![1;n]\!]$, $\displaystyle\int_k^{k+1}g_n(t)dt\leqslant g_n(k+1)$ (1). On somme les inégalités (1) pour $k\in[\![2;n-1]\!]$ pour avoir $\displaystyle\int_2^n g_n(t)dt=v_n\leqslant\sum_{k=2}^{n-1}g_n(k+1)=u_n-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. De même, on a $\forall k\in[\![1;n]\!]$, $g_n(k+1)\leqslant\displaystyle\int_{k+1}^{k+2}g_n(t)dt$ (2) et, en sommant (2) pour $k\in[\![1;n-2]\!]$, on obtient l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2}g_n(k+1)=u_n-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n-\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\leqslant v_n=\int_2^n g_n(t)dt$.

Par conséquent, on a l'encadrement $v_n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\leqslant u_n\leqslant v_n+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ et, comme $v_n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\underset{+\infty}{=}v_n+O(1)\underset{+\infty}{\sim}v_n$ et $v_n+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\underset{+\infty}{=}v_n+O(1)\underset{+\infty}{\sim}v_n$, on a $u_n\underset{+\infty}{\sim}v_n\underset{+\infty}{\sim}n\displaystyle\int_0^1 e^{-1/t}dt$.

14.6 Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\dfrac{\cos(t)}{1+e^t}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(t)\underset{+\infty}{=}O\left(e^{-t}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison car $t\mapsto e^{-t}$ l'est ce qui montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt$ converge.

Si on prend $t>0$, $0<e^{-t}<1$ donc $\dfrac{1}{1+e^t}=e^{-t}\dfrac{1}{1+e^{-t}}=e^{-t}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(e^{-t})^n$ (série géométrique) ce qui donne $f(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cos(t)e^{-(n+1)t}$. Posons $f_n(t)=(-1)^n\cos(t)e^{-(n+1)t}$ pour $n\in\mathbb{N}$, alors il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}(-1)^ne^{(i-n-1)t}dt\right)=\mathrm{Re}\left[\frac{(-1)^ne^{(i-n-1)t}}{i-n-1}\right]_0^{+\infty}=\frac{(-1)^n(n+1)}{1+(n+1)^2}$. On n'a pas la convergence absolue de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n(n+1)}{1+(n+1)^2}$, on ne peut pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

<u>Méthode 1</u> : Si $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}k}{1+k^2}$, alors $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt-S_n\right|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt-\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{+\infty}f_k(t)dt\right|$. Par linéarité de l'intégrale, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt-S_n\right|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt-\int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f_k(t)dt\right|=\left|\int_0^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}f_k(t)dt\right|$ (somme finie). Par inégalité triangulaire, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt-S_n\right|\leqslant\int_0^{+\infty}|\cos(t)|\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^ke^{-kt}\right|dt$ puis, comme $(e^{-kt})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 (on voit l'intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$), par le critère spécial des séries alternées, on a $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt-S_n\right|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)t}dt=\frac{1}{n+1}\to 0$. Ainsi, la suite numérique $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt$, qui s'écrit aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$.

<u>Méthode 2</u> : soit $S_n:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par $S_n(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f_k(t)$:

- (H_1) Ce qui précède montre que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f.
- (H_2) Les fonctions f_k, donc aussi les fonctions S_n par linéarité, sont intégrables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f_k(t)\underset{+\infty}{=}O(e^{-t})$ comme avant et f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on l'a déjà vu).
- (H_3) Enfin, $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|S_n(t)|=\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f_k(t)\right|=|\cos(t)e^{-t}|\left|\sum_{k=0}^{n}(-e^{-t})^k\right|\leqslant e^{-t}\times\frac{1-(-e^{-t})^{n+1}}{1+e^{-t}}$ donc $|S_n(t)|\leqslant\dfrac{2e^{-t}}{1+e^{-t}}\leqslant\varphi(t)=2e^{-t}$ et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On conclut avec le théorème de convergence dominée que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}S_n(t)dt=\int_0^{+\infty}f(t)dt$. Comme, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} S_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty} f_k(t)dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(k+1)}{1+(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}k}{1+k^2}$, on a bien la convergence de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$ et à nouveau la relation $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$.

14.7 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0;1]$ et $f_n(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, f_n est intégrable sur $]0;1]$ donc u_n existe bien.

b. Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme f_n est positive sur $]0;1]$, on a $u_n \geqslant \int_0^{1/3}\frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}dx$. Or on a $\forall x \in \left]0;\frac{1}{3}\right]$, $1-x \geqslant \frac{2}{3} > \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \geqslant \sqrt{x}$, ce qui donne la minoration $u_n \geqslant \int_0^{1/3}(1-x)^{n-1}dx$. Alors, $u_n \geqslant \left[-\frac{(1-x)^n}{n}\right]_0^{1/3} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Comme $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge, par comparaison, $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ diverge.

Méthode 2 : raisonnons par l'absurde, si $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ convergeait :

- (H_1) La série $\sum_{n\geqslant 0}f_n$ converge simplement vers $f :]0;1[\to \frac{1}{x^{3/2}}$ sur $]0;1[$ car, avec les séries géométriques, $\forall x \in]0;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x) = \frac{1}{(1-(1-x))\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} = f(x)$ car $|1-x| < 1$.
- (H_2) Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $]0;1[$ d'après **a.**.
- (H_3) La fonction f est continue sur $]0;1[$.
- (H_4) La série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |f_n(t)|dt = \sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge par hypothèse.

Par le théorème d'intégration terme à terme, f serait intégrable sur $]0;1[$ ce qui est faux car l'intégrale de RIEMANN $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ et ici $f(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ avec $\frac{3}{2} \geqslant 1$. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ diverge.

c. Utilisons le théorème de convergence dominée :

- (H_1) Comme $\forall x \in]0;1[$, $\lim_{n\to+\infty}(1-x)^n = 0$, la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle $g : x \mapsto 0$ sur $]0;1[$.
- (H_2) Les fonctions f_n et la fonction g sont continues sur $]0;1[$.
- (H_3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0;1[$, $|f_n(x)| = \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} = \varphi(x)$ et φ est continue et intégrable sur $]0;1[$ d'après RIEMANN.

Par le théorème évoqué, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty}u_n = \int_0^1 g(x)dx = 0$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, dans $u_{n+1} = \int_0^1\frac{(1-x)^{n+1}}{\sqrt{x}}dx$, on pose $u(x) = (1-x)^{n+1}$ et $v(x) = 2\sqrt{x}$ de sorte que $u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$ et $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ avec u et v de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim_{x\to 0^+}u(x)v(x) = 0$. Ainsi, par intégration par parties, il vient $u_{n+1} = [2(1-x)^{n+1}\sqrt{x}]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1(1-x)^n\sqrt{x}dx$ donc $u_{n+1} = 2(n+1)\int_0^1(1-x)^n\frac{1-(1-x)}{\sqrt{x}}dx$. Par linéarité de l'intégrale, comme les deux intégrales convergent, $u_{n+1} = 2(n+1)\left[\int_0^1\frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}dx - \int_0^1\frac{(1-x)^{n+1}}{\sqrt{x}}dx\right] = (2n+2)u_n - (2n+2)u_{n+1}$ donc $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}u_n$.

e. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n}{2n+1}u_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\cdots\times\frac{2}{3}u_0$ d'après la question **d.** qui se simplifie en $u_n = \frac{((2n)(2n-2)\cdots 2)^2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}u_0 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}u_0$. Or $u_0 = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $u_n = \frac{2}{2n+1}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$. D'après STIRLING, on a donc $u_n \sim \frac{2}{2n}\times\frac{2^{2n}(2\pi n)n^{2n}e^{2n}}{e^{2n}\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}}$ qui s'abrège en $u_n \underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ comme attendu. On retrouve bien, avec RIEMANN, la divergence de $\sum_{n\geqslant 0}u_n$.

Intégrales à paramètre continu

14.8 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et la fonction $g_x :]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g_x(t) = \dfrac{t^{x-1}-1}{\ln(t)}$. Clairement, g_x est continue sur $]0;1[$. De plus, g_x est de signe constant sur $]0;1[$: positive si $x < 1$ et négative si $x > 1$. On a $g_1 = 0$.
Si $x \neq 1$, comme $t^{x-1} - 1 = e^{(x-1)\ln(t)} - 1$ et que $\lim\limits_{t \to 1^-} \ln(t) = 0$, on a $t^{x-1} - 1 \underset{1^-}{\sim} (x-1)\ln(t)$ donc $g_x(t) \underset{1^-}{\sim} (x-1)$ et g_x se prolonge par continuité en 1 en posant $g_x(1) = x - 1$ (et même si $x = 1$ d'ailleurs).
• Si $x = 1$, $g_1 = 0$ donc $f(1)$ existe et $f(1) = 0$.
• Si $x > 1$, $g_x(t) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{\ln(t)}$ donc g_x se prolonge par continuité en 0 en posant $g_x(0) = 0$. g_x est donc intégrable sur $]0;1[$ car elle se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$.
• Si $x < 1$, $g_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}\ln(t)}$. Si $x > 0$, $g_x(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}\right)$ et, d'après RIEMANN, g_x est intégrable sur $]0;1[$.
Par contre, si $x \leqslant 0$, $\forall t \in]0;1[$, $\left|\dfrac{1}{t^{1-x}\ln(t)}\right| \geqslant \left|\dfrac{1}{t\ln(t)}\right|$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ n'est pas intégrable sur $]0;1[$ car elle admet pour primitive $t \mapsto \ln(|\ln(t)|)$ qui n'admet pas une limite finie en 0 : g_x n'est pas intégrable sur $]0;1[$.
Au final, le domaine de définition de f vaut $D = \mathbb{R}_+^*$.
b. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \dfrac{t^{x-1}-1}{\ln(t)}$. Alors :

(H_1) $\forall t \in]0;1[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) $\forall x > 0$, l'application $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0;1[$ (on vient de le voir) et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = t^{x-1}$ est continue sur $]0;1[$ par opérations.

(H_3) Soit $a > 0$, $\forall x \in [a;+\infty[$, $\forall t \in]0;1[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = t^{x-1} \leqslant t^{a-1} = \varphi_a(t)$ et φ_a est continue et intégrable sur $]0;1[$ (intégrales de RIEMANN).

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$.
Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle et que $f(1) = 0$, on a donc $\forall x > 0$, $f(x) = \ln(x)$.

14.9 **a.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$.

(H_1) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H_2) Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, on a $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ et φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = \dfrac{1}{2}$ par développements limités et $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$. Continuons :

(H_1) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (fait ci-dessus).

(H_3) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle se prolonge par continuité en 0 (elle tend vers 0) et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-xt}) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

(H_4) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos(t))e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_5) Soit $a > 0$, pour $(x,t) \in [a;+\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \theta_a(t) = 2e^{-at}$. Or θ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (intégrale de référence).

On déduit du théorème de dérivation sous le signe somme généralisé que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Avec la formule de LEIBNIZ, $\forall x > 0,\ F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - 1}{t} e^{-xt} dt$ et $F''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) e^{-xt} dt$.

b. Les fonctions $\varphi : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ et $\psi : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, admettent des limites finies en 0 et tendent vers 0 en $+\infty$ donc, classiquement, elles sont bornées sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x > 0$, par inégalité de la moyenne (tout converge), on a $|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} |\varphi(t)| e^{-xt} dt \leqslant ||\varphi||_{\infty, \mathbb{R}_+} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{||\varphi||_{\infty, \mathbb{R}_+}}{x}$. De même, comme $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-xt} dt$ et $F''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) e^{-xt} dt$, on a $|F'(x)| \leqslant \frac{||\psi||_{\infty, \mathbb{R}_+}}{x}$ et $|F''(x)| \leqslant \frac{2}{x}$ car $0 \leqslant 1 - \cos(t) \leqslant 2$. Par encadrement, on a donc $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} F'(x) = \lim_{x \to +\infty} F''(x) = 0$.
On pouvait aussi utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu, mais c'est plus long !

c. Pour $x > 0$, on a $F''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) e^{-xt} dt = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{it - xt} dt \right) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i - x} \right]_0^{+\infty} \right)$ donc $F''(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x - i} \right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2}$. On intègre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ F'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{1 + x^2} \right) + C$. Comme on sait que $\lim_{x \to +\infty} F'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{1 + x^2} \right) = 0$, on trouve $C = 0$. On intègre à nouveau et on trouve classiquement $F(x) = x\ln(x) - x - \frac{x \ln(1 + x^2)}{2} + x - \mathrm{Arctan}(x) + K = K - \frac{x}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \mathrm{Arctan}(x)$ avec $K \in \mathbb{R}$. Comme on sait que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$, on trouve $K = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall x > 0,\ F(x) = \frac{\pi}{2} + x\ln(x) - x\ln(\sqrt{1 + x^2}) - \mathrm{Arctan}(x)$. Comme F est continue en 0, on a $F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = K = \frac{\pi}{2}$ par croissances comparées. On effectue dans $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ une intégration par parties en posant $u(t) = 1 - \cos(t)$ et $v(t) = -\frac{1}{t}$, u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t \to 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ donc $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ (DIRICHLET).

14.10 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $f_x(t) \underset{0}{=} \frac{1 - (1 - xt^2 + o(t^2))}{t^2} \underset{0}{=} x + o(1)$, la fonction f_x se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = x$ donc f_x est intégrable sur $]0; 1]$.

- Si $x = 0$, f_x est la fonction nulle donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Si $x < 0$, $1 - e^{-xt^2} \underset{+\infty}{\sim} -e^{-xt^2}$ donc, par croissances comparées, $\lim_{t \to +\infty} f_x(t) = +\infty$ car $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-e^{-xt^2}}{t^2}$ et f_x n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.
- Si $x > 0$, $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc f_x est intégrable sur $[1; +\infty[$ d'après RIEMANN.

En résumé, f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x \geqslant 0$, et comme f_x est de signe constant sur son ensemble de définition, $\int_0^{+\infty} f_x$ converge dans les mêmes conditions. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$.

b. Définissons $g : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}_+$ par $g(x, t) = \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$ si $x \geqslant 0$.

(H_1) Pour $t > 0$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = e^{-xt^2}$.

(H_2) Pour $x > 0$, $t \mapsto g(x, t) = f_x(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu en **a.**).

(H_3) Pour $a > 0$, $x \in [a; +\infty[$ et $t > 0$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leqslant e^{-at^2} = \varphi_a(t)$ et φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car, par croissances comparées, $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2} \right)$.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$.

On effectue le changement de variable $t = \psi(u) = \dfrac{u}{\sqrt{x}}$, licite car ψ est de classe C^1, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et on a $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ en se rappelant de la très classique intégrale de GAUSS $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, d'après **b.**, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ f'(x) = \sqrt{\pi x} + C$.

Méthode 1 : montrons que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H_1) Pour $t > 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations.

(H_2) Pour $x \geqslant 0$, $t \mapsto g(x,t) = f_x(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu en **a.**).

(H_3) Pour $a > 0$, $x \in [0;a]$, $t > 0$, $|g(x,t)| \leqslant \psi_a(t)$ avec $\psi_a(t) = 1$ si $t \in]0;1]$ car $1 - e^{-u} \leqslant u$ par concavité et $\psi_a(t) = \dfrac{1}{t^2}$ si $t \geqslant 1$ car $1 - e^{-xt^2} \leqslant 1$; et ψ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\psi_a(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Méthode 2 : Pour $u \in [0;1[$, comme on a classiquement $\forall v > -1,\ \ln(1+v) \leqslant v$, en posant $v = -u$, on a $\ln(1-u) \leqslant -u$ donc, par croissance de l'exponentielle, $1 - u \leqslant e^{-u}$. Comme cette inégalité est clairement vraie aussi si $u \geqslant 1$, on a donc $\forall x > 0,\ \forall t > 0,\ 0 \leqslant 1 - e^{-xt^2} \leqslant xt^2$. Ainsi, pour $x > 0$, on a $\forall t > 0,\ f_x(t) \leqslant x$ et on a aussi $f_x(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. Par conséquent, $0 \leqslant f(x) = \displaystyle\int_0^{1/\sqrt{x}} f_x(t)dt + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} f_x(t)dt \leqslant x \times \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2} = 2\sqrt{x}$.
Ceci prouve par encadrement que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ donc que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, comme $\forall x > 0,\ f(x) = \sqrt{\pi x} + C$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = C = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{\pi x}$.

14.11 **a.** Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{e^{ixt} - 1}{t} e^{-t}$ de sorte que $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ si elle converge.

(H_1) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(H_2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $f_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(e^{-t}\right)$ et que f_x se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = ix$ car $e^{ixt} - 1 \underset{0}{\sim} ixt$ si $x \neq 0$.

(H_3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = ie^{-t}e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_4) Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-t} = \varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} ie^{(ix-1)t}dt$.

b. Ainsi, $F'(x) = \left[\dfrac{ie^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{i}{1-ix} = \dfrac{i(1+ix)}{1+x^2} = -\dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{i}{1+x^2}$. Comme $F(0) = 0$ et que $\mathbb{R}$ est un intervalle, en intégrant, $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + i\,\mathrm{Arctan}(x)$.

14.12 **a.** Soit $h : \mathbb{R} \times [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$.

(H_1) $\forall t \in [0;1]$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations.

(H_2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue donc intégrables sur le segment $[0;1]$.

(H_3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$ est continue sur $[0;1]$.

(H_4) $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0;1]$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2|x|e^{-x^2}$. Or $b : x \mapsto 2|x|e^{-x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, et elle tend vers 0 en $\pm\infty$ par croissances comparées, on en déduit classiquement que b est bornée sur $\mathbb{R}$ et on note $M = \underset{x \in \mathbb{R}}{\mathrm{Sup}}(2|x|e^{-x^2})$. Ainsi, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) = M$ et φ est intégrable sur le segment $[0;1]$.

Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a la formule de LEIBNIZ, à savoir $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} x dt$.

Par le théorème fondamental de l'intégration, comme $a : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car c'est la primitive de a sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^{-x^2}$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -2\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} x dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2} x dt = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2} du = -2e^{-x^2} g(x)$ en posant $u = tx = \psi(t)$ si $x \neq 0$ avec ψ qui est une bijection de classe C^1 strictement monotone (croissante si $x > 0$ et décroissante si $x < 0$) de $[0;1]$ dans $\widetilde{[0;x]}$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2g'(x)g(x)$. Mais si $x = 0$, on a clairement $f'(0) = 0$ donc $f'(0) = -2e^{-0^2}g(0)$ est encore vrai car $g(0) = 0$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle et que $(f+g^2)' = 0$ sur $\mathbb{R}$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g^2(x) = C$.
Or $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ et $g(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g^2(x) = \frac{\pi}{4}$.
Pour $x > 0$, $\forall t \geqslant 0$, $0 \leqslant e^{-(1+t^2)x^2} \leqslant e^{-x^2}$ et $\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$, donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$ donc, par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Comme g est une fonction positive, on a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{g(x)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4} - f(x)}$ donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = I$.

14.13 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $g_x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g_x(t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$. La fonction positive g_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $g_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^x}$ donc g_x est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $x < 1$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ donc g_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $x+1 > 1$. Ainsi, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $0 < x < 1$.
Or $f(x)$ existe si et seulement si g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc le domaine de définition D de f est $D =]0;1[$.
Définissons $g :]0;1[\times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $g(x,t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t) dt$ si elle converge.

(H_1) $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0;1[$ par opérations.

(H_2) $\forall x \in]0;1[$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**.

(H_3) Soit $(a,b) \in]0;1[^2$ tel que $0 < a < b < 1$, $\forall (x,t) \in [a;b] \times \mathbb{R}_+^*$, $|g(x,t)| = g(x,t) \leqslant \varphi_{a,b}(t)$ avec $\varphi_{a,b}(t) = \frac{1}{t^b(1+t)}$ si $t \in]0;1]$ et $\varphi_{a,b}(t) = \frac{1}{t^a(1+t)}$ si $t \geqslant 1$. Or $\varphi_{a,b}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après RIEMANN car $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^b}$ (et $b < 1$) et $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{a+1}}$ (et $a + 1 > 1$).

Par théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $D =]0;1[$.

b. Si $x \in D =]0;1[$, on a clairement $1 - x \in D$. Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on pose $t = \frac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement décroissante et de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et, par changement de variable, on a $f(x) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{u^{-x}(1+(1/u))}\left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^{1-x}(u+1)} du$ donc $f(1-x) = f(x)$.

c. <u>Méthode 1</u> : pour $x \in]0;1[$, par CHASLES, $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{t^x(1+t)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt$. De plus, on majore $0 \leqslant \int_0^1 \frac{1}{t^x(1+t)} dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{t^x} dt = \left[\frac{t^{-x+1}}{1-x}\right]_0^1 = \frac{1}{1-x}$ qui garantit que $\int_0^1 \frac{1}{t^x(1+t)} dt \underset{0}{=} O(1)$. Dans la seconde intégrale, on pose $t = u^{1/x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $[1;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{1}{u(1+u^{1/x})} u^{(1/x)-1} du = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2(1+u^{-1/x})} du$.
Or pour tout réel $u \geqslant 1$, on a $1 - u^{-1/x} \leqslant \frac{1}{1+u^{-1/x}} \leqslant 1$ donc, par croissance de l'intégrale, on a

l'encadrement $\int_1^{+\infty} \frac{1-u^{-1/x}}{u^2}du = 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \leqslant x\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}dt \leqslant 1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}du$. Par théorème d'encadrement, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}dt \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$. Par somme, on a $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$. D'après **c.**, $f(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{1-x}$.

Méthode 2 : comme ci-dessus, on pose $t = u^{1/x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $]0;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$ pour $x \in D$, et on obtient $xf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2(1+u^{-1/x})}du$. Posons $g : (x,u) \mapsto \frac{1}{u^2(1+u^{-1/x})} = \frac{1}{u(1+u^{1/x})}u^{(1/x)-1}$ de sorte que $xf(x) = \int_0^{+\infty} g(x,u)du$ si $x \in]0;1[$.

(H_1) Pour $u > 0$, on a $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} g(x,u) = h(u)$ avec $h(u) = 0$ si $u \in]0;1[$, $h(1) = \frac{1}{2}$ et $h(u) = \frac{1}{u^2}$ si $u > 1$.

(H_2) $\forall x \in \left]0;\frac{1}{2}\right]$, $u \mapsto g(x,u)$ et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) $\forall x \in \left]0;\frac{1}{2}\right]$, $\forall u > 0$, $|g(x,u)| \leqslant \varphi(u)$ avec $\varphi(u) = 1$ si $u < 1$ (car $0 \leqslant u^{1/x} \leqslant u^2$), $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ et $\varphi(u) \leqslant \frac{1}{u^2}$ si $u > 1$ (car $u^{-1/x} \geqslant 0$)) et φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\varphi(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u^2}$.

Le théorème de convergence dominée à paramètre continu permet de conclure que $\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x) = \int_0^{+\infty} h(u)du$ ce qui montre que $\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x) = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{+\infty} = 1$. À nouveau, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

14.14 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0;+\infty[$ avec un prolongement par continuité en 0 donné par $f_x(0) = x$ car $\text{Arctan}(xt) \underset{0}{=} xt + o(t)$ donc $f_x(t) \underset{0}{=} x + o(1)$. De plus, $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ car Arctan est bornée donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de Riemann car $3 > 1$. F est donc définie sur $D = \mathbb{R}$ et elle est clairement impaire car Arctan l'est.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$.

(H_1) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$.

(H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu).

(H_3) Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in [-a;a]$ et $t > 0$, $\left|f(x,t)\right| = \frac{|\text{Arctan}(xt)|}{t} \times \frac{1}{1+t^2} \leqslant \varphi_a(t) = \frac{a}{1+t^2}$ et φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car Arctan est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ car $0 \leqslant \text{Arctan}'(t) = \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ donc $|\text{Arctan}(xt)| = |\text{Arctan}(xt) - \text{Arctan}(0)| \leqslant 1 \times |xt - 0| = |x|t \leqslant at$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, F est continue sur $\mathbb{R}$.

b. On souhaite maintenant dériver.

(H_1) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

(H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H_3) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\right| \leqslant \psi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et ψ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme φ_a ci-dessus.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

c. Si $x \neq 1$, $x > 0$, on décompose $\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}$ en éléments simples donc $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}\right)$ et comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Arctan}(xt) = \frac{\pi}{2}$, cela donne $F'(x) = \dfrac{x}{x^2-1}\Big[\mathrm{Arctan}(xt)\Big]_0^{+\infty} + \dfrac{1}{(1-x^2)}\Big[\mathrm{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{x\pi}{2(x^2-1)} + \dfrac{\pi}{2(1-x^2)} = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Comme F' est continue en 1, on a $F'(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1} F'(x) = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2(1+1)}$. Ainsi, la relation $F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$ est valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. En intégrant sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{2} + C$. Comme F est continue en 0 d'après **a.** et que $F(0) = 0$, on a $F(0) = 0 = \displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = \frac{\pi\ln(1+0)}{2} + C = C$ donc $C = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \dfrac{\pi\ln(1+x)}{2}$ et, par imparité de F, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathrm{sgn}(x)\dfrac{\pi\ln(1+|x|)}{2}$.

d. La fonction $h : \theta \mapsto \ln\big(\sin(\theta)\big)$ est continue sur l'intervalle $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et, comme $\displaystyle\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$, on a $\displaystyle\lim_{\theta\to 0^+} \ln\left(\frac{\sin(\theta)}{\theta}\right) = 1$ donc $\ln\big(\sin(\theta)\big) \underset{0}{=} \ln(\theta) + o(1)$ ce qui implique que $\ln\big(\sin(\theta)\big) \underset{0}{=} \ln(\theta) + o\big(\ln(\theta)\big)$ car $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \ln(\theta) = -\infty$ d'où $h(\theta) \underset{0}{\sim} \ln(\theta) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right)$ donc h est intégrable sur I par comparaison aux intégrales de Riemann donc J existe. On pose $t = \tan(\theta)$, ou $\theta = \mathrm{Arctan}(t) = \psi(t)$ avec ψ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \times \left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt$. Posons maintenant $u : t \mapsto \ln\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ et $v : t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)$, u et v étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $u(t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$ et $v(t) \underset{0}{\sim} t$ donc $u(t)v(t) \underset{0}{\sim} t\ln(t)$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t) = 1$ car $\sqrt{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} t$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$. Par intégration par parties, comme $u(t) = \ln(t) - \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)$ donc $u'(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{1+t^2} = \dfrac{1}{t(1+t^2)}$, on a $J = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t(1+t^2)}dt = -F(1) = -\frac{\pi\ln(2)}{2} \sim -1,09$ d'après **c.**.

14.15 **a.** Si $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto \dfrac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-xt}$. Traitons deux cas :

- si $x \leqslant 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} te^{-xt} = +\infty$ donc g_x n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x)$ n'existe pas.
- si $x > 0$, par croissances comparées, $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-xt} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)dt$ converge et $f(x)$ existe.

Par conséquent, le domaine de définition D de f vaut $D = \mathbb{R}_+^*$. Pour $0 < x < y$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ e^{-xt} \geqslant e^{-yt}$ donc $g_x(t) \geqslant g_y(t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f(x) \geqslant f(y)$. Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ de sorte que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(x,t)dt$.

(H_1) Pout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Pour $x > 0$, la fonction $g_x : t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de le voir) et la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t^4e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) Pour $a > 0$, $(x,t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t^4e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant t^2e^{-at} = \varphi_a(t)$ avec φ_a qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $a > 0$.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, avec la formule de

LEIBNIZ, $\forall x > 0,\ f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^4 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt$. Pour $0 < x < y$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ e^{-xt} \geqslant e^{-yt}$ ce qui donne $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) \leqslant \dfrac{\partial h}{\partial x}(y,t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f'(x) \leqslant f'(y)$. Ainsi, f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc conclure d'après le cours que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. On peut utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu mais, plus élémentairement, $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-xt}dt = \Big[-t\frac{e^{-xt}}{x}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x}dt = \Big[-\frac{e^{-xt}}{x^2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2}$ par intégration par parties avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\dfrac{e^{-xt}}{x}$ qui sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(t)v(t) = 0$. Par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

d. La fonction $t \mapsto t^3e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $t^3e^{-xt} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées car $x > 0$. Ainsi, $g(x)$ existe. On peut procéder à trois intégrations par parties successives (pour passer de t^3 à t^0) ou, plus simple, poser $t = \dfrac{u}{x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et avoir $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^3}{x^4}e^{-u}du = \frac{\Gamma(4)}{x^4} = \frac{3!}{x^4} = \frac{6}{x^4}$.

Pour $x > 0$, par linéarité de l'intégrale, on a $|f(x) - g(x)| = \Big|\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} - t^3e^{-xt}\Big)dt\Big|$ qu'on écrit aussi $|f(x)-g(x)| = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3e^{-xt}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\Big)dt = \int_0^{+\infty} t^3e^{-xt}\Big(\frac{\sqrt{1+t^4}-1}{\sqrt{1+t^4}}\Big)dt$ et, avec la quantité conjuguée, $|f(x) - g(x)| = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3e^{-xt}\Big(\frac{(1+t^4)-1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})}\Big)dt = \int_0^{+\infty} t^7e^{-xt}\Big(\frac{1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})}\Big)dt$. Or on minore $\forall t \geqslant 0,\ \sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4}) \geqslant 1$ donc $|f(x) - g(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} t^7e^{-xt}dt = \frac{\Gamma(8)}{x^8} = \frac{7!}{x^8}$ comme ci-dessus. On a donc $f(x) - g(x) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{x^8}\Big) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^4}\Big) \underset{+\infty}{=} o(g(x))$, ce qui prouve que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) = \dfrac{6}{x^4}$.

e. <u>Méthode 1</u> : pour $x \in]0;1]$, par CHASLES, $f(x) = \displaystyle\int_0^{1/x} h(x,t)dt + \int_{1/x}^{+\infty} h(x,t)dt \geqslant \int_{1/x}^{+\infty} h(x,t)dt$. Or, on a $\displaystyle\int_{1/x}^{+\infty} h(x,t)dt = \int_{1/x}^{+\infty} \frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{1/x}^{+\infty} \frac{t^3e^{-xt}}{t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{1/x}^{+\infty} te^{-xt}dt$ car $\sqrt{1+t^4} \leqslant \sqrt{2}\,t^2$ pour $t \in [1/x;+\infty[\subset [1;+\infty[$, d'où $\sqrt{2}\displaystyle\int_{1/x}^{+\infty} h(x,t)dt \geqslant \Big[-t\frac{e^{-xt}}{x}\Big]_{1/x}^{+\infty} + \int_{1/x}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x}dt = \frac{1}{ex^2} + \Big[-\frac{e^{-xt}}{x^2}\Big]_{1/x}^{+\infty} = \frac{2}{ex^2}$ avec la même intégration par parties qu'à la question **c.**. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{ex^2} = +\infty$, par encadrement, on obtient finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

<u>Méthode 2</u> : pour $x > 0$, par CHASLES, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 h(x,t)dt + \int_1 +\infty h(x,t)dt \geqslant \int_1^{+\infty} h(x,t)dt$. Or, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x,t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{+\infty} \frac{t^3e^{-xt}}{t^2}dt$ car $\forall t \geqslant 1,\ 1+t^4 \leqslant 2t^4$. Ainsi, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} te^{-xt}dt = \Big[-t\frac{e^{-xt}}{x}\Big]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x}dt = \frac{e^{-x}}{x} + \Big[-\frac{e^{-xt}}{x^2}\Big]_1^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2}$, et que l'on a la limite $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \Big(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2}\Big) = +\infty$, par encadrement, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

<u>Pour aller plus loin</u>, avec le changement de variable $t = \varphi(u) = \dfrac{u}{x}$ avec la fonction φ qui est de classe C^1, bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, on a $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^3e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}du$ donc la relation $x^2f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} a(x,u)du$ en posant $a(x,u) = \dfrac{u^3e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}$.

(H_1) Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a $\displaystyle\lim_{x\to0^+} a(x,u) = ue^{-u} = b(u)$.

(H_2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u \mapsto a(x,u)$ et $u \mapsto b(u)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in \mathbb{R}_+$, $|a(x,u)| = \left|\dfrac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}\right| \leqslant u e^{-u} = b(u)$ avec b continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme avant.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} b(u)du = \Gamma(2) = 1$. Par conséquent, $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

14.16 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $g_x :]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g_x(t) = |\ln(t)|^x = e^{x\ln(|\ln(t)|)}$. La fonction g_x est continue sur $]0;1[$ par opérations. Comme $\ln(t) \underset{1^-}{\sim} t-1$, on a $g_x(t) \underset{1^-}{\sim} (1-t)^x = \dfrac{1}{(1-t)^{-x}}$. Traitons plusieurs cas :

- Si $x < 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} |\ln(t)| = +\infty$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} g_x(t) = 0$ et g_x se prolonge par continuité en 0 avec $g_x(0) = 0$.
- Si $x \geqslant 0$, par croissances comparées, $g_x(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc g_x est intégrable en 0.
- Comme $g_x(t) \underset{1^-}{\sim} (1-t)^x = \dfrac{1}{(1-t)^{-x}}$, par comparaison aux intégrales deRIEMANN, g_x est intégrable en 1 si et seulement si $-x < 1 \iff x > -1$.

Ainsi, g_x est intégrable sur $]0;1[$ si et seulement si $x > -1$. Comme la fonction g_x est positive sur $]0;1[$, g_x est intégrable sur $]0;1[$ si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 g_x$ converge. Par conséquent, $D =]-1;+\infty[$.

b. Posons $g :]1;+\infty[\times]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = |\ln(t)|^x = e^{x\ln(|\ln(t)|)}$ de sorte que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x,t)dt$.

(H_1) Pour $t \in]0;1[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^∞ sur D et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = \big(\ln(|\ln(t)|)\big)^k g(x,t)$.

(H_2) Pour $x \in D$, $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0;1[$ d'après **a.**.

(H_3) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $]0;1[$.

(H_4) Pour $[a;b] \subset D$, $t \in]0;1[$ et $x \in [a;b]$, on a $\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| = \big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k e^{x\ln(|\ln(t)|)}$. Comme on a $\ln(|\ln(t)|) \leqslant 0 \iff t > \dfrac{1}{e}$, on a $\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$ en définissant $\varphi_{k,a,b} :]0;1[\to \mathbb{R}_+$ par $\varphi_{k,a,b}(t) = \big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k e^{b\ln(|\ln(t)|)}$ si $t \leqslant \dfrac{1}{e}$ et $\varphi_{k,a,b}(t) = \big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k e^{a\ln(|\ln(t)|)}$ si $t \geqslant \dfrac{1}{e}$. La fonction $\varphi_{k,a,b}$ est continue par morceaux sur $]0;1[$ et elle y est intégrable car on a comme à la question **a.** $\varphi_{k,a,b}(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées et $\varphi_{k,a,b}(t) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k}{(1-t)^{-b}}$ d'où $\varphi_{k,a,b}(t) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\big|\ln(1-t)\big|^k}{(1-t)^{-b}} \underset{1^-}{=} o\left(\dfrac{1}{(1-t)^{\frac{1-b}{2}}}\right)$ par croissances comparées et $\dfrac{1-b}{2} < 1$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^∞ sur D et, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \in D$, on a $f^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(|\ln(t)|)\big)^k e^{x\ln(|\ln(t)|)}dt$.

c. Pour $x > -1$, dans l'expression de $f(x)$, on pose $t = e^{-u} = \varphi(u)$ avec φ de classe C^1, strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0;1[$ et, par changement de variable, $f(x) = \displaystyle\int_{+\infty}^0 e^{x\ln(u)}(-e^{-u})du$ donc $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^x e^{-u}du = \Gamma(x+1)$. Ainsi, comme on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = (n+1-1)! = n!$ (puisque par intégration par parties, on montre que $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n!$.