

ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 5

INTÉGRALES À PARAMÈTRE

5.1 Intégrales à paramètre

5.1 *Centrale PSI 2012* On définit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x^2 t) - \text{Arctan}(xt)}{t} dt$.

- Vérifier (sans chercher à le calculer) que $F(x)$ existe quel que soit le réel $x \in \mathbb{R}_+$.
- Montrer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
- En déduire une expression de $F(x)$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$.
- Calculer $F(x)$ par une méthode plus simple.

5.2 *Mines PSI 2007 d'après RMS* Soit $f : x \in [1; +\infty[\mapsto \int_0^{\pi/2} \ln(x^2 - \sin^2 t) dt$. Calculer $f(x)$.

5.3 a. Existence de $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \text{ch}(2xt) dt$.

- Calculer $F(x)$ en introduisant une équation différentielle vérifiée par F .
- Calculer $F(x)$ directement par une intégration terme à terme.

5.4 *Centrale PSI 2012* On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

- Montrer que f est de classe C^2 sur son ensemble de définition. En déduire que f est convexe.
- Établir que la courbe de f est symétrique par rapport à $x = \frac{1}{2}$. Donner la valeur minimale prise par f .
- Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

5.5 *Centrale PSI 2012* On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x dt$.

- Domaine I de définition de f . Montrer que f est de classe C^1 sur I et calculer $f'(x)$.
- En déduire une expression de $f(x)$ en fonction de x .

5.2 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

5.6 *Centrale PSI 2013* Maxime R.

Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + 2\pi)\}$.

On pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $G(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t) dt$ si $f \in E$.

- Montrer que G est un endomorphisme de E .
- Montrer que $G(f)$ est de classe C^1 et trouver une équation différentielle vérifiée par $G(f)$ si $f \in E$.
- G est-il surjectif ? injectif ?
- Résoudre l'équation $G(f) = \lambda f$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$.

5.7 *ENSAM PSI 2013* Pierre-Simon

On pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt} dt$.

- Montrer la continuité de g sur \mathbb{R}_+ .
- Vérifier que g est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- Calculer $g(x)$. On pourra intégrer $g''(x)$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

5.8 *Petites Mines PSI 2014* Alizée Mayet

On pose $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$. Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R}_+ . Calculer $G'(x)$.

Exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$. Montrer que F admet une limite en $+\infty$, la calculer.

5.9 *Centrale Maths1 PSI 2015* Inès Arranz-Valseo

a. Montrer que $g : t \rightarrow \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

b. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2(1+t^2)} dt$. Montrer que f est de classe C^2 et que $|f(x)| \leq x^2$. Calculer $f'(0)$.

c. On pose $a = \int_0^{+\infty} g(t) dt$. Montrer que f est solution de (E) : $y'' - y = \frac{\pi}{2} - ax$ sur \mathbb{R}_+ .

d. En déduire $f(x)$ en fonction de x . Quel est donc la valeur de a ?

5.10 *Mines PSI 2015* Édouard Le Goas

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$.

a. Ensemble de définition de F .

b. Montrer que F est continue et dérivable.

c. Calculer F .

5.11 *ENS Cachan PSI 2016* Charly Castes

On pose $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$ et $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

a. Calculer $g(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

b. Montrer que g est de classe C^1 et que $g'(x) = -2f'(x)f(x)$.

c. Calculer g et donner la valeur de I .

5.12 *ENS Cachan PSI 2016* Clément Suberchicot

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $S_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(xt) dt$.

a. Montrer que S_n est dérivable et que $S'_n(x) = -\int_0^1 (1-t^2)^n t \sin(xt) dt$.

Soit aussi $A_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $A_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}n!} S_n(x)$.

b. Montrer que A_n est dérivable et que $x A'_n(x) = (2n+1)A_n(x) - A_{n+1}(x)$.

c. En déduire qu'il existe deux polynômes U_n et V_n à coefficients entiers et de degré inférieur ou égal à n tels que U_n soit pair, V_n impair, et $A_n(x) = U_n(x) \sin(x) + V_n(x) \cos(x)$.

On suppose qu'il existe deux entiers p et q tels que $\frac{\pi^2}{4} = \frac{p}{q}$.

d. Montrer que $u_n = q^n A_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est entier.

e. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

f. En déduire que π^2 et π sont irrationnels.

5.13 *Centrale Maths1 PSI 2016* Erwann Alric et Matthieu Cadiot

Soit f définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x dt$.

- Trouver le domaine de définition de f .
- Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.
- Déterminer une expression simple de f .

5.14 *Centrale Maths1 PSI 2016* Théo Taupiac

Pour $\alpha \in]-1; 1[$, on pose $I(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\ln(1 + \alpha \cos(x))}{\cos(x)} dx$.

- Montrer que I est de classe C^1 sur $] - 1; 1[$ et calculer $I'(\alpha)$.

Indication : on donne $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ si $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

- En déduire une expression simple $I(\alpha)$ pour $\alpha \in] - 1; 1[$.
- Montrer que I est développable en série entière avec un rayon égal à 1.

5.15 *Mines PSI 2016* Marine Saint-Mézard I

On définit $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} - 1}{\ln(t)} dt$.

- Montrer que f est bien définie sur un domaine D à préciser.
- Montrer que f est de classe C^1 sur D . En déduire une expression simple de f .

5.16 *Mines PSI 2016* Théo Taupiac II

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1 + 2t \cos(\alpha) + t^2)}{t} dt$.

- Calculer $I(0)$.
- En déduire $I(\alpha)$ pour $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

5.17 *Petites Mines PSI 2016* Rogelio Escalona II

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

- Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R}_+ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} dt$.
- Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .

5.18 *ENS Cachan PSI 2017* Rémy Larue I

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(x^2 + t^2)(1 + t^2)}}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer que f y est C^∞ .
- Calculer avec un changement de variable la valeur exacte de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2 + t^2}}$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

5.19 ENS Cachan PSI 2017 Maxime Pouvureau II

Pour tout réel x , on pose $H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt) dt$.

Justifier que H existe et expliciter $H(x)$ en fonction de x . On donne $H(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5.20 Centrale Maths1 PSI 2017 Vincent Bouget

Soit $f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et f'' strictement positive.

a. Montrer que $\forall x \neq 0$, $f(x) = x \int_0^1 f'(tx) dt$.

b. Montrer qu'il existe une fonction $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xg(x)$.

Montrer qu'il existe une fonction $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2h(x)$.

Question intermédiaire : graphe de f , limites de f en $\pm\infty$.

c. Montrer qu'il existe une bijection $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \varphi^2(x)$.

5.21 Centrale Maths1 PSI 2017 Tom Huix

Soit $\varphi : t \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$.

a. Montrer que $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge. On donne $I = \sqrt{2\pi}$.

b. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{kt} dt$ converge aussi et déterminer sa valeur en fonction de k .

5.22 Mines PSI 2017 Alexis Trubert II

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t^3 + t}} dt$.

a. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

b. Calculer la limite de f en $+\infty$ et trouver un équivalent de f en $+\infty$.

5.23 CCP PSI 2017 Manon Bové I et Alexis Trubert I

On pose $g(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} dt$.

a. Montrer que $] -1; 1[$ est inclus dans le domaine de définition de g .

b. Trouver un développement en série entière de $g(x)$ sur $] -1; 1[$.

c. Montrer que g est de classe C^1 sur $]0; 1[$ et calculer $g'(x)$.

d. Montrer que g est de classe C^1 sur $]0; 1[$ et calculer $g'(x)$ par une méthode différente.

5.24 E3A PSI 2017 Agathe Maldonado

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$.

a. Montrer que f est continue et décroissante sur $]0; +\infty[$.

b. Calculer $f(1)$.

c. Montrer que $\forall x > 0$, $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}$. Trouver un équivalent de f en 0.

d. Trouver la limite et un équivalent de f en $+\infty$.

e. Question rajoutée : Montrer que $\forall x > 0$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

5.25 *Petites Mines PSI 2017* Éliisa Gressier-Monard II

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t} dt$.

- a. Montrer que $F(x)$ converge si $x > 0$.
- b. Donner le sens de variation de F . Montrer que F est de classe C^1 .
- c. Montrer que $F(x) \geq \frac{1}{e} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{dt}{1+t}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$.
- d. Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Et en 0 ?

5.26 *Petites Mines PSI 2017* Pauline Lamaignère I

Soit $f(x) = \int_0^1 \frac{(t-1)t^x}{\ln(t)} dt$.

- a. Montrer que la fonction f est définie sur $D =]-1; +\infty[$.
- b. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur D .
- c. Trouver une expression simple de $f(x)$.

5.27 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Amélie Guyot et Jean-Baptiste Malagnoux

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $h(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. On définit aussi $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

- a. Calculer $g(0)$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- b. Montrer que g est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et que $\forall x \geq 0, g'(x) = -2h'(x)h(x)$.
- c. En déduire une expression de g en fonction de h et la valeur de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Soit $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et décroissante telle que $\int_0^{+\infty} a(t) dt$ converge et est non nulle.

- d. Montrer que a est positive.
- e. Montrer que $\sum_{n \geq 1} a(nt)$ converge et donner un équivalent de $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(nt)$ quand t tend vers 0.
- f. Donner un équivalent quand x tend vers 1^- de $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$.

5.28 *Centrale Maths1 PSI 2018* Gauthier Crosio

On définit $F : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\text{Arctan}(x \tan(\theta))}{\tan(\theta)} d\theta$.

- a. Quel est le domaine de définition de F ?
- b. Calculer $F(x)$.

5.29 *Centrale Maths1 PSI 2018* Pauline Lamaignère

Soit $f \in C^0(]0; 1], \mathbb{R})$ telle qu'il existe $a \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $f(t) \sim_0 at^\alpha$. On pose $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt$.

- a. Déterminer le domaine de définition I de g .
- b. Montrer la continuité de g sur I .
- c. Montrer que g est de classe C^1 sur I .
- d. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\alpha-1} g(x)$.

5.30 Centrale Maths1 PSI 2018 Nicolas Ziegler

On définit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(x+t)}{1+t^2} dt$.

- Montrer que f est bien définie et continue sur \mathbb{R}_+ .
- Donner un équivalent de f en $+\infty$.
- Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{\pi}{4} \ln(x) + \frac{\ln(2)}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

5.31 Mines PSI 2018 Anaïs Chaumeil I

Soit $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = -\left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt\right) \sin(x) + \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt\right) \cos(x)$.

- Montrer que les deux fonctions f et g sont bien définies sur \mathbb{R}_+^* .
- Montrer que f et g sont solutions sur \mathbb{R}_+^* de (E) : $y'' + y = \frac{1}{x}$.
- Montrer que $f = g$. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

5.32 Mines PSI 2018 Lucie Jandet I

Soit $\beta > 0$. On définit, pour tout réel x , le réel $I_\beta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} e^{-\beta t} dt$.

- Montrer que I_β est de classe C^2 sur \mathbb{R} et vérifie (E) : $y'' - y = -\frac{\beta}{\beta^2 + x^2}$ sur \mathbb{R} .

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $F_\beta(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\beta e^{-t}}{\beta^2 + t^2} dt$ et $J_\beta(x) = \frac{1}{2} \left(e^x F_\beta(x) + e^{-x} F_\beta(-x) \right)$.

- Montrer que J_β est solution de (E) sur \mathbb{R} . En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_\beta(x) = J_\beta(x)$.

5.33 Mines PSI 2018 Paul Simon I

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt$.

- Montrer que F est continue sur \mathbb{R}_+ et de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* .
- Quelles sont les limites de F , F' , F'' en $+\infty$?
- Expliciter $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

5.34 CCP PSI 2018 Elisabeth Carreau-Gaschereau I

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$.

- Montrer que f est bien définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

Soit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $v_n = \int_{n-1}^n \ln(f(u)) du$.

- Donner la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{v_n}$. Indication : on pourra poser $\varphi : x \mapsto \int_{x-1}^x \ln(f(u)) du$.

5.35 *ENS Cachan PSI 2019* Julien Tissot

Soit X l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et de carré intégrable sur \mathbb{R} .

Pour $(f, g) \in X^2$, on définit $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$ et $N_2(f) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(y)dy}$.

- a. Si $(f, g) \in X^2$, montrer que $f * g$ est bien définie et que $\forall x \in \mathbb{R}, |f * g(x)| \leq N_2(f)N_2(g)$.
- b. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et de limite nulle en $\pm\infty$, montrer qu'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur \mathbb{R} et telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est nulle en dehors d'un intervalle borné.
- c. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe une suite de fonctions continues $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur \mathbb{R} et telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de limite nulle en $\pm\infty$.
Montrer que f est continue sur \mathbb{R} et de limite nulle en $\pm\infty$.
- d. Soit $(f, g) \in X^2$, montrer que $f * g$ est continue sur \mathbb{R} et de limite nulle en $\pm\infty$.

5.36 *Centrale Maths1 PSI 2019* Louis Destarac

On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2tx)dt$ et $g : y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2} dx$.

- a. Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f y est de classe C^1 .
- b. Trouver une équation différentielle (E) vérifiée par f . En déduire une expression simple de f .
- c. Montrer que g est constante sur \mathbb{R} .

5.37 *Centrale Maths1 PSI 2019* Paul Louziers

On pose $I_2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ et $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)} dt$.

- a. Montrer l'existence de I_2 .
- b. Montrer que $F(x)$ existe pour tout réel x .
- c. Montrer que F est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+ .
- d. Montrer que F est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y = \pi - 4xI_2$ sur \mathbb{R}_+ .
- e. Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+ et en déduire une expression de F en fonction de I_2 .
- f. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq F(x) \leq \frac{\pi x^2}{2}$. En déduire la valeur de I_2 .
- g. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge et déterminer sa valeur exacte.

5.38 *Centrale Maths1 PSI 2019* Léo Simplet

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} dt$. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- a. Montrer que f est bien définie et continue sur \mathbb{R} .
- b. Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* .
- c. En déduire une expression de f sans intégrale avec des fonctions usuelles.
- d. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
- e. Question supplémentaire : déterminer un équivalent de $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ en $+\infty$.

5.39 Mines PSI 2019 Noah Vicens II

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on note $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{x^2+t^2} dt$.

- Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R} .
- Calculer $f(0)$.
- Montrer que $\forall u \geq 0, u \geq \ln(1+u)$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq f(0) - f(x) \leq \frac{\pi x}{2}$.
- La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

5.40 CCP PSI 2019 Léo Simplet I

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt$.

- Montrer que F est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .
- Montrer que F est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* .
- Quelles sont les limites de F, F', F'' en $+\infty$?
- Montrer que $\forall x > 0, F'(x) = -\ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$. Expliciter $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

5.41 X PSI 2020 Louis Carillo I

Soit la fonction f définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et calculer $f'(x)$.
- En déduire une expression simple de $f(x)$.

5.42 Mines PSI 2021 Mathilde Arnaud II

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{t} e^{-t} dt$.

- Montrer que F est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- Calculer $F'(x)$ et en déduire une expression simple de $F(x)$.

5.43 Mines PSI 2021 Adrien Guyot I

On considère $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$.

- Montrer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
- Montrer que $F(0)$ existe et que F est continue en 0.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

5.44 Mines PSI 2021 Johan Haramboure II

On pose $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$ et $g : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- Montrer que f et g sont bien définies et dérivables sur \mathbb{R} .
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + g^2(x) = \frac{\pi}{4}$.
- En déduire la valeur de l'intégrale de GAUSS $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

5.45 CCINP PSI 2021 Antonio Treilhou I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt$.

- Trouver le domaine de définition D de f .
- Montrer que f est continue sur D .
- Montrer que si $x \in D$, alors $1-x \in D$ et $f(1-x) = f(x)$.
- Déterminer des équivalents de f aux bornes de D .

5.46 CCINP PSI 2021 Adeline Vaudrey I

On considère $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$.

- Montrer que f est définie sur $[0; +\infty[$.
- Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
- Montrer que $\forall x \geq 1$, $f(x) = xf(x-1)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \int_{n-1}^n \ln(f(u)) du$. On souhaite étudier la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{v_n}$. On définit la

fonction $\varphi : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \int_{x-1}^x \ln(f(u)) du$.

- Montrer que φ est dérivable sur $[1; +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$.
- En déduire la limite de φ en $+\infty$. Conclure.

5.47 Mines-Télécom PSI 2021 Juliette Maricourt I

Pour $x \geq 0$, soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

- Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R}_+ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} dt$.
- Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .
- Montrer que f est C^2 sur \mathbb{R}_+^* et solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à déterminer.

5.48 Mines PSI 2022 Anna Decrock I

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$.

- Déterminer le domaine de définition D de f .
- Montrer que f est continue sur D .
- Montrer que la courbe de f est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$.
- Établir l'existence d'une borne inférieure de f sur D et calculer $\inf_D f$.
- Trouver un équivalent de f en 0.

5.49 Mines PSI 2022 Florian Picq II

On définit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} dt$ et on pose $g(x) = f(x^2)$.

- Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et donner l'expression de $f'(x)$.
- Calculer $f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Établir que $\forall x \geq 0$, $g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}$.
- En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5.50 Mines PSI 2022 Maxence Rossignol I

Pour un réel x , en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$. On définit aussi, toujours sous réserve de convergence, $g(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

- Déterminer l'ensemble de définition D de f .
- Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* .
- Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$.
- Prouver que g est aussi solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* .
- Montrer que $f = g$ sur \mathbb{R}_+^* .
- En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$, puis de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

5.51 Mines PSI 2022 Baptiste Savarit I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

- Déterminer le domaine de définition D de f . Étudier la monotonie de f sur D .
- Sur quel domaine la fonction f est-elle continue ? dérivable ? Étudier la monotonie de f' .
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Calculer, pour $x > 0$, la valeur de $g(x) = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} dt$.
- En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{6}{x^4}$. Indication : on pourra s'intéresser à $|f(x) - g(x)|$.
- Déterminer la limite de f en 0^+ .

5.52 CCINP PSI 2022 Joël Lascoumes et Jade Mirassou I

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

- Déterminer le domaine de définition D de f .
- Montrer que f est continue sur D .
- Montrer, si $x \in D$, que $1-x \in D$ et qu'on a $f(1-x) = f(x)$.
- Déterminer des équivalents de f aux bornes de D .

5.53 CCINP PSI 2022 Ewan Sarrazin II

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

- Montrer que g est définie sur \mathbb{R} et qu'elle est impaire.
- Montrer que g est de classe C^1 sur \mathbb{R} et donner une expression intégrale de $g'(x)$.
- Montrer, si $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, que $\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}$.
- En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$.
- Que vaut donc $g(x)$ si $x \in \mathbb{R}_-$?

5.54 CCINP PSI 2022 Paul Sterlin I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(xt)}{t} dt$.

- Montrer que φ est définie et continue sur \mathbb{R} .
- Montrer que φ est dérivable sur \mathbb{R} .
- Exprimer φ' puis φ avec des fonctions usuelles.

5.55 Mines-Télécom PSI 2022 Naïs Baubry I

Pour $x \in D =]-1; +\infty[$, on définit la fonction $f_x : t \mapsto \frac{t^x - 1}{\ln(t)}$ et, en cas de convergence, $f(x) = \int_0^1 f_x(t) dt$.

- Montrer que f_x est intégrable sur $]0; 1[$ en distinguant les cas $x = 0$, $x > 0$ et $x < 0$.
- Montrer que f est de classe C^1 sur D et calculer $f'(x)$.
- En déduire une expression simple de $f(x)$.

5.56 Mines-Télécom PSI 2022 Manon Odelot II

a. Montrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

- Donner une expression simple de $F(x)$.

5.57 Centrale Maths1 PSI 2023 Arthur Biot

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

- Donner l'ensemble de définition D de F et montrer que F est continue sur D .
- Montrer que F est de classe C^1 sur D et calculer $F'(x)$.
- En déduire une expression simple de $F(x)$ pour $x \in D$.

5.58 Centrale Maths1 PSI 2023 Alban Dujardin I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)} dt$.

- Donner l'ensemble de définition D de F .
- Montrer que F est de classe C^1 sur $[0; \infty[$.
- En déduire une expression simple de $F(x)$ pour $x \in D$.
- Déterminer la valeur de $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\theta)) d\theta$.

5.59 Mines PSI 2023 Antoine Notelle-Maire I

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on note $I(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1) d\theta$.

On se propose de calculer la valeur de $I(x)$ par deux méthodes.

- Justifier l'existence de $I(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $I(x) = 2 \int_0^\pi \ln(|x - e^{i\theta}|) d\theta$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(|x - e^{\frac{ik\pi}{n}}|)$.

- Montrer que $S_n(x) = \frac{\pi}{n} \ln\left(|x^{2n} - 1| \cdot \left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$. En déduire la valeur de $I(x)$.
- Montrer que I est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et calculer $I'(x)$. En déduire à nouveau la valeur de $I(x)$.

5.60 *Mines PSI 2023* Paul Picard I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

- Déterminer le domaine de définition D de f . Étudier la monotonie de f sur D .
- Sur quel domaine la fonction f est-elle continue ? dérivable ? Étudier la monotonie de f' .
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Calculer, pour $x > 0$, la valeur de $g(x) = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} dt$.
- En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{6}{x^4}$. Indication : on pourra s'intéresser à $|f(x) - g(x)|$.
- Déterminer la limite de f en 0^+ .

5.61 *Mines PSI 2023* Maxence Prieur II

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^1 |\ln(t)|^x dt$.

- Déterminer le domaine de définition D de f .
- Montrer que f est de classe C^∞ sur D .
- Exprimer f en fonction de Γ . En déduire la valeur de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

5.62 *CCINP PSI 2023* Rebecca Blé II

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t} dt$.

- Montrer que φ est définie sur \mathbb{R} .
- Montrer que φ est continue et dérivable sur \mathbb{R} .
- Mettre $\varphi'(x)$ et $\varphi(x)$ sous forme de fonctions usuelles.

5.3 Officiel de la Taupe

5.63 *OdT 2013/2014 Ensam PSI planche 284II*

Montrer que g , définie par $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* .

Trouver une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par g et en déduire une autre expression de g .

5.64 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 157II*

a. Montrer que, pour tout $y > 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

b. On note $F(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$.

c. En déduire la valeur de $F(x, y)$.

5.65 *OdIT 2014/2015 ENTPE-EIVP PSI planche 324II*

a. Montrer que f et g données par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^{\pi/4} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}} dt$ sont définies et dérivables.

b. Montrer que $f^2 + g$ est constante et en déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5.66 *OdIT 2014/2015 ENSEA-ENSIIE PSI planche 327I*

a. Donner l'ensemble de définition de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

b. Montrer que F est de classe C^1 puis calculer $F(x)$.

5.67 *OdIT 2014/2015 ENSEA-ENSIIE PSI planche 328II*

a. Montrer que $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ existe pour $x \in \mathbb{R}_+$.

b. Montrer que F est continue sur \mathbb{R}_+ et de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

c. Calculer $F(x)$ à l'aide de $\theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$.

5.68 *OdIT 2015/2016 X-Cachan PSI planche 41*

À toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on associe sa demi-intégrale définie par $I_{1/2}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$ et à toute fonction f de classe C^1 de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} , sa demi-dérivée définie, pour $x > 0$, par $D_{1/2}f = \frac{d}{dx} I_{1/2}f$.

Vérifier que $I_{1/2}f$ est bien définie et qu'elle est continue sur \mathbb{R}_+ .

Montrer que $I_{1/2}f(x) = \int_0^x \frac{f(x-t)}{\sqrt{t}} dt$. Montrer que $D_{1/2}$ est bien définie et que $D_{1/2}f(x) = I_{1/2}f'(x) + \frac{f(0)}{\sqrt{\pi x}}$.

Calculer $I_{1/2}f$ pour $f(x) = x^n$ (on pourra utiliser la valeur des intégrales de WALLIS $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$, soit $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$ et $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$). Calculer $I_{1/2}f$ pour $f(x) = x^{n+\frac{1}{2}}$.

En déduire les relations $I_{1/2}I_{1/2}f(x) = \int_0^x f(t) dt$ et $D_{1/2}I_{1/2}f = f$ quand f est un polynôme.

Montrer les relations de la question précédente pour une fonction développable en série entière.

Que dire quand f est quelconque, de classe C^1 ?

5.69 *OdIT 2015/2016 X-Cachan PSI planche 45*

Sur quel intervalle de \mathbb{R}_+^* , $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ est-elle définie ?

Montrer qu'elle est continue sur cet intervalle et trouver un équivalent de f en 0.

Montrer que la courbe de f est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$.

5.70 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 248II* Domaine de définition de $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t} dt$.

Montrer que g y est dérivable, calculer g' et en déduire g .

5.71 *OdIT 2015/2016 ENSAM PSI planche 266II* Continuité et dérivabilité de $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$.

Déterminer g à l'aide de $h(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Trouver la limite de g en $+\infty$ et en déduire celle de h .

5.72 *OdIT 2015/2016 ENSEA planche 283II*

Montrer que $\Phi_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$ s'annule une fois et une seule sur $[0; \pi]$.

5.73 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 113II*

Soit $a > 0$ et $b > 0$. Ensemble de définition et calcul de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$.

5.74 *OdIT 2016/2017 Centrale PSI planche 157*

Montrer que f , définie pour $x > 0$ par $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{1 + t^2} dt$, est C^2 .

Trouver un équivalent de f en $+\infty$ puis en 0 .

5.75 *Compléments OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 450I et OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 216II*

Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + x^3 + t^3}$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+ . Trouver trois réels a , b et c tels que $\frac{1}{1 + x^3} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}$. Calculer $f(0)$. Montrer que f admet en $+\infty$ une limite que l'on calculera.