

SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 5

INTÉGRALES À PARAMÈTRE

5.1 Intégrales à paramètre

5.1 a. Posons, pour $(x, t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $f(x, t) = \frac{\text{Arctan}(x^2 t) - \text{Arctan}(xt)}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(x, 0) = x^2 - x$. La convergence

est claire pour $x = 0$ et $x = 1$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, alors $f(x, \cdot)$ est continue en 0 par développements limités et $f(x, t) \sim \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{t^2}$ en se servant du classique : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{Arctan}(y) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ d'après le critère de RIEMANN.

b. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{2x}{1+x^4 t^2} - \frac{1}{1+x^2 t^2}$ si $t \neq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 2x - 1$. Donc $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur

\mathbb{R}_+ quel que soit $t \in \mathbb{R}_+$; $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ et $t \mapsto f(x, t)$ sont continues sur \mathbb{R}_+ quel que soit $x \in \mathbb{R}_+$; de plus, si $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $a < b$, on a : $\forall t \in [a; b]$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2b}{1+a^4 t^2} + \frac{1}{1+a^2 t^2} = \varphi(t)$ et φ est

intégrable sur \mathbb{R}_+ . D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, on a la formule de LEIBNIZ : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{2x}{1+x^4 t^2} - \frac{1}{1+x^2 t^2} \right) dt = \frac{\pi}{2x}$.

c. Comme $F(1) = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \frac{\pi \ln(x)}{2}$. De plus, $F(0) = 0$.

Autre méthode : si $A \geq 0$ et $x > 0$, on calcule $\int_0^A \frac{\text{Arctan}(x^2 t) - \text{Arctan}(xt)}{t} dt = \int_{xA}^{x^2 A} \frac{\text{Arctan}(u)}{u} du$

par CHASLES et changement de variables linéaire et on encadre par croissance de Arctan ce qui donne $\text{Arctan}(xA) \ln(x) \leq \int_0^A \frac{\text{Arctan}(x^2 t) - \text{Arctan}(xt)}{t} dt \leq \text{Arctan}(x^2 A) \ln(x)$ d'où la valeur de $f(x)$.

5.2 • Pour $x > 1$, on a $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $x^2 - \sin^2(t) \geq x^2 - 1 > 0$ donc $t \mapsto \ln(x^2 - \sin^2 t)$ est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

donc y est intégrable. Si $x = 1$, on a juste $t \mapsto \ln(x^2 - \sin^2 t)$ qui est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ mais, en posant

$h = \frac{\pi}{2} - t$, on a $\ln(x^2 - \sin^2 t) = \ln(\cos^2(t)) = 2 \ln(\sin(h)) \underset{0}{\sim} 2 \ln(h)$ donc $t \mapsto \ln(x^2 - \sin^2 t)$ est intégrable

sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puisque $h \mapsto \ln(h)$ l'est sur $]0; 1[$ par exemple.

• Soit $g : [1; +\infty[\times \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \ln(x^2 - \sin^2 t)$, alors on a les hypothèses (H1) et

(H2) vérifiées (continuité en x à t fixé et continuité en t à x fixé) ; soit $b > 1$, on a pour $x \in [1; b]$ et $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $|g(x, t)| \leq |g(1, t)| + |g(b, t)| = 2 \ln |\cos t| + \ln(b^2 - \sin^2 t)$ (car $x \mapsto g(x, t)$ monotone) or la

fonction $t \mapsto 2 \ln |\cos t| + \ln(b^2 - \sin^2 t)$ est intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ d'après ce qui précède donc (H3) est

vérifiée (et donne aussi l'intégrabilité manquante dans (H2)) donc d'après le théorème de continuité sous le signe somme : f est continue sur $[1; b]$ pour tout $b > 1$ donc f est continue sur $[1; +\infty[$.

• Soit $[a; b] \subset]1; +\infty[$, alors si $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $x \mapsto g(x, t) = \ln(x^2 - \sin^2 t)$ est de classe C^1 sur $[a; b]$ et

si $x \in [a; b]$, $t \mapsto g(x, t) = \ln(x^2 - \sin^2 t)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{2x}{x^2 - \sin^2 t}$ sont continues par morceaux

et intégrables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (pour $\frac{\partial g}{\partial x}$ voir la domination qui suit) donc (H1) et (H2) sont vérifiées. Or :

$\forall (x, t) \in [a; b] \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2b}{a^2 - \sin^2 t} \leq \frac{2b}{a^2 - 1}$ donc (H3) est aussi vérifiée. On peut donc en

déduire d'après le théorème de dérivation sous le signe somme que f est de classe C^1 sur $[a; b]$ (pour tout $[a; b] \subset]1; +\infty[$) et donc sur $]1; +\infty[$ et que, d'après la formule de LEIBNIZ : $\forall x > 1, f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{2x dt}{x^2 - \sin^2 t}$.

• En voyant cette dernière intégrale sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ (la valeur en 0 ne change rien), on effectue le changement de variable $t = \text{Arctan}(u)$ (ou plutôt $u = \tan(t)$ qui relève des règles de BIOCHE) et on a donc la relation : $\forall x > 1, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x du}{(1+u^2)(x^2 - \frac{u^2}{1+u^2})}$ car $\sin^2 t = \frac{\tan^2 t}{1 + \tan^2 t}$ et $\text{Arctan}'(u) = \frac{1}{1+u^2}$.

Mieux : $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} du}{1 + \left(\frac{x^2-1}{x^2} u^2\right)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \int_0^y \frac{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} du}{1 + \left(\frac{x^2-1}{x^2} u^2\right)}$ qu'on intègre en

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \text{Arctan} \left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} u \right) \right]_0^y = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}.$$

• Ainsi, comme f est continue en 1 et que $]1; +\infty[$ est un intervalle, il existe une constante k telle que : $\forall x \geq 1, f(x) = \pi \text{Argch}(x) + k$. Or $f(1) = 2 \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$ et on a calculé l'intégrale d'EULER en cours donc $f(1) = -\pi \ln(2)$. Comme $\text{Argch}(1) = 0$, on a donc $k = -\pi \ln(2)$ et : $\forall x \geq 1, f(x) = \pi \ln(x + \sqrt{x^2-1}) - \pi \ln(2)$.

5.3 a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2} \text{ch}(2xt)$ est continue sur \mathbb{R}_+ et, par croissances comparées,

$$e^{-t^2} \text{ch}(2xt) = \frac{e^{-t^2+xt} + e^{-t^2-xt}}{2} = o(t^{-2}) \text{ donc cette intégrale } f(x) \text{ existe pour tout } x \text{ réel.}$$

b. On définit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, t) = e^{-t^2} \text{ch}(2xt)$. Soit $a > 0$. (H1) Pour $t \in \mathbb{R}_+, x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} . (H2) Pour $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sont continues et intégrables sur \mathbb{R}_+ car $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 2te^{-t^2} \text{sh}(2xt)$ et que $2te^{-t^2} \text{sh}(2xt) = o(t^{-2})$. (H3) Pour $a > 0$ et $x \in [-a; a]$, $\forall t \in \mathbb{R}_+, |2te^{-t^2} \text{sh}(2xt)| \leq 2te^{-t^2} \text{sh}(2at) = \varphi_a(t)$ et φ_a est intégrable sur \mathbb{R}_+ donc, par le théorème de LEIBNIZ : F est C^1 sur \mathbb{R} et $F'(x) = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2} \text{sh}(2xt) dt = 2xF(x)$ par IPP.

On intègre cette équation différentielle et $F(x) = F(0)e^{x^2}$ avec $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de GAUSS).

c. On sait que $\text{ch}(2xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2xt)^{2n}}{(2n)!}$ et, avec $u_n : t \mapsto \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} t^{2n} e^{-t^2}$, la fonction u_n est continue et $\int_0^{+\infty} |u_n| = \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$ or $\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} t^{2n-1} t e^{-t^2} dt = \frac{2n-1}{2} \int_0^{+\infty} t^{2(n-1)} e^{-t^2} dt$ par IPP donc $\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ par récurrence donc $\int_0^{+\infty} |u_n| = \frac{|x|^{2n}}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, par le TITT : $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^{2n}}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}$.

5.4 a. • Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est continue et positive sur $]0; +\infty[$. De plus, $\frac{1}{t^x(1+t)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et $\frac{1}{t^x(1+t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ donc, d'après le critère de RIEMANN : ($t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $x < 1$) et ($t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est intégrable sur $]1; +\infty[$ si et seulement si $x+1 > 1$). Par conséquent : $t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $x \in]0; 1[$.

• Soit $g :]0; 1[\times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$, alors si $t \in \mathbb{R}_+^*, x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur $]0; 1[$ et si $x \in]0; 1[, t \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{-\ln(t)}{t^x(1+t)}$ sont continues et intégrables sur \mathbb{R}_+^* (pour $\frac{\partial g}{\partial x}$ voir la

domination qui suit) donc (H1) et (H2) sont vérifiées. Soit $[a; b] \subset]0; 1[$, $\forall (x, t) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ où $\varphi(t) = \frac{-\ln(t)}{t^b(1+t)}$ si $t \leq 1$ et $\varphi(t) = \frac{\ln(t)}{t^a(1+t)}$ si $t \geq 1$. De plus $\frac{-\ln(t)}{t^b(1+t)} = o\left(\frac{1}{t^{\frac{1+b}{2}}}\right)$ avec $\frac{1+b}{2} < 1$ et $\frac{\ln(t)}{t^a(1+t)} = o\left(\frac{1}{t^{1+\frac{a}{2}}}\right)$ avec $1 + \frac{a}{2} > 1$ donc φ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et (H3) est aussi vérifiée. On peut donc en déduire d'après le théorème de dérivation sous le signe somme que f est de classe C^1 sur $[a; b]$ (pour tout $[a; b] \subset]0; 1[$) et donc sur $]0; 1[$ et que, d'après la formule de LEIBNIZ : $\forall x \in]0; 1[$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(t) dt}{t^x(1+t)}$.

• Par la même méthode, f' est de classe C^1 et $\forall x \in]0; 1[$, $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(t) dt}{t^x(1+t)} > 0$ donc f est convexe.

b. • On effectue le changement de variable $t = \varphi(u) = \frac{1}{u}$ et φ est une bijection strictement décroissante et de classe C^1 de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* donc $f(x) = \int_{+\infty}^0 \left(-\frac{1}{u^2}\right) \frac{u}{u^{-x}(1+u)} du = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1-x}(1+u)} = f(1-x)$ d'où la symétrie du graphe de f par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$.

• La valeur minimale de f est donc prise en $\frac{1}{2}$ par convexité et cette symétrie et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$.

Or $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \left[2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{t})\right]_0^{+\infty}$ donc $f\left(\frac{1}{2}\right) = \pi = \operatorname{Min}_{]0; 1[}(f)$.

c. Fatigué !

5.5 a. Pas de problème en $1-$ car $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{t-1}{\ln(t)} = 1$. Si $x > -1$, on a $\frac{t-1}{\ln(t)} t^x = o\left(\frac{1}{t^{-x+1}}\right)$ et il y a existence de

$f(x)$. Mais si $x \leq -1$, $\frac{t-1}{\ln(t)} t^x \sim \frac{1}{\ln(t)t^{-x}}$ et $\frac{1}{|\ln(t)|t^{-x}} \geq \frac{1}{|\ln(t)|t}$ donc $f(x)$ n'existe pas car $\int_0^{1/2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$ diverge. Ainsi le domaine de définition de f est $I =]-1; +\infty[$.

Pour $x \in [a; +\infty[$ avec $a > -1$, en posant $g(x, t) = \frac{t-1}{\ln(t)} t^x$: $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = (t-1)t^x$ donc $g(x, \cdot)$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$ sont continues, intégrables sur $]0; 1[$, $\frac{\partial g}{\partial x}(\cdot, t)$ continue sur $[a; +\infty[$ et $\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times]0; 1[$, $\left| (t-1)t^x \right| \leq (t-1)t^a$ avec $t \rightarrow (t-1)t^a$ intégrable sur $]0; 1[$. On applique le théorème de dérivation sous le signe somme et la formule de LEIBNIZ : f est dérivable sur $[a; +\infty[$ et $\forall x \geq a$, $f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x dt = \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right)$.

Donc f est bien dérivable sur I .

b. D'après la question précédente, comme I est un intervalle, on a l'existence d'une constante k telle que $\forall x \in I$, $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + k$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les $f_n : t \rightarrow \frac{t-1}{\ln(t)} t^n$ sont intégrables sur $]0; 1[$, convergent simplement vers la fonction nulle sauf en 1 et sont dominées par f_0 . Convergence dominée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$ donc $\forall x > -1$, $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$.

Ou alors $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est bornée (par $M > 0$) sur $]0; 1[$ donc $0 < f(x) \leq \int_0^1 M t^x dt = \frac{M}{x+1}$ et $k = 0$ aussi.

5.2 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

5.6 Avant tout, f est bien bornée sur \mathbb{R} car elle l'est sur $[0; 2\pi]$ en tant que fonction continue sur un segment et donc sur \mathbb{R} car elle est 2π -périodique.

a. G est tout d'abord bien défini car $\forall t \geq 0$, $|e^{-t} f(x+t)| \leq \|f\|_\infty e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ est classiquement intégrable sur \mathbb{R}_+ : on conclut par comparaison.

La linéarité de l'intégrale (pour les fonctions intégrables) justifie la linéarité de G .

Soit $f \in \mathcal{E}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(f)(x + 2\pi) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x + 2\pi + t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x + t) dt = G(f)(x)$ car f est 2π -périodique : $G(f)$ est bien 2π -périodique.

- Soit $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto e^{-t} f(x + t)$ est continue sur \mathbb{R} par hypothèse.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-t} f(x + t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ (déjà vu).
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $|e^{-t} f(x + t)| \leq \|f\|_{\infty} e^{-t}$ et $t \mapsto \|f\|_{\infty} e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Par théorème de continuité sous le signe somme, $G(f)$ est continue sur \mathbb{R} . Ainsi $G \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.

b. Soit $f \in \mathcal{E}$, comme f n'est pas supposée C^1 , on ne peut pas employer le théorème de dérivabilité sous le signe somme, mais $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(f)(x) = \int_x^{+\infty} e^{x-u} f(u) du = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u} f(u) du$ avec le changement de variable $u = t+x$. $u \mapsto e^{-u} f(u)$ est continue sur \mathbb{R} , donc $F : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-u} f(u) du = \int_0^{+\infty} e^{-u} f(u) du - \int_0^x e^{-u} f(u) du$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -e^{-x} f(x)$.

Alors, par produit, $G(f)$ est de classe C^1 avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(f)'(x) = e^x F(x) - e^x e^{-x} f(x) = G(f)(x) - f(x)$.

c. G n'est pas être surjective car $\text{Im}(G) \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. G est par contre injective car si $G(f) = 0$, alors $G(f)' = 0$ donc $f = 0$ d'après l'équation différentielle de la question précédente.

d. Comme on sait déjà que $G(f) = 0 \iff f = 0$, on peut dorénavant supposer que $\lambda \neq 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in \mathcal{E}$, $G(f) = \lambda f \implies G(f)' = \lambda f' \implies \lambda f' = \lambda f - f \implies f' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} f$ ce qui donne, en posant

$$\alpha = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C e^{\alpha x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Mais comme f est censée être 2π -périodique, ceci impose $C = 0$: pas de valeur propre réelle pour G .

5.7 a. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\forall t > 0$, $\varphi(t) = \frac{\sin^2(t)}{t^2}$ et $\varphi(0) = 1$. φ est continue sur \mathbb{R}_+ et comme

$\varphi(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, la fonction φ est intégrable sur \mathbb{R}_+ d'après RIEMANN. Comme $0 \leq e^{-xt} \leq 1$ si $(x, t) \in \mathbb{R}_+^2$,

g est bien définie sur \mathbb{R}_+ . Soit aussi $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x, t) = \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt}$.

- Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
- Pour tout $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car $f(x, t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
- Pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+^2$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ et on sait que φ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Par le théorème de continuité sous le signe somme : g est continue sur \mathbb{R}_+ .

b. • Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* (elle y est même de classe C^∞).

• Si $x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt}$ sont continues, intégrables sur \mathbb{R}_+ car $f(x, t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

• Si $a > 0$ et $(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $|f(x, t)| \leq t\varphi(t)e^{-at} = \psi(t)$ et ψ est intégrable sur \mathbb{R}_+ (voir ci-dessus).

Théorème de dérivabilité sous le signe somme : g est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $g'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt} dt$.

Par le même procédé, g est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x > 0$, $\forall k \geq 1$, $g^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k \varphi(t) e^{-xt} dt$.

c. Ainsi : $\forall x > 0$, $g''(x) = \int_0^{+\infty} \sin^2(t) e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{2it}}{4} - \frac{e^{-2it}}{4}\right) e^{-xt} dt$ qu'on sait bien calculer :

$$g''(x) = \left[-\frac{1}{2x} e^{-xt} - \frac{1}{4(2i-x)} e^{(2i-x)t} + \frac{1}{4(2i+x)} e^{(-2i-x)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{4(2i-x)} - \frac{1}{4(2i+x)}$$
 ce qui donne

$$g''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(4+x^2)}. \text{ On intègre } (\mathbb{R}_+^* \text{ est un intervalle}) : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, g'(x) = \frac{\ln(x)}{2} - \frac{\ln(4+x^2)}{4} + \lambda.$$

Comme $t \mapsto t\varphi(t)$ est bornée sur \mathbb{R}_+ , en notant $M = \sup_{t \geq 0} |t\varphi(t)|$, on a $|g'(x)| \leq \int_0^{+\infty} M e^{-xt} dt = \frac{M}{x}$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0. \text{ Ceci implique que } \lambda = 0 \text{ car } g'(x) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x^2}{4+x^2}\right) + \lambda.$$

De même : $\exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x > 0, g(x) = \frac{x \ln(x)}{2} - \frac{x \ln(x^2+4)}{4} - \text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \mu$. Or en notant $N = \sup_{t \geq 0} |\varphi(t)|$,

$\forall x > 0, |g(x)| \leq \frac{N}{x}$ ce qui implique que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Comme $\frac{x \ln(x)}{2} - \frac{x \ln(x^2 + 4)}{4} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x} : \mu = \frac{\pi}{2}$.

Enfin : $\forall x > 0, g(x) = \frac{x \ln(x)}{2} - \frac{x \ln(x^2 + 4)}{4} - \text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}$.

5.8 Soit $f : \mathbb{R}_+ \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$.

- Clairement $\forall t \in [0; 1], f(\cdot, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ .
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x, \cdot)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ sont continues et intégrables sur $[0; 1]$ car elles y sont continues.
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0; 1], \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| -2xe^{-(1+t^2)x^2} \right| \leq \underset{x \in \mathbb{R}}{\text{Max } h(x)} = M$ car $h : x \mapsto xe^{-x^2}$ est continue, bornée sur \mathbb{R} . Comme $t \mapsto M$ est intégrable sur $[0; 1]$, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme : G est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et $\forall x \geq 0, G'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2x^2} dt$. Si $x > 0$, après le changement de variable $u = tx$, on a $G'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$. Si $x = 0$, cette relation est aussi vraie.

Par le théorème fondamental de l'intégration, comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ , on a F de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et $\forall x \geq 0, F'(x) = e^{-x^2}$. Par conséquent : $\forall x \geq 0, G'(x) + 2F'(x)F(x) = 0$.

On intègre et, comme \mathbb{R}_+ est un intervalle et que $G(0) = \frac{\pi}{4}$ et $F(0) = 0, \forall x \geq 0, G(x) + F(x)^2 = \frac{\pi}{4}$. Mais

$0 \leq G(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi e^{-x^2}}{4}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$. Ainsi, en passant à la limite dans la relation précédente : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ (on retrouve l'intégrale de GAUSS).

5.9 a. g est continue sur \mathbb{R}_+^* par théorèmes généraux et $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \frac{1}{2}$ par DL.

De plus : $\forall t > 0, 0 \leq g(t) \leq \frac{2}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc g est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

b. Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{1 - \cos(tx)}{t^2(1+t^2)}$. Comme $\forall \theta \in \mathbb{R}, |\sin(\theta)| \leq |\theta|$:

(H₁) Pour $t > 0, x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} et $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}, \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$.

(H₂) Pour $x \in \mathbb{R}, t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* car $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(x, t) = \frac{x^2}{2}$ par DL et $|h(x, t)| \leq \frac{2}{t^4}$.

De plus, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues sur \mathbb{R}_+^* .

(H₃) Soit $a > 0, x \in [-a; a], t > 0 : \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{|tx|}{t(1+t^2)} \leq \frac{a}{1+t^2} = \varphi_a(t)$ et φ_a intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Mieux, $\forall (x, t) \in [-a; a] \times \mathbb{R}_+^*, \left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \psi(t)$ et ψ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Par le théorème de dérivation sous le signe somme appliqué deux fois, la fonction f de classe C^2 sur \mathbb{R} et on a les formules $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt$ et $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt$ pour tout réel x .

On prouve $\forall u \in \mathbb{R}, |1 - \cos(u)| \leq \frac{u^2}{2}$ donc $|f(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2(1+t^2)} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2(1+t^2)} dt = \frac{\pi x^2}{4} \leq x^2$ pour tout x car $\pi < 4$. On peut aussi étudier la fonction $u : x \mapsto x^2 - f(x)$ sur \mathbb{R}_+ (car f est clairement paire), déterminer son tableau de variations et conclure que u est positive sur \mathbb{R}_+ en se servant du fait que $|f''(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{2}$, que $f(0) = f'(0) = 0$ (clair avec l'expression intégrale).

c. Si $x \in \mathbb{R}, f''(x) - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \cos(tx)}{t^2(1+t^2)} dt - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2(1+t^2)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} dt$.

$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ et avec le changement de variable $u = tx$ (si $x > 0$) dans la seconde intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} dt = x \int_0^{+\infty} g(u) du = ax$. (E) est aussi vérifié si $x = 0$ car $f(0) = 0$ et $f''(0) = \frac{\pi}{2}$.

d. On résout l'équation différentielle sur \mathbb{R}_+ en tenant compte de $f(0) = f'(0) = 0$ avec la solution particulière $y(x) = ax - \frac{\pi}{2}$ et on a $\forall x \geq 0$, $f(x) = \frac{\pi}{2}(\text{ch}(x) - 1) + a(x - \text{sh}(x))$.

Mais pour respecter $|f(x)| \leq x^2$, on doit avoir $a = \frac{\pi}{2}$ sinon $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)e^x$.

Avec une IPP ad hoc dans $\int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(t))dt}{t^2}$, on a l'intégrale de DIRICHLET : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

5.10 a. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t}$. Comme $1 - \cos(xt) = \frac{x^2 t^2}{2} + o(t^2)$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ se prolonge par continuité en 0 par $f(x, 0) = \frac{x^2}{2}$. De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(x, t) = 0$ donc $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* par RIEMANN et $F(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. (H₁) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $x \rightarrow f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

(H₂) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \rightarrow f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (on vient de le voir), $t \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , $t \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \cos(xt) e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

(H₃) Pour $a > 0$, $x \in [-a; a]$, $t > 0$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq a e^{-t} = \varphi_a(t)$ et φ_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Globalement, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq e^{-t} = \varphi_1(t)$ et φ_1 est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Par le théorème de dérivation sous le signe somme qu'on applique deux fois, la fonction F est de classe C^2 sur \mathbb{R} et on a les formules (LEIBNIZ) $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$ et $F''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$.

c. Ainsi : $F''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt = \text{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} dt \right) = \text{Re} \left(\frac{1}{1-ix} \right) = \frac{1}{1+x^2}$. Comme $F'(0) = 0$, on a $F'(x) = \text{Arctan}(x)$ et on intègre ; comme $F(0) = 0$: $F(x) = x \text{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

5.11 a. Clairement $g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. De plus, pour $x > 0$, $\forall t \geq 0$, $0 \leq e^{-(1+t^2)x^2} \leq e^{-x^2}$ et $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$, donc $0 \leq g(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$ donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

b. Soit $h : \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$.

• $\forall t \in [0; 1]$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} par opérations.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$ sont continues donc intégrables sur le segment $[0; 1]$.

• $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; 1]$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2|x|e^{-x^2} \leq \varphi(t) = M$ où $M = \text{Max}_{x \in \mathbb{R}}(2|x|e^{-x^2})$; φ est intégrable sur $[0; 1]$.

Ainsi par le théorème de dérivabilité sous le signe somme : g est de classe C^1 sur \mathbb{R} et on a la formule $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -2 \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} x dt = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} x dt = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2e^{-x^2} f(x)$ en posant $u = tx$ si $x \neq 0$. Mais si $x = 0$, on a clairement $g'(0) = 0$ donc $g'(0) = -2e^{-0^2} f(0)$ car $f(0) = 0$.

On en déduit alors que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -2f'(x)f(x)$ par le théorème fondamental de l'intégration car $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

c. Comme \mathbb{R} est un intervalle et que $(g+f^2)' = 0$ sur \mathbb{R} , il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)+f^2(x) = C \geq 0$.

Comme $f(0) = 0$, on en déduit $C = g(0) = \frac{\pi}{4}$ d'après **a.** Comme f est une fonction positive, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{f(x)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4} - g(x)}. \text{ De plus } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \text{ ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = I.$$

5.12 a. Soit $f_n : \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x, t) = (1 - t^2)^n \cos(xt)$.

- $\forall t \in [0; 1], x \rightarrow f_n(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f_n(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f_n}{\partial x}(x, t) = -t(1 - t^2)^n \sin(xt)$ sont continues donc intégrables sur $[0; 1]$.
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; 1], \left| \frac{\partial f_n}{\partial x}(x, t) \right| \leq 1 = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $[0; 1]$.

Ainsi, S_n est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, S'_n(x) = -\int_0^1 (1 - t^2)^n t \sin(xt) dt$.

b. Pour A_n est dérivable parce que S_n l'est et on a facilement $x A'_n(x) = (2n + 1) \frac{x^{2n+1}}{2^{n n!}} S_n(x) + \frac{x^{2n+2}}{2^{n n!}} S'_n(x)$

ce qui donne $x A'_n(x) - (2n + 1) A_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{2^{n n!}} S'_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{2^{n n!}} \int_0^1 [-(1 - t^2)^n t] [\sin(xt)] dt$. On effectue une

IPP en posant $u(t) = \frac{(1 - t^2)^{n+1}}{2(n+1)}, v(t) = \sin(xt)$ d'où $u'(t) = -(1 - t^2)^n t$ et $v'(t) = x \cos(xt)$. Ainsi

$$\int_0^1 [-(1 - t^2)^n t] \sin(xt) dt = \left[\frac{(1 - t^2)^{n+1}}{2(n+1)} \sin(xt) \right]_0^1 - x \int_0^1 \frac{(1 - t^2)^{n+1} \cos(xt)}{2(n+1)} dt$$

$$\int_0^1 [-(1 - t^2)^n t] \sin(xt) dt = -x \int_0^1 \frac{(1 - t^2)^{n+1} \cos(xt)}{2(n+1)} dt.$$

Alors on a $\frac{x^{2n+2}}{2^{n n!}} S'_n(x) = \frac{x^{2n+3}}{2^{n+1} (n+1)!} \int_0^1 \frac{(1 - t^2)^{n+1} \cos(xt)}{2(n+1)} dt = -A_{n+1}(x)$ et on peut conclure que

$x A'_n(x) = (2n + 1) A_n(x) - A_{n+1}(x)$ comme attendu.

c. $S_0(x) = \int_0^1 \cos(xt) dt = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $S_0(x) = 1$. Ainsi $A_0(x) = \sin(x)$ et on a bien l'initialisation

$A_0(x) = U_0(x) \sin(x) + V_0(x) \cos(x)$ avec $U_0(x) = 1$ et $V_0(x) = 0$. U_0 est pair et V_0 est impair et ce sont bien des polynômes de degré inférieurs ou égaux à 0.

Soit $n \geq 0$, si l'on suppose qu'il existe deux polynômes U_n et V_n à coefficients entiers et de degré inférieur ou égal à n tels que U_n soit pair, V_n impair, et $A_n(x) = U_n(x) \sin(x) + V_n(x) \cos(x)$, alors, en dérivant, on obtient la relation suivante $A_{n+1}(x) = (2n + 1) A_n(x) - x A'_n(x)$ qui devient après substitution :

$$A_{n+1}(x) = ((2n + 1)U_n(x) - xU'_n(x) + xV_n(x)) \sin(x) + ((2n + 1)V_n(x) - xV'_n(x) - xU_n(x)) \cos(x)$$

Ainsi $A_{n+1}(x) = U_{n+1}(x) \sin(x) + V_{n+1}(x) \cos(x)$ en posant $U_{n+1} = (2n + 1)U_n - xU'_n + xV_n$ qui est bien pair de degré inférieur ou égal à $n + 1$ et $V_{n+1} = (2n + 1)V_n - xV'_n - xU_n$ qui est bien impair de degré

inférieur ou égal à $n + 1$. On conclut par principe de récurrence. **d.** En écrivant $U_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k} X^{2k}$ où les a_{2k} sont des entiers, on a

$$u_n = q^n A_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = q^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k} \frac{p^k}{q^k} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k} p^k q^{n-k} \in \mathbb{Z}.$$

e. De plus, $u_n = \frac{q^n}{2^{n n!}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} S_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n \frac{q^n}{2^{n n!}} S_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Il est clair que $|S_n(x)| \leq 1$ par majoration

brutale donc $|u_n| \leq \frac{\pi}{2} \frac{(p/2)^n}{n!}$. Par croissance comparée, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

f. Une suite entière qui tend vers 0 est forcément nulle à partir d'un certain rang (prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$). Ainsi :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = 0$. Mais comme $u_{n_0} = 0$, on a $A_{n_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ car $q \neq 0$ donc $S_{n_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ce qui

montre que $\int_0^1 (1-t^2)^{n_0} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt = 0$. Mais l'intégrale sur $[0; 1]$ d'une fonction positive continue est nulle si et seulement si cette fonction est nulle. Alors $\forall t \in [0; 1]$, $(1-t^2)^{n_0} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 0$ ce qui est absurde.

On en conclut que $\frac{\pi^2}{4}$ est irrationnel, et ceci implique aussi que sa racine $\frac{\pi}{2}$ et donc π sont irrationnels.

5.13 a. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $g_x : t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)} t^x$. La fonction g_x est continue sur $]0; 1[$. Comme $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{t-1}{\ln(t)} = 1$, la fonction g_x se prolonge par continuité en 1 en posant $g_x(1) = 1$.

- Si $x > -1$, on a $\frac{t-1}{\ln(t)} t^x \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{x+1}{2}}}\right)$ et $f(x)$ existe par comparaison avec les intégrales de RIEMANN.
- Si $x \leq -1$, $\frac{t-1}{\ln(t)} t^x \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\ln(t)t^x}$ et $\frac{1}{\ln(t)t^x} \geq \frac{1}{t \ln(t)}$ alors que $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ n'est pas intégrable sur $]0; 1[$ car $t \mapsto \ln(|\ln(t)|)$ n'admet de limite finie ni en 0 ni en 1. Ainsi le domaine de définition de f est $I =]-1; +\infty[$. Soit $g :]-1; +\infty[\times]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{t-1}{\ln(t)} t^x$. On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = (t-1)t^x$.

- $\forall t \in]0; 1[$, $x \rightarrow g(x, t)$ est de classe C^1 sur I .
- $\forall x \in I$, $t \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ sont continues, intégrables sur $]0; 1[$ par RIEMANN.
- Pour $a > -1$, $\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times]0; 1]$, $\left| (t-1)t^x \right| \leq (t-1)t^a$ avec $t \mapsto (t-1)t^a$ intégrable sur $]0; 1[$.

Par dérivation sous le signe somme, f est C^1 sur I et $\forall x > -1$, $f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x dt = \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right)$.

b. D'après la question précédente, comme I est un intervalle, on a l'existence d'une constante k telle que $\forall x \in I$, $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + k$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les $f_n : t \rightarrow \frac{t-1}{\ln(t)} t^n$ sont intégrables sur $]0; 1[$, convergent simplement vers la fonction nulle et sont dominées par f_0 qui est intégrable.

Par convergence dominée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$; donc $k = 0$ et $\forall x > -1$, $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$.

On aurait aussi pu dire que la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ étant prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0; 1]$, elle est bornée (par $M > 0$) sur $[0; 1]$ donc $0 < f(x) \leq \int_0^1 M t^x dt = \frac{M}{x+1}$ et on retrouve $k = 0$.

5.14 a. Soit $f :]-1; 1[\times]0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(\alpha, x) = \frac{\ln(1 + \alpha \cos(x))}{\cos(x)}$ avec la valeur $f\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = \alpha$ qui est un prolongement par continuité puisque $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos(x) = 0$ donc, si $\alpha \neq 0$, $\ln(1 + \alpha \cos(x)) \underset{\pi/2}{\sim} \alpha \cos(x)$.

- $\forall x \in [0; \pi]$, $\alpha \mapsto f(\alpha, x)$ est de classe C^1 sur $] -1; 1[$ (même si $x = \frac{\pi}{2}$).
- $\forall \alpha \in] -1; 1[$, les fonctions $x \mapsto f(\alpha, x)$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x) = \frac{1}{1 + \alpha \cos(x)}$ sont continues donc intégrables sur $[0; \pi]$ car $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, \pi/2) = 1 = \frac{1}{1 + \alpha \cdot 0}$ donc $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x) = \frac{1}{1 + \alpha \cos(x)}$ est valable pour tout $x \in [0; \pi]$.

On en déduit que I est de classe C^1 sur $] -1; 1[$ et que $I'(\alpha) = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \alpha \cos(x)}$.

On pose $x = 2 \operatorname{Arctan}(t)$ dans cette intégrale et on obtient classiquement $I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{1 + \alpha + (1-\alpha)t^2}$.

On calcule encore et on parvient à $I'(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left[\operatorname{Arctan}\left(t \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.

b. Comme $f(0) = 0$ et que $] -1; 1[$ est un intervalle : $\forall \alpha \in] -1; 1[$, $I(\alpha) = \pi \operatorname{Arcsin}(\alpha)$.

c. On connaît le DSE de $\alpha \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ qu'on intègre pour trouver celui de Arcsin et on a (c'est presque du

cours) : $\forall \alpha \in] -1; 1[$, $I(\alpha) = \pi \operatorname{Arcsin}(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \alpha^{2n+1}$. Le rayon de convergence de cette série entière vaut 1 soit parce qu'on le sait, soit en utilisant comme dans le cours la règle de D'ALEMBERT.

On aurait aussi pu faire cette question indépendamment des résultats précédents en écrivant, puisque $\alpha \cos(x) \in]-1; 1[$ pour $\alpha \in]-1; 1[$ et $x \in [0; \pi]$, la relation $\ln(1 + \alpha \cos(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^n(x) \alpha^n}{n}$. On a donc $I(\alpha) = \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^{n-1}(x) \alpha^n}{n} dx$. On pose $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cos^{n-1}(x) \alpha^n}{n}$ si $n \geq 1$. Comme il est clair que $\|f_n\|_{\infty, [0; \pi]} = \frac{|\alpha|^n}{n} : \sum_{n \geq 1} \frac{|\alpha|^n}{n}$ converge. On a donc convergence normale de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur le segment $[0; \pi]$ donc $\forall \alpha \in]-1; 1[$, $I(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n \alpha^n$ en notant $I_n = \int_0^\pi \frac{(-1)^{n+1} \cos^{n-1}(x)}{n} dx$. Ceci prouve que I est développable en série entière avec un rayon supérieur ou égal à 1.

Comme $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, par le changement de variable $x = \pi - t$ dans l'intégrale, on a $I_{2n} = 0$ et $I_{2n+1} = \frac{2W_{2n}}{2n+1}$ où $W_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2}$ est la classique intégrale de WALLIS. Ainsi, par STIRLING ou directement WALLIS, $|I_{2n+1}| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}$ et le rayon de convergence vaut 1 par croissances comparées.

5.15 a. Soit $x \in \mathbb{R}$ et la fonction $g_x :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_x(t) = \frac{t^{x-1} - 1}{\ln(t)}$. Clairement, g_x est continue sur $]0; 1[$. De plus, g_x est de signe constant sur $]0; 1[$: positive si $x < 1$ et négative si $x > 1$. On a $g_1 = 0$.

Si $x \neq 1$, comme $t^{x-1} - 1 = e^{(x-1)\ln(t)} - 1$ et que $\lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(t) = 0$, on a $t^{x-1} - 1 \underset{1^-}{\sim} (x-1)\ln(t)$ donc $g_x(t) \underset{1^-}{\sim} (x-1)$ et g_x se prolonge par continuité en 1 en posant $g_x(1) = x-1$ (et même si $x = 1$ d'ailleurs).

- Si $x = 1$, $g_1 = 0$ donc $f(1)$ existe et $f(1) = 0$.
- Si $x > 1$, $g_x(t) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{\ln(t)}$ donc g_x se prolonge par continuité en 0 en posant $g_x(0) = 0$. g_x est donc intégrable sur $]0; 1[$ car elle se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0; 1]$.
- Si $x < 1$, $g_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x} \ln(t)}$. Si $x > 0$, $g_x(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}\right)$ et, d'après RIEMANN, g_x est intégrable sur $]0; 1[$.

Par contre, si $x \leq 0$, $\forall t \in]0; 1[$, $\left| \frac{1}{t^{1-x} \ln(t)} \right| \geq \left| \frac{1}{t \ln(t)} \right|$ et $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ n'est pas intégrable sur $]0; 1[$ car elle admet pour primitive $t \mapsto \ln(|\ln(t)|)$ qui n'admet pas une limite finie en 0 : g_x n'est pas intégrable sur $]0; 1[$. Au final, le domaine de définition de f vaut $D = \mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{t^{x-1} - 1}{\ln(t)}$. Alors :

- (H₁) $\forall t \in]0; 1[$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- (H₂) $\forall x > 0$, l'application $g_x : t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0; 1[$ (on vient de le voir) et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = t^{x-1}$ est continue sur $]0; 1[$ par opérations.
- (H₃) Soit $a > 0$, $\forall x \in [a; +\infty[$, $\forall t \in]0; 1[$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = t^{x-1} \leq t^{a-1} = \varphi_a(t)$ et φ_a est continue et intégrable sur $]0; 1[$ (intégrales de RIEMANN).

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x > 0$, $f'(x) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$. Comme \mathbb{R}_+^* est un intervalle et que $f(1) = 0$, on a donc $\forall x > 0$, $f(x) = \ln(x)$.

5.16 a. $I(0) = 2 \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$. Cette intégrale converge car $h : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0; 1[$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $h(0) = 1$. De plus, $\forall t \in [0; 1[$, $h(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{n-1}}{n}$ (et même pour $t = 0$) connaissant le DSE de $\ln(1+t)$. Si on note $h_n(t) = \frac{(-1)^{n+1} t^{n-1}}{n}$, comme cette série converge par le CSSA pour $t \in [0; 1[$, on a $|R_n(t)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{t^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ donc $\|R_n\|_{\infty, [0; 1[} \leq \frac{1}{n+1}$

donc la convergence de $\sum_{n \geq 1} h_n$ est uniforme vers h sur l'intervalle borné $[0; 1[$. On peut donc intervertir ce qui donne $I(0) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{n-1} dt}{n} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 2\theta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (classique : termes pairs/impairs).

b. Soit $f : [0; \frac{\pi}{2}] \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(\alpha, t) = \int_0^1 \frac{\ln(1 + 2t \cos(\alpha) + t^2)}{t}$.

- $\forall t \in [0; 1], \alpha \mapsto f(\alpha, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- $\forall \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}], t \mapsto f(\alpha, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, t) = \frac{-2 \sin(\alpha)}{1 + 2t \cos(\alpha) + t^2}$ sont continues donc intégrables sur $[0; 1]$.
- $\forall (\alpha, t) \in [0; \frac{\pi}{2}] \times [0; 1], \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, t) \right| \leq 2 = \varphi(t)$ car $1 + 2t \cos(\alpha) + t^2 \geq 1$ et φ est intégrable sur $[0; 1]$.

Ainsi, la fonction I est de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et $I'(0) = 0$ clairement. Par contre, pour $\alpha \neq 0$, on a les

relations $I'(\alpha) = \int_0^1 \frac{-2 \sin(\alpha) dt}{1 + 2t \cos(\alpha) + t^2} = -2 \int_0^1 \frac{\sin(\alpha) dt}{\sin^2(\alpha) + (t + \cos^2(\alpha))^2} = -2 \left[\text{Arctan} \left(\frac{t + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right) \right]_0^1$.

Ainsi, puisque $\text{Arctan} \left(\frac{1 + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{2 \cos^2(\alpha/2)}{2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)} \right) = \text{Arctan} \left(\tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ et

$\text{Arctan} \left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right) = \text{Arctan} \left(\tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $I'(\alpha) = \pi - 2\alpha - \pi + \alpha = -\alpha$ (même si $\alpha = 0$).

Comme $[0; \frac{\pi}{2}]$ est un intervalle et que $I(0) = \frac{\pi^2}{6}$, on a $\forall \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}], I(\alpha) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\alpha^2}{2}$.

5.17 a. Soit $x \geq 0$, posons $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{x+t}$. Alors u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et le

crochet $[uv]_0^{+\infty}$ converge car $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ puisque $1 - \cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$. Ainsi les intégrales

$\int_0^{+\infty} u'v$ et $\int_0^{+\infty} uv'$ sont de même nature. Or uv' est continue en 0 si $x > 0$ et se prolonge par continuité en

0 si $x = 0$ car $u(t)v'(t) = -\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ donc uv' est intégrable sur $]0; 1]$. De plus $u(t)v'(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

donc uv' est intégrable sur $[1; +\infty[$. Par conséquent, uv' est intégrable sur \mathbb{R}_+^* , l'intégrale $\int_0^{+\infty} uv'$ converge

donc, tout comme $\int_0^{+\infty} u'v = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ (de même nature). De plus, comme le crochet est nul, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = - \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) \times \left(-\frac{1}{(x+t)^2} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} dt.$$

b. Soit maintenant $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2}$.

- $\forall t > 0, x \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- $\forall x \geq 0, t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (déjà vu avant).
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, |g(x, t)| = g(x, t) \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur \mathbb{R}_+^* (déjà vu avant).

On peut donc conclure par continuité sous le signe somme que f est continue sur \mathbb{R}_+ .

L'intégrale de DIRICHLET est $f(0)$ et vérifie $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

5.18 a. Si $x \neq 0$, $h : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x^2 + t^2)(1 + t^2)}}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $h(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc h est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Par contre, si $x = 0$, $h : t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{1 + t^2}}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et $h(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$ donc h n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

L'ensemble de définition de f est \mathbb{R}^* . f est clairement paire, il suffit d'étudier son aspect C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + t^2)(1 + t^2)}}$ de sorte que $\forall x \neq 0, f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$.

On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2 + t^2)^3(1 + t^2)}}$, puis $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{2x^2 - t^2}{\sqrt{(x^2 + t^2)^5(1 + t^2)}}$. Si on suppose, pour un

entier $k \geq 1$, que $\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) = \frac{P_k(x, t)}{\sqrt{(x^2 + t^2)^{2k+1}(1 + t^2)}}$ avec un polynôme P_k en deux variables de degré total

inférieur ou égal à k , $\frac{\partial^{k+1} g}{\partial x^{k+1}}(x, t) = \frac{(x^2 + t^2) \frac{\partial P_k}{\partial x}(x, t) - (2k+1)xP_k(x, t)}{\sqrt{(x^2 + t^2)^{2k+3}(1 + t^2)}} = \frac{P_{k+1}(x, t)}{\sqrt{(x^2 + t^2)^{2k+3}(1 + t^2)}}$ avec

$P_{k+1}(x, t) = (x^2 + t^2) \frac{\partial P_k}{\partial x}(x, t) - (2k+1)xP_k(x, t)$ qui est polynomial en x, t de degré inférieur ou égal à $k+1$.

Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (on vient de le voir) et toutes les fonctions $t \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t)$ sont continues sur \mathbb{R}_+^* .

Pour $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x \in [a; b]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, comme $t \mapsto P_k(x, t) = \sum_{i=0}^k Q_i(x)t^i$ est polynomiale de degré

inférieur à k (on peut être légèrement plus précis et montrer que P_k est homogène de degré total k), que

toutes les fonctions polynomiales Q_i sont bornées (car continues) sur le segment $[a; b]$ (par M_i), alors

$\forall t > 0, |P_k(x, t)| \leq \sum_{i=0}^k M_i t^i = U_k(t)$ donc $\left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \frac{U_k(t)}{\sqrt{(a^2 + t^2)^{2k+1}(1 + t^2)}} = \varphi_{k, [a; b]}(t) \underset{+\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$

donc $\varphi_{k, [a; b]}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Par un théorème du cours, f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* (donc sur \mathbb{R}^*).

b. Pour $x > 0$ on pose $t = x \operatorname{sh}(u) = \varphi(u)$ avec φ qui est C^1 , bijective, strictement croissante de $[0; \alpha]$ dans $[0; 1]$ où $\operatorname{sh}(\alpha) = \frac{1}{x}$. Ainsi, il vient $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2 + t^2}} = \int_0^\alpha \frac{x \operatorname{ch}(u)}{\sqrt{x^2 + x^2 \operatorname{sh}^2(u)}} = \alpha$ car $1 + \operatorname{sh}^2(u) = \operatorname{ch}^2(u)$.

Or $\operatorname{sh}(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = \frac{1}{x}$ donc, en posant $A = e^\alpha > 1$, on a $xA^2 - 2A - x = 0$. On résout et on trouve

$A = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$ donc $\alpha = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2 + t^2}} = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right)$ (mais Argsh est hors programme hein !).

c. $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(x^2 + t^2)(1 + t^2)}} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(x^2 + t^2)(1 + t^2)}} \geq \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(x^2 + t^2)(1 + t^2)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2 + t^2}}$

donc $f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right)$ et on déduit par encadrement que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

Évaluons la différence, $f(x) - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2 + t^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + t^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} - 1\right) dt + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(x^2 + t^2)(1 + t^2)}}$.

Or l'inégalité $\sqrt{(x^2 + t^2)(1 + t^2)} \geq t^2$ montre que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(x^2 + t^2)(1 + t^2)}} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$. De plus,

$\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} - 1 = \frac{-t^2}{(1 + \sqrt{1 + t^2})\sqrt{1 + t^2}}$ (avec la quantité conjuguée) donc $\left| \frac{1}{\sqrt{x^2 + t^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} - 1\right) \right| \leq t$ et

$\left| \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + t^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} - 1\right) dt \right| \leq \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$. Par conséquent, $f(x) - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2 + t^2}} = O(1)$ donc, comme

$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2 + t^2}} = +\infty$, on a l'équivalent intermédiaire $f(x) \underset{0}{\sim} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2 + t^2}}$.

Comme $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2 + t^2}} = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right) = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) - \ln(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) + o(1) \underset{0}{\sim} -\ln(x) + o(\ln(x))$,

on a donc $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2 + t^2}} \underset{0}{\sim} -\ln(x)$. Au final, on a $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

d. On sait que $\forall t > 0, x^2 + t^2 \geq 2tx$ donc $\forall x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(1+t^2)}} : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par encadrement. Mieux $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{xdu}{x\sqrt{(1+u^2)(1+x^2u^2)}} = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(\frac{1}{x^2} + u^2)}} = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ avec le changement de variable $t = xu$ donc, avec la question c., $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \left(-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\ln(x)}{x}$.

5.19 Pour tout réel x , la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt)$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $\operatorname{ch}(xt) = \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{2} = \underset{+\infty}{=} O(e^{|x|t})$ donc $e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t^2+|x|t}) = o(e^{-t})$ donc h_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ et H est bien définie sur \mathbb{R} .

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt)$, alors :

- $\forall t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
 - $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ (on vient de le faire).
 - $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = te^{-t^2} \operatorname{sh}(xt)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
 - Soit $a > 0$, on a la majoration $\forall x \in [-a; a], \forall t \geq 0, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2} \operatorname{sh}(at) = \varphi_a(t)$ et $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc la fonction φ_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ .
- On en déduit que H est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \operatorname{sh}(xt) dt$. On pose $u(t) = \operatorname{sh}(xt)$ et $v(t) = -\frac{e^{-t^2}}{2}$ de sorte que u et v sont C^1 sur \mathbb{R}_+ et $u(0)v(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, on a $H'(x) = -\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt) dt = \frac{x}{2} H(x)$. On intègre et $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{4}}$. Comme $H(0) = \lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, au final, $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}}}{2}$.

5.20 a. Soit $x \neq 0, f(x) = \int_0^x f'(u) du$ et on pose $u = tx = \varphi(t)$ pour que, par intégration par parties puisque φ est une bijection de classe C^1 et strictement monotone de $[0; 1]$ sur $[\widetilde{0}; x]$, on ait bien $f(x) = x \int_0^1 f'(tx) dt$.

b. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt = \int_0^1 r(x, t) dt$ en posant $r(x, t) = f'(tx)$. Alors :

- Pour $t \in [0; 1]$, la fonction $x \mapsto f'(tx)$ est C^1 sur \mathbb{R} car f est C^2 sur \mathbb{R} .
- Pour $x \in \mathbb{R}, t \mapsto f'(tx)$ est continue donc intégrable sur $[0; 1]$, $t \mapsto \frac{\partial r}{\partial x}(x, t) = tf''(tx)$ est continue sur $[0; 1]$.
- Pour $a > 0$, comme f'' est continue sur le segment $[-a; a], \exists M_a \geq 0, \forall y \in [-a; a], |f''(y)| \leq M_a$. Ainsi, pour $x \in [-a; a]$ et $t \in [0; 1]$, on a $\left| \frac{\partial r}{\partial x}(x, t) \right| \leq M_a = \varphi_a(t)$ avec φ_a continue donc intégrable sur $[0; 1]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, g est C^1 sur \mathbb{R} (car sur tout $[-a; a]$) et on a bien $g'(x) = \int_0^1 tf''(tx) dt$. Il existe $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xg(x)$ (même si $x = 0$ car $f(0) = 0$).

Plutôt que de recommencer à partir de l'expression de g , on va utiliser la relation de TAYLOR-reste intégral pour écrire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-u)f''(u) du = \int_0^x (x-u)f''(u) du$. Si $x \neq 0$, en posant le changement de variable $u = tx$ comme avant, on a $f(x) = x^2 \int_0^1 (1-t)f''(tx) dt$ (relation même pour $x = 0$).

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_0^1 (1-t)f''(tx) dt = \int_0^1 s(x, t) dt$ en posant $s(x, t) = (1-t)f''(tx)$:

- Pour $t \in [0; 1]$, la fonction $x \mapsto (1-t)f''(tx)$ est C^1 sur \mathbb{R} car f est C^3 sur \mathbb{R} .
- Pour $x \in \mathbb{R}, t \mapsto s(x, t)$ est continue donc intégrable sur $[0; 1]$ et $t \mapsto \frac{\partial s}{\partial x}(x, t) = t(1-t)f'''(tx)$ est continue.
- Pour $a > 0$, comme f''' est continue sur le segment $[-a; a], \exists T_a \geq 0, \forall y \in [-a; a], |f'''(y)| \leq T_a$. Ainsi, pour $x \in [-a; a]$ et $t \in [0; 1]$, on a $\left| \frac{\partial s}{\partial x}(x, t) \right| \leq T_a = \psi_a(t)$ avec ψ_a continue donc intégrable sur $[0; 1]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, h est C^1 sur \mathbb{R} (car sur tout segment $[-a; a]$) et on a bien $h'(x) = \int_0^1 t(1-t)f'''(tx)dt$. Ainsi, il existe bien $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2h(x)$.

Question intermédiaire : le graphe de la fonction f passe par $(0, 0)$ avec une tangente horizontale en ce point et est convexe (le graphe est au dessus de toutes ses tangentes). Comme f' est strictement croissante, on a par exemple $f'(1) > 0$ donc $\forall x \geq 1, f(x) - f(1) = f'(c)(x - 1)$ pour un $c \in]1; x[$ donc $f'(c) > f'(1)$ ce qui fait que $f(x) \geq f(1) + f'(1)(x - 1)$ (ceci traduit que le graphe de f est au-dessus de la tangente de f en $(1, f(1))$) mais comme $f'(1) > 0$, ceci impose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

c. Comme $f'' > 0$ et $t \mapsto 1 - t$ est positive sur $[0; 1]$ et ne s'annule qu'en 1, la fonction h définie comme ci-dessus est strictement positive (même en 0 où $h(0) = \frac{f''(0)}{2}$). Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x\sqrt{h(x)}$.

Par composée, comme $\sqrt{\cdot}$ est C^1 sur \mathbb{R}_+^* , φ est de classe C^1 sur \mathbb{R} ; $\varphi < 0$ sur \mathbb{R}_-^* et $\varphi > 0$ sur \mathbb{R}_+^* .

Comme f'' est strictement positive, la fonction f' est strictement croissante. Puisque $f'(0) = 0$, on a $f' < 0$ sur \mathbb{R}_-^* et $f' > 0$ sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi, f est positive sur \mathbb{R} et ne s'annule qu'en 0.

Si $x > 0$, $\varphi(x) = \sqrt{f(x)} > 0$, donc $\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} > 0$ et φ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Si $x < 0$, $\varphi(x) = -\sqrt{f(x)} < 0$, donc $\varphi'(x) = -\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} > 0$ et φ est aussi strictement croissante sur \mathbb{R}_-^* .

Par conséquent, φ est injective sur \mathbb{R} car strictement croissante. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$ donc, par continuité de φ , φ est surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Au final, φ définie comme ceci est de classe C^1 , réalise une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \varphi^2(x)$.

5.21 a. La fonction φ est continue sur \mathbb{R} , φ est paire et $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc φ est intégrable sur \mathbb{R}_+ , donc sur \mathbb{R} par parité : I existe. On connaît l'intégrale de GAUSS : $I = \sqrt{2\pi}$.

b. Méthode 1 : pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(t)e^{kt} = e^{-\frac{(t-k)^2}{2} + \frac{k^2}{2}}$. Comme avant, la fonction $t \mapsto \varphi(t)e^{kt}$ est continue sur \mathbb{R} et $\varphi(t)e^{kt} \underset{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\varphi(t)e^{kt} \underset{-\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{kt} dt$ converge.

En posant $t = h(u) = u + k$ dans cette intégrale, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{kt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + \frac{k^2}{2}} du = e^{\frac{k^2}{2}} I = e^{\frac{k^2}{2}} \sqrt{2\pi}$.

Méthode 2 : On pouvait aussi poser $f(k, t) = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{kt}$ de sorte que $g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{kt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k, t) dt$.

(H₁) Pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $k \mapsto f(k, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

(H₂) Pour $k \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(k, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R} car $e^{-\frac{t^2}{2}} e^{kt} \underset{\pm\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

De plus, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial k}(k, t) = te^{-\frac{t^2}{2}} e^{kt}$ est continue sur \mathbb{R} .

(H₃) Pour $a > 0$ et $(k, t) \in [-a; a] \times \mathbb{R}$, on a $\left| \frac{\partial f}{\partial k}(k, t) \right| \leq \varphi_a(t) = te^{-\frac{t^2}{2}} e^{a|t|}$. Comme φ_a est continue sur \mathbb{R} avec $\varphi_a(t) \underset{\pm\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, on peut donc dériver sous le signe somme.

La fonction g est donc C^1 sur \mathbb{R} et $g'(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} e^{kt} dt$. On effectue alors une intégration par parties

en posant $u(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $v(t) = e^{kt}$, u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(t)v(t) = 0$ donc on obtient

$g'(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{t^2}{2}} e^{kt} dt = kg(k)$. On intègre cette équation différentielle : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{R}, g(k) = \lambda e^{\frac{k^2}{2}}$.

Or $g(0) = I = \sqrt{2\pi} = \lambda$ donc $\forall k \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{kt} dt = \sqrt{2\pi} e^{\frac{k^2}{2}}$.

5.22 a. Soit $x > 0$ et $h_x : t \mapsto \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t^3 + t}}$. Alors h_x est continue sur \mathbb{R}_+^* et $h_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc h_x est intégrable sur $]0; 1]$. Comme $x > 0$, $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t}\right)$ donc h_x est intégrable sur $]1; +\infty[$ aussi donc $f(x)$ existe pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ définie par $g(x, t) = \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t^3 + t}}$.

- Pour tout $x > 0$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -2x\sqrt{t} \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t^2 + 1}}$.
- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (on vient de le voir).
- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- Soit $0 < a < b$, $x \in [a; b]$ et $t > 0$, alors $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2b\sqrt{t} \frac{e^{-ta^2}}{\sqrt{t^2 + 1}} = \varphi_{a,b}(t)$ et $\varphi_{a,b}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* car prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi_{a,b}(0) = 0$ et $\varphi_{a,b}(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $a > 0$.

Ainsi, par dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $f'(x) = -2x \int_0^{+\infty} \sqrt{t} \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$.

b. Pour $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ ($= \frac{\sqrt{\pi}}{x}$) en posant $t = \varphi(u) = \frac{u^2}{x^2}$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Comme la majorité de l'intégrale se fait au voisinage de 0 et que $\sqrt{t^3 + t} \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$, on estime la différence $f(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{x} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t^3 + t}} - \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t}} \right) dt = \int_0^{+\infty} h(t) e^{-tx^2} dt$ en posant $h(t) = \frac{1}{\sqrt{t^3 + t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}$. La fonction h est bornée sur \mathbb{R}_+^* car elle tend vers 0 en $+\infty$ et qu'elle se prolonge par continuité en 0 avec $h(0) = 0$ puisque $h(t) = -\frac{\sqrt{t^3 + t} - \sqrt{t}}{\sqrt{t^3 + t}\sqrt{t}} = -\left(\frac{\sqrt{1 + t^2} - 1}{t\sqrt{1 + t^2}} \right) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}$. Ainsi, $\exists M \geq 0, \forall t > 0, |h(t)| \leq M$ et $\forall x > 0, \left| f(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{x} \right| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dt = \frac{M}{x^2}$. Comme $f(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{x} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{x}\right)$, on a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{x}$.

5.23 a. Soit $x \in]-1; 1[$, alors $g_x : t \mapsto \frac{\ln(1 + xt)}{t}$ est continue sur $]0; 1]$ car $\forall t \in [0; 1], 0 < 1 - |x| \leq 1 + xt \leq 1 + |x|$.

Ainsi g_x est intégrable sur $]0; 1]$ car elle se prolonge par continuité en 0 en posant $g_x(0) = x$; c'est clair si $x = 0$ et si $x \neq 0$, $\ln(1 + xt) \underset{0}{\sim} xt$. Alors $g(x)$ est bien défini. Ainsi $] - 1; 1[\subset \mathcal{D}_g$.

b. Si $|x| < 1$, on a $|xt| < 1$ pour $t \in [0; 1]$ donc $\ln(1 + xt) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n t^n}{n}$. Ainsi $g(x) = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t) \right) dt$ avec $g_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = (-1)^{n-1} \frac{x^n t^{n-1}}{n}$ car $\forall t \in [0; 1], g_x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$. Comme $\|g_n\|_{\infty, [0; 1]} = \frac{|x|^n}{n}$ et que $\sum_{n \geq 1} \frac{|x|^n}{n}$ converge car $|x| < 1$, la série $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge normalement vers g_x sur le segment $[0; 1]$ donc on peut intervertir et avoir $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 g_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

c. En tant que somme d'une série entière de rayon $R \geq 1$, la fonction g est C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence $] - 1; 1[$ et $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$. On reconnaît, pour $x \in] - 1; 0[\cup]0; 1[$, $g'(x) = \frac{\ln(1 + x)}{x}$.

d. Posons $f :]0; 1[\times]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{\ln(1 + xt)}{t}$ de sorte que $g(x) = \int_0^1 f(x, t) dt$.

- Pour $x \in]0; 1[$, $t \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $]0; 1]$.
- Pour $t \in]0; 1]$, $t \mapsto f(x, t) = g_x(t)$ est continue et intégrable sur $]0; 1]$ (on vient de le voir). De plus, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{1 + xt}$ est continue sur $]0; 1]$.

• Pour $(x, t) \in]0; 1[\times]0; 1]$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 1 = \varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur $]0; 1]$.

Par dérivation sous le signe somme, g est C^1 sur $]0; 1[$ et $g'(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+xt} = \left[\frac{\ln(1+xt)}{x} \right]_0^1 = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Pourtant, la meilleure méthode est, pour $x \neq 0$, d'effectuer le changement de variable $t = \frac{u}{x}$ dans l'intégrale

$g(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} dt$ pour obtenir $g(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u} du$ et tout devient limpide par le théorème fondamental de l'intégration car $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ est continue sur $] -1; 1[$.

5.24 a. D'abord, si $x > 0$, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{t^{-x}}{1+t}$ est continue sur $[1; +\infty[$. De plus, $g_x(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}$ donc

$\int_1^{+\infty} g_x$ converge d'après RIEMANN car $x+1 > 1$. Ainsi f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

Soit $0 < x < y$, alors $\forall t \geq 1$, $\frac{t^{-y}}{1+t} \leq \frac{t^{-x}}{1+t}$ qu'on intègre sur $[1; +\infty[$ pour avoir $f(y) \leq f(x)$ et f est bien décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{t^{-x}}{1+t}$.

• $\forall t \geq 1$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

• $\forall x > 0$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur $[1; +\infty[$ (on vient de le faire).

• Soit $a > 0$, $\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times [1; +\infty[$, $|g(x, t)| \leq \frac{t^{-a}}{1+t} = g_a(t)$ et g_a est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme : f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

b. $\int_1^x \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{dt}{1+t} = [\ln(t) - \ln(1+t)]_1^x = \ln(2) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ en décomposant en éléments simples donc $f(1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t(1+t)} = \ln(2)$.

c. Pour $x > 0$, on a $f(x+1) + f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x} + t^{-x-1}}{1+t} dt = \int_1^{+\infty} t^{-x-1} dt = \left[-\frac{t^{-x}}{x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}$.

Comme f est continue en 1, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x+1) = f(1) \in \mathbb{R}$. Comme $f(x) = \frac{1}{x} - f(x+1) = \frac{1}{x} + O(1)$, on a $f(x) \sim_0 \frac{1}{x}$.

d. Comme f est positive et décroissante, elle possède une limite $\ell \geq 0$ en $+\infty$. On passe à la limite dans la relation $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}$ et on a $2\ell = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. De plus, toujours par décroissance de f :

$\forall x > 1$, $\frac{1}{x} = f(x+1) + f(x) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1) = \frac{1}{x-1}$. Ainsi $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{2x}$.

e. $\forall t > 1$, $\frac{1}{1+t} = \frac{1}{t} \times \frac{1}{1+\frac{1}{t}} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t^n}$, donc $g_x(t) = \frac{t^{-x}}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ où $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{-n-1-x}$. La

série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers g_x sur $]1; +\infty[$, la fonction g_x est continue sur $]1; +\infty[$ et les fonctions

f_n sont continues et intégrables sur $]1; +\infty[$ mais $\int_1^{+\infty} |f_n| = \left[-\frac{t^{-n-x}}{n+x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n+x}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+x}$ diverge donc pas de TITT !!! On n'est pas sur un segment donc même une convergence uniforme ne suffirait pas.

Posons $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{-k-1-x}$. $(S_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers g_x sur $]1; +\infty[$, les S_n et g_x sont

continues sur $]1; +\infty[$ et $|S_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{-k-1-x} \right| = \left| \frac{t^{-1-x}(1 - (-t^{-1})^{n+1})}{1+t^{-1}} \right| \leq \varphi(t) = \frac{2t^{-x}}{1+t} = 2g_x(t)$

pour $t > 1$ et $n \geq 0$ et on sait que g_x est intégrable sur $]1; +\infty[$. Par le théorème de convergence dominée, on a donc $\int_1^{+\infty} g_x(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} S_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_1^{+\infty} (-1)^k t^{-k-1-x} dt$ ce qui revient à la relation

$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$. Par exemple, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} = [\text{Arctan}(\sqrt{t})]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$.

5.25 a. Soit $g_x : t \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t}$. La fonction g_x est continue sur \mathbb{R}_+ et, par croissance comparée, $g_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

donc g_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ et $F(x)$ existe bien pour $x > 0$.

b. Pour $t \geq 0$ et $0 < x < y$, on a $e^{-yt^2} \leq e^{-xt^2}$ donc $g_y(t) \leq g_x(t)$ qu'on intègre sur \mathbb{R}_+ pour établir que $F(y) \leq F(x)$ donc F est décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t}$.

- Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ (on vient de le voir) et la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

- Soit $a > 0$, $\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at^2}}{1+t} = \varphi_a(t)$ et φ_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car, par croissances comparées toujours, $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{\sim} t e^{-at^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t} dt$.

c. Soit $x > 0$, par positivité de g_x , $F(x) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt^2}}{1+t} dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t} dt \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt^2}}{1+t} dt$. Pour $t \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$, $\frac{e^{-xt^2}}{1+t} \geq \frac{1}{e(1+t)}$ donc $F(x) \geq \frac{1}{e} \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{e} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty$.

d. Pour $x > 0$, on a $0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{4x}}$ en posant $t = \varphi(u) = \frac{u}{\sqrt{x}}$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0. \text{ Or } \left| F(x) - \sqrt{\frac{\pi}{4x}} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt^2}}{1+t} dt \leq \int_0^{+\infty} te^{-xt^2} dt = \left[-\frac{e^{-tx^2}}{2x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2x}.$$

Ainsi $F(x) - \sqrt{\frac{\pi}{4x}} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, donc $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4x}}$.

Soit $x > 0$, on pose à nouveau $t = \frac{u}{\sqrt{x}}$ pour avoir $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u} du$ qu'on décompose par CHASLES

pour écrire $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u} du + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u} du$. Or $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u} du \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} du$ donc

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u} du \underset{0}{=} O(1)$ alors que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty$ donc $F(x) \underset{0}{\sim} \int_0^1 \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u} du$. On se rend compte que

c'est en 0 que cette intégrale est grande ce qui nous conduit, puisque $e^{-u^2} \underset{0}{\sim} 1$, à estimer la différence

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+u} du - \int_0^1 \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u} du = \int_0^1 \frac{1-e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u} du \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-u^2}}{u} du \text{ (cette dernière intégrale converge car } \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{-u^2}}{u} = 0 \text{ par DL. Ainsi, } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+u} du - \int_0^1 \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u} du \underset{0}{=} O(1) \text{ donc, toujours puisque}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+u} du = +\infty$, on a $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+u} du \underset{0}{\sim} \int_0^1 \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u} du = \left[\ln(\sqrt{x}+u) \right]_0^1 = \ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)$. Or

$$\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{\ln(x)}{2} + \ln(1+\sqrt{x}) \underset{0}{\sim} -\frac{\ln(x)}{2} + o(1) \underset{0}{\sim} -\frac{\ln(x)}{2}. \text{ Par conséquent, } F(x) \underset{0}{\sim} -\frac{\ln(x)}{2}.$$

5.26 a. Soit $x > -1$, alors la fonction $h_x : t \mapsto \frac{(t-1)t^x}{\ln(t)}$ est continue sur $]0; 1[$, elle se prolonge par continuité en

1 avec $h_x(1) = 1$ car $\ln(t) \underset{1}{\sim} t-1$. De plus, $\frac{(t-1)t^x}{\ln(t)} \underset{0}{\sim} o\left(\frac{1}{t^{-x}}\right)$ car $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$. Ainsi, par RIEMANN

car $-x < 1$, la fonction h_x est intégrable sur $]0; 1[$ et f est bien définie sur $D =]-1; +\infty[$.

b. Soit $g : D \times]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{(t-1)t^x}{\ln(t)}$. Alors :

- Pour $t \in]0; 1[$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur D .
- Pour $x \in D$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0; 1[$ (on vient de le voir).
- Pour $x \in D$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = (t-1)t^x$ est continue sur $]0; 1[$.
- Pour $a > -1$, $x \in [a; +\infty[$ et $t \in]0; 1[$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq (1-t)t^a = f_a(t)$ et f_a est intégrable sur $]0; 1[$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme : f est C^1 sur D et $\forall x > -1$, $f'(x) = \int_0^1 (t^{x+1} - t^x) dt$.

c. Ainsi, $\forall x > -1$, $f'(x) = \left[\frac{t^{x+2}}{x+2} - \frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$ donc, comme $]0; 1[$ est un intervalle, il existe une constante C telle que $\forall x \in]0; 1[$, $f(x) = \ln(x+2) - \ln(x+1) + C$. La fonction h_0 se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0; 1]$ ($h_0(0) = 0$ et $h_0(1) = 1$) donc elle y est bornée (par M) et on a $0 \leq f(x) \leq M \int_0^1 t^x dt = \frac{M}{x+1}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Ainsi $C = 0$ et $\forall x \in D$, $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$. On peut même prendre $M = 1$ car $\forall t > 0$, $\ln(t) \leq t-1$ d'où $\forall t \in]0; 1[$, $\ln(t) \leq t-1 \leq 0$ donc $0 \leq h_0(t) = \frac{(t-1)}{\ln(t)} \leq 1$.

5.27 a. $t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0; 1]$ donc $g(x)$ existe. De plus, $g(0) = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

$\forall t \in [0; 1]$, $0 \leq \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-x^2}}{1+t^2} \leq e^{-x^2}$. En intégrant, $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

b. Soit $f : \mathbb{R}_+ \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$.

- Clairement $\forall t \in [0; 1]$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ .
- $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$ sont continues donc intégrables sur le segment $[0; 1]$.
- Enfin, $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0; 1]$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = | -2xe^{-(1+t^2)x^2} | \leq 2xe^{-x^2}$. Or $\psi : x \mapsto 2xe^{-x^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0$ par croissances comparées donc ψ est bornée sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, si $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0; 1]$, on a

$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \|\psi\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \varphi(t)$. Comme φ est continue et intégrable sur $[0; 1]$, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme : g est C^1 sur \mathbb{R}_+ et $\forall x \geq 0$, $g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2 x^2} dt$. Si $x > 0$, après le changement de variable $t = u/x = \varphi_x(u)$ avec φ_x bijection strictement croissante de classe C^1 de $[0; x]$ dans $[0; 1]$, on a $g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$. Si $x = 0$, cette relation est aussi vraie car $g'(0) = 0$.

Par le théorème fondamental de l'intégration, comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ , on a h de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et $\forall x \geq 0$, $h'(x) = e^{-x^2}$. Par conséquent : $\forall x \geq 0$, $g'(x) + 2h'(x)h(x) = 0$.

c. On intègre et, comme \mathbb{R}_+ est un intervalle et que $g(0) = \pi/4$ et $h(0) = 0$, $\forall x \geq 0$, $g(x) + h(x)^2 = \pi/4$. Mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ d'après a. donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)^2 = \pi/4$ en passant à la limite dans la relation précédente.

Comme h est positive, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ (on retrouve l'intégrale de GAUSS).

d. D'après le théorème de la limite monotone, a admet une limite en $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, or $\int_0^{+\infty} a$ converge donc cette limite ne peut être que 0. Comme a est décroissante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 0$, a est donc positive sur \mathbb{R}_+ .

e. Comme a est décroissante, pour $t > 0$ fixé et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_{kt}^{(k+1)t} a(x) dx \leq ta(kt) \leq \int_{(k-1)t}^{kt} a(x) dx$ donc, en sommant ces inégalités pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\frac{1}{t} \int_t^{(n+1)t} a(x) dx \leq S_n(t) = \sum_{k=1}^n a(kt) \leq \frac{1}{t} \int_0^{nt} a(x) dx$.

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} a(x) dx$ converge et que a est positive, on a donc $S_n(t) \leq \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} a(x) dx$ donc la suite $(S_n(t))_{n \geq 1}$ est croissante et majorée donc elle converge, ce qui se traduit par : $\sum_{n \geq 1} a(nt)$ converge.

À la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, $\forall t > 0$, $\frac{1}{t} \int_t^{+\infty} a(x) dx \leq S(t) \leq \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} a(x) dx$.

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{+\infty} a(x) dx = \int_0^{+\infty} a(x) dx > 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} tS(t) = \int_0^{+\infty} a(x) dx$ par encadrement car $\int_t^{+\infty} a(x) dx \leq tS(t) \leq \int_0^{+\infty} a(x) dx$. Ainsi, $S(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} a(x) dx$.

f. Comme la suite $(x^{n^2})_{n \geq 1}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq 1$, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} x^{n^2}$ vaut $R = 1$. Soit $x \in]0; 1[$, $x^{n^2} = e^{n^2 \ln(x)} = e^{-n^2 |\ln(x)|}$, on définit $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $a(u) = e^{-u^2}$.

Alors d'après **c.**, $\int_0^{+\infty} a(u) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par conséquent, $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n\sqrt{|\ln(x)|}) = S(\sqrt{|\ln(x)|})$. Or

d'après **e.**, $S(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2t}$. Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{|\ln(x)|} = 0$, en composant, $S(\sqrt{|\ln(x)|}) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{|\ln(x)|}}$.

5.28 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : \theta \mapsto \frac{\text{Arctan}(x \tan(\theta))}{\tan(\theta)}$ est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = x$ car $\text{Arctan}(u) = u + o(u)$. De plus, si $x = 0$, $f = 0$ donc $F(0)$ existe. Si $x \neq 0$, comme $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{Arctan}(t) = \pm \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2^-} \tan(\theta) = +\infty$, on a $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2^-} \frac{1}{\tan(\theta)} = 0$ donc $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2^-} f_x(\theta) = 0$ et f_x se prolonge aussi par continuité en $\frac{\pi}{2}$ en posant $f_x(\frac{\pi}{2}) = 0$. Ainsi, $F(x) = \int_0^{\pi/2} f_x$ existe car f_x est finalement continue sur le segment $[0; \frac{\pi}{2}]$. Le domaine de définition de F est donc \mathbb{R} .

b. Soit $f : \mathbb{R} \times]0; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, \theta) = \frac{\text{Arctan}(x \tan(\theta))}{\tan(\theta)}$.

- Pour $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$, la fonction $x \mapsto f(x, \theta)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} comme Arctan .

- Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\theta \mapsto f(x, \theta)$ est continue et intégrable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ (voir ci-dessus) et la fonction $\theta \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, \theta) = \frac{1}{1+x^2 \tan^2(\theta)}$ est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

- Pour $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times]0; \frac{\pi}{2}[$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \theta) \right| \leq 1 = \varphi(\theta)$ avec φ continue et intégrable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+x^2 \tan^2(\theta)}$.

On pose $\theta = \text{Arctan}(u) = \varphi(u)$ avec φ de classe C^1 , bijective et strictement croissante de \mathbb{R}_+^* dans $]0; \frac{\pi}{2}[$, ce qui donne par changement de variable $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+x^2 u^2)}$. Si $x > 0$ et $x \neq 1$,

on a $F'(x) = \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} - \frac{x^2}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+x^2 u^2}$ (les deux intégrales convergent). Par conséquent,

$F'(x) = \frac{1}{1-x^2} [\text{Arctan}(u)]_0^{+\infty} - \frac{x}{1-x^2} [\text{Arctan}(xu)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2(1+x)}$ après simplification. Comme F est de

classe C^1 sur \mathbb{R} , $F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F'(x) = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2(1+1)}$. Ainsi, $\forall x > 0$, $F'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$. On intègre sur l'intervalle \mathbb{R}_+ sachant que $F(0) = 0$ et que F est continue sur \mathbb{R}_+ , cela donne $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$.

Comme F est clairement impaire, on a $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $F(x) = -F(-x) = -\frac{\pi}{2} \ln(1-x)$.

5.29 a. Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $]0; 1[$ par opérations. Comme $t \mapsto t^x f(t)$ est continue en 1, $f_x(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$. Par hypothèse, $f_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{a}{t^{-\alpha-x}}$ avec $a \neq 0$ donc f_x est intégrable sur $]0; \frac{1}{2}]$ si et seulement si $-\alpha - x < 1 \iff x > -\alpha - 1$ d'après RIEMANN.

Comme f_x garde un signe constant au voisinage de 0, $\int_0^{1/2} f_x$ existe si et seulement si $x > -\alpha - 1$. Ainsi, le

domaine de définition de g est $I =]-\alpha - 1; +\infty[$.

b. Soit $h : I \rightarrow]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}$.

- Pour $t \in]0; 1[$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur I .
- Pour $x \in I$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue et intégrable sur I (déjà fait).
- Pour $b > -\alpha - 1$ et $(x, t) \in [b; +\infty[\times]0; 1[$, on a $|h(x, t)| \leq \frac{t^b |f(t)|}{\sqrt{1-t}} = \varphi_b(t)$ et φ_b est continue et intégrable sur $]0; 1[$ car $\varphi_b(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ et $\varphi_b(t) \underset{0}{\sim} \frac{|a|}{t^{-\alpha-b}}$ comme avant. Par théorème, g est continue sur I .

c. Reprenons avec la même fonction h .

- Pour $t \in]0; 1[$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur I .
- Pour $x \in I$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue et intégrable sur I et $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{t^x f(t) \ln(t)}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $]0; 1[$.
- Pour $b > -\alpha - 1$ et $(x, t) \in [b; +\infty[\times]0; 1[$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t^b |f(t)| |\ln(t)|}{\sqrt{1-t}} = \psi_b(t)$ et ψ_b est continue et intégrable sur $]0; 1[$ car $\psi_b(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{=} O\left(\frac{-\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc $\lim_{t \rightarrow 1^-} \psi_b(t) = 0$ car $-\ln(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (t-1)$ et, si on choisit $-\alpha - b < \gamma < 1$, on a $\psi_b(t) \underset{0}{\sim} \frac{|a| |\ln(t)|}{t^{-\alpha-b}} = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$.

Ainsi, par dérivabilité sous le signe somme, g est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I$, $g'(x) = \int_0^1 \frac{t^x f(t) \ln(t)}{\sqrt{1-t}} dt$.

- d.** Supposons que $a > 0$, alors par définition de la limite, $\exists \beta > 0$, $\forall t \in]0; \beta]$, $f(t) \geq \frac{at^\alpha}{2}$. Ainsi, pour $x > -\alpha - 1$, $g(x) = \int_0^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt = \int_0^\beta \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt + \int_\beta^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt \geq \int_0^\beta \frac{at^x t^\alpha}{2\sqrt{1-t}} dt + \int_\beta^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt$. Or $\forall t \in]0; \beta]$, $\frac{1}{\sqrt{1-t}} \geq 1$ donc $g(x) \geq \frac{a}{2} \int_0^\beta at^{x+\alpha} dt + \int_\beta^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt = \frac{a\beta^{x+\alpha+1}}{2(x+\alpha+1)} + \int_\beta^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt$. Or $\left| \int_\beta^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt \right| \leq \|f\|_{\infty, [\beta; 1]} \int_\beta^1 t^x dt = \|f\|_{\infty, [\beta; 1]} \text{Max}(1, \beta^x)$ (traiter selon que $x < 0$ ou $x \geq 0$ sachant que $\beta < 1$) donc $\int_\beta^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt \underset{x \rightarrow -\alpha-1}{=} O(1)$. Par contre, $\lim_{x \rightarrow (-\alpha-1)^+} \frac{a\beta^{x+\alpha+1}}{2(x+\alpha+1)} = +\infty$. Ainsi, par minoration, $\lim_{x \rightarrow -\alpha-1} g(x) = +\infty$. Bien sûr, par symétrie, si $a < 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -\alpha-1} g(x) = -\infty$.

5.30 a. Soit $x \geq 0$, $f_x : t \mapsto \frac{\ln(x+t)}{1+t^2}$ est continue donc intégrable sur $[0; 1]$ si $x > 0$ et f_0 est continue sur $]0; 1]$ avec $f_0(t) \underset{0}{\sim} \ln(t) = o(1/\sqrt{t})$ donc f_0 est intégrable sur $]0; 1]$. Ainsi, f est bien définie sur \mathbb{R}_+ .

Soit $h : \mathbb{R}_+ \times]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{\ln(x+t)}{1+t^2}$.

- Pour $t \in]0; 1]$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
- Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $]0; 1]$.
- Soit $a > 0$ et $(x, t) \in [0; a] \times]0; 1]$, alors $t \leq x+t \leq a+t$ donc $\ln(t) \leq \ln(x+t) \leq \ln(a+t)$ donc, en passant aux valeurs absolues, cela donne $|\ln(x+t)| \leq \text{Max}(|\ln(t)|, |\ln(a+t)|) \leq |\ln(t)| + |\ln(a+t)|$. Ainsi, $\left| \frac{\ln(x+t)}{1+t^2} \right| \leq |\ln(t)| + |\ln(a+t)| = \varphi_a(t)$. Or, $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0; 1]$ car $\ln(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $t \mapsto |\ln(a+t)|$ est continue donc intégrable sur $[0; 1]$. Par théorème, f est continue sur \mathbb{R}_+ .

- b.** Soit $x \geq 1$, alors $\forall t \in [0; 1]$, $0 \leq \ln(x) \leq \ln(x+t) \leq \ln(x+1)$ donc, en intégrant cette inégalité, on a $\ln(x) \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \leq f(x) \leq \ln(x+1) \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ d'où $\frac{\pi \ln(x)}{4} \leq f(x) \leq \frac{\pi \ln(x+1)}{4}$. Comme on a classiquement $\ln(x+1) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} \ln(x) + o(1)$, on a $\ln(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi \ln(x)}{4}$.

c. On peut montrer l'inégalité $\forall x \in [0; 1], x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. Ainsi, avec $\ln(x+t) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{t}{x}\right)$, dès que $x \geq 1, \forall t \in [0; 1], \frac{t}{x} \in [0; 1]$ donc $\ln(x) + \frac{t}{x} - \frac{t^2}{2x^2} \leq \ln(x+t) \leq \ln(x) + \frac{t}{x}$. En intégrant, on trouve $\frac{\pi \ln(x)}{4} + \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt - \frac{1}{2x^2} \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt \leq f(x) \leq \frac{\pi \ln(x)}{4} + \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt$ donc il vient $\frac{\pi \ln(x)}{4} + \frac{\ln(2)}{2x} - \frac{1 - (\pi/4)}{2x^2} \leq f(x) \leq \frac{\pi \ln(x)}{4} + \frac{\ln(2)}{2x}$ ce qui prouve bien que $f(x) = \frac{\pi}{4} \ln(x) + \frac{\ln(2)}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

5.31 a. Soit $x > 0$, la fonction $h_x : t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $h_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ou $h_x(t) = o(e^{-tx})$ donc h_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ par RIEMANN. Ainsi, la fonction f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

Soit $x > 0$, les fonctions $u : t \mapsto \sin(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[x; +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ donc la nature de $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ est la même que celle de $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$. Or $\frac{\sin(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[x; +\infty[$ donc $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ converge, ainsi $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ converge aussi. De même avec $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t} : \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge. On en déduit que g est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

b. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$.

- Pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ (voir ci-dessus). De plus, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}$ sont continues sur \mathbb{R}_+ .

- Pour $a > 0$ et $(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+$, on a la majoration $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{te^{-at}}{1+t^2} \leq e^{-at} = \varphi_a(t)$ et aussi $\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2} \leq e^{-at} = \varphi_a(t)$ et la fonction φ_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi, par théorème, la fonction f est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* et $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} dt$ par LEIBNIZ. Par conséquent, $f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} + \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

Comme les fonctions $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ et $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sont continues sur \mathbb{R}_+^* et que pour tout $x > 0$, on a $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t} dt$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$, il vient $g'(x) = \frac{\cos(x)\sin(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt \right) \cos(x) - \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \right) \sin(x)$ par le théorème fondamental de l'intégration donc $g'(x) = -\left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt \right) \cos(x) - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \right) \sin(x)$. De même, g' est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $g''(x) = \frac{\cos^2(x)}{x} + \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt \right) \sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \right) \cos(x)$ donc $g''(x) = \frac{1}{x} - g(x)$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Par conséquent, les fonctions f et g sont C^2 sur \mathbb{R}_+^* et solutions sur \mathbb{R}_+^* de (E) : $y'' + y = 1/x$.

c. La fonction $h = f - g$ est de classe C^2 par opérations et $h'' = f'' - g'' = -f + \frac{1}{x} + g - \frac{1}{x} = -(f - g) = -h$ donc $h'' + h = 0$ sur \mathbb{R}_+^* . On sait qu'alors $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x > 0, h(x) = A \cos(x) + B \sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x + \theta)$. Or $0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$ car $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$. Par encadrement, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. En tant que "reste" d'intégrales convergentes, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = 0$ donc, comme

cos et sin sont bornées, on a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ ce qui impose $\sqrt{A^2 + B^2} = 0$ donc $A = B = 0$. On déduit donc $f = g$ du fait que $h = 0$.

Avec les notations de la question **b.**, comme $\forall x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $|h(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \psi(t)$ et que ψ est intégrable sur \mathbb{R}_+ , la fonction f est continue sur \mathbb{R}_+ par continuité sous le signe somme car $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, $f(0) = [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

En écrivant $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt + \int_x^1 \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt + \int_x^1 \frac{\cos(t) - 1}{t} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} dt$, comme $\int_x^1 \frac{\cos(t) - 1}{t} dt = O(1)$ car $t \mapsto \frac{\cos(t) - 1}{t}$ est bornée sur \mathbb{R}_+ , on trouve $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt \sim -\ln(x)$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$.

5.32 a. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{\cos(xt)}{1+t^2} e^{-\beta t}$.

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} .
- Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ et, comme $f_x(t) = o(e^{-\beta t})$, la fonction f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ par comparaison car $\beta > 0$. De plus, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{t \sin(xt)}{1+t^2} e^{-\beta t}$ et

$t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{t^2 \cos(xt)}{1+t^2} e^{-\beta t}$ sont continues sur \mathbb{R}_+ .

- Soit $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{1+t^2} e^{-\beta t} \leq e^{-\beta t}$ et $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2}{1+t^2} e^{-\beta t} \leq e^{-\beta t} = \varphi(t)$

où la fonction φ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ . Par théorème, I_β est donc de classe C^2 sur \mathbb{R} et $I_\beta''(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \cos(xt)}{1+t^2} e^{-\beta t} dt$. Ainsi, $I_\beta''(x) - I_\beta(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \cos(xt)}{1+t^2} e^{-\beta t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} e^{-\beta t} dt$ d'où

$I_\beta''(x) - I_\beta(x) = -\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-\beta t} dt = -\text{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-\beta)t} dt \right) = -\text{Re} \left(\left[\frac{e^{(ix-\beta)t}}{ix-\beta} \right]_0^{+\infty} \right) = -\frac{\beta}{\beta^2 + x^2}$. **b.**

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = -\frac{\beta e^{-t}}{\beta^2 + t^2}$. Alors h est continue sur \mathbb{R} et intégrable sur $[x; +\infty[$ pour tout

x car $h(t) = o(e^{-t})$. Par conséquent, pour $x \in \mathbb{R}$, $F_\beta(x)$ est défini et $F_\beta(x) = \int_0^{+\infty} h(t) dt - \int_0^x h(t) dt$. Par

le théorème fondamental de l'intégration, F_β est C^1 sur \mathbb{R} et $F_\beta'(x) = -h(x)$. Comme h est aussi C^1 sur \mathbb{R} par opérations, F_β est C^2 sur \mathbb{R} et $F_\beta''(x) = -h'(x)$. Par opérations toujours, J_β est de classe C^2 sur \mathbb{R} et

$J_\beta'(x) = \frac{1}{2} \left(e^x F_\beta(x) - e^x h(x) - e^{-x} F_\beta(-x) + e^{-x} h(-x) \right) = \frac{1}{2} \left(e^x F_\beta(x) - e^{-x} F_\beta(-x) \right)$. On dérive à nouveau et

$J_\beta''(x) = \frac{1}{2} \left(e^x F_\beta(x) - e^x h(x) + e^{-x} F_\beta(-x) - e^{-x} h(-x) \right) = J_\beta(x) - \frac{\beta}{\beta^2 + x^2}$ donc $J_\beta''(x) - J_\beta(x) = -\frac{\beta}{\beta^2 + x^2}$.

La fonction $H_\beta = I_\beta - J_\beta$ est donc de classe C^2 par somme et, par linéarité de la dérivée seconde, elle est solution de $y'' - y = 0$. On sait qu'alors $\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $H_\beta(x) = I_\beta(x) - J_\beta(x) = Ae^x + Be^{-x}$.

Comme $J_\beta(0) = F_\beta(0) = -\int_0^{+\infty} \frac{\beta e^{-t}}{\beta^2 + t^2} dt$, par le changement de variable $t = \beta u = \psi(u)$ avec ψ qui réalise

une bijection de classe C^1 de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ , $J_\beta(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} e^{-\beta u} du = I_\beta(0)$ donc $H_\beta(0) = 0$ et $A+B = 0$.

Mais $I_\beta'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} e^{-\beta t} dt$ donc $I_\beta'(0) = 0$. De plus, $J_\beta'(0) = \frac{1}{2} \left(e^0 F_\beta(0) - e^{-0} F_\beta(0) \right) = 0$ donc

$H_\beta'(0) = 0$ ce qui impose $A = B$. Au final, $A = B = 0$ donc $H_\beta = 0$ et on a bien $I_\beta = J_\beta$.

5.33 a. Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x, t) = \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-xt}$.

(H₁) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

(H₂) Pour tout $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

(H₃) Pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, on a $|f(x, t)| \leq \varphi(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ et φ est continue sur \mathbb{R}_+^* avec $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \frac{1}{2}$ par développements limités et $\varphi(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc φ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction F est continue sur \mathbb{R}_+ . Continuons :

(H₁) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* .

(H₂) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (fait ci-dessus).

(H₃) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-xt}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* car elle se prolonge par continuité en 0 (elle tend vers 0) et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = O(e^{-xt}) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

(H₄) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = (1 - \cos(t))e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

(H₅) Soit $a > 0$, pour $(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \theta_a(t) = 2e^{-at}$. Or θ_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (intégrale de référence).

On déduit du théorème de dérivation sous le signe somme généralisé que F est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* . Avec la formule de LEIBNIZ, $\forall x > 0$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - 1}{t} e^{-xt} dt$ et $F''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) e^{-xt} dt$.

b. Les fonctions $\varphi : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ et $\psi : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t}$ sont continues sur \mathbb{R}_+^* , admettent des limites finies en 0 et tendent vers 0 en $+\infty$ donc, classiquement, elles sont bornées sur \mathbb{R}_+ . Pour $x > 0$, par inégalité de la moyenne (tout converge), on a $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} |\varphi(t)| e^{-xt} dt \leq \|\varphi\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{\|\varphi\|_{\infty, \mathbb{R}_+}}{x}$. De même, comme $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-xt} dt$ et $F''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) e^{-xt} dt$, on a $|F'(x)| \leq \frac{\|\psi\|_{\infty, \mathbb{R}_+}}{x}$ et $|F''(x)| \leq \frac{2}{x}$ car $0 \leq 1 - \cos(t) \leq 2$. Par encadrement, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F''(x) = 0$.

On pouvait aussi utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu, mais c'est plus long !

c. Pour $x > 0$, on a $F''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) e^{-xt} dt = \frac{1}{x} - \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{it-xt} dt \right) = \frac{1}{x} - \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x} \right]_0^{+\infty} \right)$ donc $F''(x) = \frac{1}{x} - \operatorname{Re} \left(\frac{1}{x-i} \right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$. On intègre sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* et il existe une constante

$C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $F'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) + C$. Comme on sait que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) = 0$, on trouve $C = 0$. On intègre à nouveau et on trouve classiquement

$F(x) = x \ln(x) - x - \frac{x \ln(1+x^2)}{2} + x - \operatorname{Arctan}(x) + K = K - \frac{x}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \operatorname{Arctan}(x)$ avec $K \in \mathbb{R}$. Comme

on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, on trouve $K = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall x > 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} + x \ln(x) - x \ln(\sqrt{1+x^2}) - \operatorname{Arctan}(x)$.

Comme F est continue en 0, on a $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = K = \frac{\pi}{2}$ par croissances comparées. On effectue dans

$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ une intégration par parties en posant $u(t) = 1 - \cos(t)$ et $v(t) = -\frac{1}{t}$, u et v sont

C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ donc $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ (DIRICHLET).

5.34 a. Soit $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = t^x e^{-t}$.

• $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

• $\forall x \geq 0$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et se prolonge par continuité en 0 car $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(x, t) = 1$

si $x = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(x, t) = 0$ si $x > 0$. De plus, $t^x e^{-t} = o(1/t^2)$ donc cette fonction est intégrable sur \mathbb{R}_+^* ce

qui justifie déjà l'existence de la fonction f .

• Soit $a > 0$, alors $\forall (x, t) \in [0; a] \times \mathbb{R}_+^*$, $|h(x, t)| \leq \varphi_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 1 \\ t^a e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$. Or φ_a est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R}_+ car $\varphi_a(t) = o(1/t^2)$ comme ci-dessus.

Au final, par continuité sous le signe somme, f est bien définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

b. Comme $u \mapsto \ln(f(u))$ est continue sur \mathbb{R}_+ car f est strictement positive sur son ensemble de définition, définissons $\varphi : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \int_{x-1}^x \ln(f(u)) du$. Par le théorème fondamental de l'intégration, φ est dérivable sur $[1; +\infty[$ et $\varphi'(x) = \ln(f(x)) - \ln(f(x-1))$. Or, si $x \geq 1$, en posant $u : t \mapsto t^x$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ qui sont C^1 sur \mathbb{R}_+^* dans l'intégrale $f(x)$, comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$, on a $f(x) = 0 + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x f(x-1)$. Ainsi, $\forall x \geq 1$, $\varphi'(x) = \ln(x) \geq 0$. Comme $[1; +\infty[$ est un intervalle, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \geq 1$, $\varphi(x) = x \ln(x) - x + \lambda$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Ainsi, comme $v_n = \varphi(n)$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/v_n = 0$. Comme φ est croissante, la suite $(1/v_n)_{n \geq 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0 donc, d'après le CSSA, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{v_n}$ converge.

5.35 a. Soit f, g deux fonctions de X . La fonction $h : y \mapsto f(x-y)g(y)$ est continue sur \mathbb{R} par définition de X .

De plus, la fonction $y \mapsto f(x-y)$ est de carré intégrable sur \mathbb{R} car f l'est et par le changement de variable $y = \phi(u) = x - u$. En effet, la fonction ϕ est bien une bijection de classe C^1 strictement décroissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} donc l'intégrabilité de f^2 sur \mathbb{R} implique celle de $y \mapsto f(x-y)^2$ avec la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)^2 dy = \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-(x-u))^2 (-1) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(u) du = N_2(f)^2.$$

Ainsi, comme $y \mapsto f(x-y)$ et $y \mapsto g(y)$ sont de carré intégrables sur \mathbb{R} , on sait d'après le cours que $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur \mathbb{R} ; on peut redonner l'inégalité $|f(x-y)g(y)| \leq \frac{1}{2} (f(x-y)^2 + g(y)^2)$ qui justifie par comparaison cette intégrabilité. Ainsi, le réel $f * g(x)$ est bien défini pour tout x donc la fonction $f * g$ est bien définie sur \mathbb{R} . De plus, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ et grâce à ce qui précède, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f * g(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x-y) dy} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(y) dy} = N_2(f)N_2(g).$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} > 0$, par définition de la limite, il existe deux réels $a_n \leq 0$ et $b_n \geq 0$ (on peut les choisir ainsi, c'est-à-dire a_n aussi petit qu'on veut et b_n aussi grand qu'on veut), tels que

$$\forall x \leq a_n, |f(x) - 0| \leq \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \forall x \geq b_n, |f(x) - 0| \leq \varepsilon_n.$$

Soit la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [a_n; b_n]$, $f_n(x) = f(x)$ et $\forall x \in]-\infty; a_n[\cup]b_n; +\infty[$, $f_n(x) = 0$. Alors, pour un réel x , on a deux cas :

- $x \in [a_n; b_n]$ et alors $|f_n(x) - f(x)| = |f(x) - f(x)| = 0$.

- $x \notin [a_n; b_n]$ et alors $|f_n(x) - f(x)| = |0 - f(x)| = |f(x)| \leq \varepsilon_n$ par construction.

Dans les deux cas, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n$ donc $\|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \varepsilon_n$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} . De plus, les f_n sont nulles en dehors du segment $[a_n; b_n]$ par construction.

c. Comme les f_n sont continues et que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} , on peut conclure par un théorème du cours que f est continue sur \mathbb{R} . De plus, soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} = 0$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Mais f_{n_0} (par exemple) est de limite nulle en

$+\infty$. Ainsi, il existe $b \geq 0$ tel que $\forall x \geq b, |f_n(x) - 0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'après l'inégalité triangulaire, on a donc $\forall x \geq b, |f(x) - 0| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - 0| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - 0| \leq \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$: ceci garantit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Bien sûr, par symétrie, on a aussi $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

d. Si $(f, g) \in X^2$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, définissons les deux fonctions $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = f(x)$ et $g_n(x) = g(x)$ si $x \in [-n; n]$, $f_n(x) = \left(2 - \frac{|x|}{n}\right)f(x)$ et $g_n(x) = \left(2 - \frac{|x|}{n}\right)g(x)$ si $x \in]-2n; -n[$ ou $x \in]n; 2n[$ et $f_n(x) = g_n(x) = 0$ si $|x| \geq 2n$ (faire un dessin). Ces fonctions f_n et g_n sont continues sur \mathbb{R} car f et g le sont et car, par exemple, $\lim_{x \rightarrow (-2n)^+} f_n(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow n^+} f_n(x) = f(n) = f_n(n)$. Les fonctions f_n et g_n sont nulles en dehors du segment $[-2n; 2n]$ et ont donc pour limite 0 en $\pm\infty$ et, bien sûr, $(f_n, g_n) \in X^2$.

Comme on ne sait pas si la limite de f existe en $\pm\infty$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ peut ne pas converger uniformément vers f sur \mathbb{R} même si, par construction, on a bien la convergence simple de $(f_n)_{n \geq 1}$ vers f sur \mathbb{R} car dès que $n \geq |x|$, on a $f_n(x) = f(x)$ donc la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est stationnaire. Par contre, comme $f_n(x) - f(x) = 0$ si $|x| \leq n$, $|f_n(x) - f(x)| = \left(\frac{|x|}{n} - 1\right)|f(x)| \leq |f(x)|$ si $|x| \in]n; 2n[$, $f_n - f$ est de carré intégrable puisque f l'est et $\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{-n} |f_n(t) - f(t)|^2 dt + \int_n^{+\infty} |f_n(t) - f(t)|^2 dt \leq R_n = \int_{t \in I_n} |f(t)|^2 dt$ où $I_n =]-\infty; n] \cup]n; +\infty[$. Or R_n est le reste de l'intégrale convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$. On vient de montrer par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$, ce qu'on résume en disant que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge en norme 2 (ou dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) vers f . Par symétrie, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n - g\|_2 = 0$.

Il est clair que le produit de convolution est bilinéaire par linéarité de l'intégrale donc, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, |f_n * g_n(x) - f * g(x)| = |f_n * g_n(x) - f_n * g(x) + f_n * g(x) - f * g(x)| = |f_n * (g_n - g)(x) + (f_n - f) * g(x)|$ ce qui donne par inégalité triangulaire : $|f_n * g_n(x) - f * g(x)| \leq |f_n * (g_n - g)(x)| + |(f_n - f) * g(x)|$.

Mais on a vu à la question **a.** que $|f_n * (g_n - g)(x)| \leq \|f_n\|_2 \|g_n - g\|_2$ et $|(f_n - f) * g(x)| \leq \|f_n - f\|_2 \|g\|_2$. Ainsi, puisque par construction $\|f_n\|_2 \leq \|f\|_2$ car $|f_n| \leq |f|$, on obtient la majoration

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n * g_n(x) - f * g(x)| \leq \|f\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \|g\|_2$$

qui montre que $f_n * g_n - f * g$ est bornée sur \mathbb{R} et que $\|f_n * g_n - f * g\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \|f\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \|g\|_2$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|f\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \|g\|_2) = 0$ d'après ce qui précède, on a montré la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n * g_n)_{n \geq 1}$ vers $f * g$ sur \mathbb{R} .

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 4n$, il vient $f_n * g_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-t)g_n(t)dt = 0$ car

- si $t > 2n$ on a $g_n(t) = 0$ par définition de g_n ,

- si $t \leq 2n$, comme $x > 4n$, on a $x - t > 4n - 2n = 2n$ et $f_n(x - t) = 0$ par définition de f_n .

Par symétrie, $\forall x < -4n, f_n * g_n(x) = 0$ de sorte que $f_n * g_n$ est nulle en dehors du segment $[-4n; 4n]$.

Par conséquent, d'après la question **c.**, la suite de fonctions $(f_n * g_n)_{n \geq 1}$ étant composée de fonctions nulles en dehors d'un segment donc de limite nulle en $\pm\infty$ et convergeant uniformément vers $f * g$ sur \mathbb{R} , la fonction $f * g$ est elle-même de limite nulle en $\pm\infty$.

De plus, pour tout entier $n \geq 1$, en définissant $h_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $h_n(x, t) = f_n(x - t)g_n(t)$, on a :

- Pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h_n(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} car f_n l'est.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h_n(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} car f_n et g_n le sont.

• Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $x \in [a; b]$, alors $h_n(x, t) = 0$ si $t \notin [-2n; 2n]$ par construction de g_n et si $t \in [-2n; 2n]$, alors $x - t \in [a - 2n; b + 2n] = J_n$ et la fonction f_n est continue sur le segment J_n donc elle y est bornée d'après le théorème des bornes atteintes, d'où l'existence de $M_n = \max_{u \in J_n} |f_n(u)|$ et qui fait que pour $(x, t) \in J_n \times \mathbb{R}$, on a $|h_n(x, t)| \leq \varphi_n(t)$ avec $\varphi_n(t) = 0$ si $|t| > 2n$ et $\varphi_n(t) = M_n$ si $|t| \leq 2n$. Comme φ_n est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} car à support fini, le théorème de continuité sous le signe somme montre que $f_n * g_n$ est continue sur \mathbb{R} .

Comme la suite $(f_n * g_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $f * g$ sur \mathbb{R} et que toutes les $f_n * g_n$ sont continues sur \mathbb{R} , la fonction $f * g$ est continue sur \mathbb{R} par un théorème du cours.

5.36 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto e^{-t^2} \cos(2tx)$ est continue sur \mathbb{R}_+ et on a $g_x(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t^2}) = o(e^{-t})$ donc g_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ et f est bien définie sur \mathbb{R} . Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = e^{-t^2} \cos(2tx)$.

(H₁) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2t \sin(2xt)e^{-t^2}$.

(H₂) Pour $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto h(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ sont continues sur \mathbb{R}_+ et g_x y est intégrable.

(H₁) Pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2te^{-t^2} = \varphi(t)$. Comme $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées, la fonction φ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Par théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $f'(x) = \int_0^{+\infty} \sin(2xt)(-2te^{-t^2})dt$.

b. On pose les fonctions $u : t \mapsto \sin(2xt)$ et $v : t \mapsto e^{-t^2}$ qui sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ donc, par intégration par parties et comme on a la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ et $u(0)v(0) = 0$, on arrive à la relation suivante : $f'(x) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = -\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = -2x \int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t^2}dt = -2xf(x)$. Ainsi, f est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E) : $y' + 2xy = 0$ sur \mathbb{R} . Comme on a classiquement $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de GAUSS), et qu'une primitive de $x \mapsto -2x$ est $x \mapsto -x^2$, on a facilement $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$.

c. Méthode 1 : en utilisant la question précédente, on pose $b_y : x \mapsto e^{-(x+iy)^2} = e^{-x^2+y^2-2ixy}$, alors b_y est continue sur \mathbb{R} et $|b_y(x)| = e^{-x^2+y^2} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} O(e^{-x^2})$ donc, par comparaison, b_y est intégrable sur \mathbb{R} et $g(y)$ existe. De plus, $g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2} \cos(2xy)dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2} \sin(2xy)dx$. Mais la fonction $x \mapsto e^{-x^2+y^2} \sin(2xy)$ est impaire donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2} \sin(2xy)dx = 0$ et, par parité de $x \mapsto e^{-x^2+y^2} \cos(2xy)$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2} \cos(2xy)dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2+y^2} \cos(2xy)dx = 2e^{y^2} f(y) = \sqrt{\pi}$ d'après a..

Ainsi, g est constante sur \mathbb{R} et on a $\forall y \in \mathbb{R}$, $g(y) = \sqrt{\pi}$.

Méthode 2 : définissons $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $a(x, y) = e^{-(x+iy)^2}$.

(H₁) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto a(x, y)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\frac{\partial a}{\partial y}(x, y) = -2i(x+iy)e^{-(x+iy)^2}$.

(H₂) Pour $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto a(x, y)$ et $x \mapsto \frac{\partial a}{\partial y}(x, y)$ sont continues sur \mathbb{R} et $|a(x, y)| = e^{y^2-x^2} \underset{\pm\infty}{=} O(e^{-x^2})$ donc, par comparaison, la fonction $x \mapsto a(x, y)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

(H₃) Pour $b > 0$ et $(x, y) \in \mathbb{R} \times [-b; b]$, $\left| \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2|x+iy|e^{y^2-x^2} \leq 2(|x|+b)e^{b^2-x^2} = \psi_b(x)$. ψ_b est continue et paire sur \mathbb{R} et $\psi_b(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées : ψ_b est intégrable sur \mathbb{R} .

Par théorème de dérivation sous le signe somme, g est de classe C^1 sur \mathbb{R} et, comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-(x+iy)^2} = 0$, on

a $g'(y) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} 2(x+iy)e^{-(x+iy)^2} dx = -i \left[e^{-(x+iy)^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Comme \mathbb{R} est un intervalle, g est constante sur \mathbb{R} et vaut donc $g(0) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (par parité) donc $\forall y \in \mathbb{R}, g(y) = \sqrt{\pi}$.

5.37 a. La fonction $g : t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^2$ est continue sur \mathbb{R}_+^* par théorèmes généraux et $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 1$ car on sait que $\sin(t) \sim t$. De plus, $g(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc g est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et I_2 existe.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f_x : t \mapsto \frac{\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)}$. f_x est continue sur \mathbb{R}_+^* , elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = x^2$ car $\sin(u) \sim u$ et $f_x(t) = O\left(\frac{1}{t^4}\right)$ donc f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+^* : F est bien définie sur \mathbb{R} .

c. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)}$.

(H₁) Pour $t > 0, x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} et $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(2tx)}{t(1+t^2)}, \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = 2 \frac{\cos(2tx)}{1+t^2}$.

(H₂) Pour $x \in \mathbb{R}, f_x : t \mapsto h(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (on vient de le voir).

(H₃) Soit $a > 0, x \in [-a; a], t > 0$, il vient $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{|2tx|}{t(1+t^2)} \leq \frac{2a}{1+t^2} = \varphi_a(t)$ car on a l'inégalité

$\forall u \in \mathbb{R}_+, |\sin(u)| \leq u$ et φ_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car $\varphi_a(t) \sim \frac{2a}{t^2}$. De même, on a

$\forall (x, t) \in [-a; a] \times \mathbb{R}_+^*, \left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{2}{1+t^2} = \psi_2(t)$ et ψ_2 est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Par le théorème de dérivation sous le signe somme appliqué deux fois, la fonction f de classe C^2 sur \mathbb{R} et on a les formules $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2tx)}{t(1+t^2)} dt$ et $F''(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{(1+t^2)} dt$ pour tout réel x .

d. Si $x \in \mathbb{R}$, comme $\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta)$, $F''(x) - 4F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2 \cos(2tx)}{(1+t^2)} dt - \int_0^{+\infty} \frac{4 \sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)} dt$ devient

$$F''(x) - 4F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2 - 4 \sin^2(tx)}{(1+t^2)} dt - \int_0^{+\infty} \frac{4 \sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - 4 \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2) \sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} dt.$$

Or $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\text{Arctan}(t) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ et avec le changement de variable $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ (si $x > 0$) avec φ de classe C^1 strictement croissante et bijective de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* , on trouve, dans la seconde intégrale, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dt = x \int_0^{+\infty} g(u) du = xI_2$. Par conséquent, $\forall x > 0, F''(x) - 4F(x) = \pi - 4xI_2$ (E) et cette relation est aussi vérifiée si $x = 0$ car $F(0) = 0$ et $F''(0) = \pi$.

e. On résout (E) sur \mathbb{R}_+ . Les solutions de l'équation homogène associée sont classiquement les fonctions $y : x \mapsto Ae^{2x} + Be^{-2x}$ et une solution particulière de (E) est clairement $y_0 : x \mapsto xI_2 - \frac{\pi}{4}$. Ainsi, les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+ sont les fonctions $y : x \mapsto xI_2 - \frac{\pi}{4} + Ae^{2x} + Be^{-2x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Or $F(0) = F'(0) = 0$ donc $A + B = \frac{\pi}{4}$ et $2A - 2B = -I_2$ donc, après calculs, on trouve $A = \frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2}$ et $B = \frac{\pi}{4} + \frac{I_2}{2}$. Au final, $\forall x \geq 0, F(x) = xI_2 - \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2} \right) e^{2x} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{I_2}{2} \right) e^{-2x}$.

f. Comme $\forall u \in \mathbb{R}_+, |\sin(u)| \leq u$, on a $|F(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+t^2} dt = \frac{\pi x^2}{2}$ pour tout x .

Pour déterminer un équivalent de F en $+\infty$, on doit traiter deux cas :

- Si $\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2} \neq 0$, par croissances comparées, on a $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2} \right) e^{2x}$.
- Si $\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2} = 0$, on a par contre $F(x) \underset{+\infty}{\sim} I_2 x$ (car $I_2 > 0$).

Mais comme $\forall x \geq 0$, $|F(x)| \leq \frac{\pi x^2}{2}$, le premier cas est à proscrire car $x^2 \underset{+\infty}{=} o(e^{2x})$. On en déduit donc

$$\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2} = 0 \text{ donc que } I_2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2}.$$

g. Dans cette dernière intégrale, on pose $u : t \mapsto \sin^2(t)$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{t}$, u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ car $\sin^2(t) \underset{0}{\sim} t^2$ et \sin est bornée. Ainsi, par intégration par parties, $I_2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = -\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ en posant $t = \frac{u}{2}$ (facile à justifier). Par conséquent, on retrouve la valeur de l'intégrale de DIRICHLET : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

5.38 a. Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$ si elle converge.

(H₁) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} par opérations,

(H₂) $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* par opérations,

(H₃) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|g(x, t)| \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$ et φ continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

Par continuité sous le signe somme, f est bien définie et continue sur \mathbb{R} .

b. Comme f est clairement paire, on s'occupe de l'aspect C^1 sur \mathbb{R}_+^* :

(H₁) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto g(x, t)$ est C^1 continue sur \mathbb{R}_+^* par opérations et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{2x}{t^2} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}$,

(H₂) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* d'après la question **a.** sur \mathbb{R}_+^* , et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* par opérations,

(H₃) Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [a; b]$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leq \frac{2b}{t^2} e^{-t^2 - \frac{a^2}{t^2}} = \varphi_{a,b}(t)$ et $\varphi_{a,b}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* où elle est intégrable car $\varphi_{a,b}(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t^2})$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi_{a,b}(t) = 0$ par croissances comparées (car $\lim_{v \rightarrow +\infty} v e^{-v} = 0$ en posant $v = \frac{a}{t}$).

Ainsi, f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* , donc aussi sur \mathbb{R}_-^* et on a $\forall x > 0$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} dt$.

c. Pour $x > 0$, on pose $t = \frac{x}{u} = \varphi(u)$ avec φ bijection strictement décroissante de classe C^1 de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}_+^* donc, par changement de variable, $f'(x) = -2x \int_{+\infty}^0 \frac{u^2}{x^2} \exp\left(-\frac{x^2}{u^2} - u^2\right) \left(\frac{-x}{u^2}\right) du$ d'où $f'(x) = -2f(x)$ (E).

On résout (E) sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0$, $f(x) = \lambda e^{-2x}$ (R). Comme $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et que f est continue en 0, on a $\lambda = f(0)$ en passant à la limite quand x tend vers 0 dans (R). Ainsi, $\forall x \geq 0$, $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}$. Par parité de f , $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(|x|) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}$.

d. Comme f est continue en 0 et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2f(x)) = -\sqrt{\pi}$, f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = -\sqrt{\pi}$. Par parité de f , on a $f'_g(0) = +\sqrt{\pi} \neq -\sqrt{\pi}$. Ainsi, f n'est pas dérivable en 0.

e. Pour $x > 0$, on peut écrire $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_x^{+\infty} \frac{2te^{-t^2}}{2t} dt$ et on pose $u(t) = -e^{-t^2}$ et $v(t) = \frac{1}{2t}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[x; +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées. Par intégration par parties, on obtient donc $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt$. Or, par croissance de

l'intégrale, on a $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = \int_x^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{2t^3} dt \leq \frac{1}{2x^3} \int_x^{+\infty} te^{-t^2} dt = \frac{1}{2x^3} \left[-\frac{e^{-t^2}}{2} \right]_x^{+\infty} te^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{4x^3}$
donc $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x^2}}{2x}\right)$ ce qui permet de conclure que $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

5.39 a. • Pour $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{x^2+t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $g_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc g_x est intégrable par comparaison aux intégrales de RIEMANN.

• Si $x = 0$, la fonction $g_0 : t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , prolongeable par continuité en 0 en posant $g_0(0) = 1$ car $\ln(1+t^2) \underset{0}{\sim} t^2$ et on a toujours $g_0(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc g_0 est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Ainsi, la fonction f est bien définie sur \mathbb{R} .

b. On pose $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v(t) = -\frac{1}{t}$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0$ car $u(t)v(t) \underset{0}{\sim} -t$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées.

Ainsi, par intégration par parties, on a $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{t(1+t^2)} dt = 2[\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \pi$.

c. Pour $u \geq 0$, par TAYLOR reste intégral, on a $\ln(1+u) = \ln(1+0) + u + \int_0^u \frac{u-t}{1+t} dt$ donc $\ln(1+u) \geq u$.

Ainsi, pour $x > 0$, $f(0) - f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{x^2+t^2}\right) \ln(1+t^2) dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{t^2(x^2+t^2)} \ln(1+t^2) dt$. Or on sait que $0 \leq \ln(1+t^2) \leq t^2$ donc $0 \leq f(0) - f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+t^2} dt = x \int_0^{+\infty} \frac{(1/x)}{1+(t/x)^2} dt$. Ainsi, on obtient l'encadrement $0 \leq f(0) - f(x) \leq x \left[\text{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi x}{2}$. C'est aussi vrai si $x = 0$.

d. Par l'encadrement précédent, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \pi$ ce qui prouve que f est continue à droite en 0.

Comme f est clairement paire, f est continue en 0.

Soit $h : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{\ln(1+t^2)}{x^2+t^2}$. Prenons $a > 0$.

- $\forall t > 0$, $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- $\forall x > 0$, $t \mapsto h(x, t) = g_x(t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .
- $\forall x \in [a; +\infty[$, $\forall t > 0$, $|h(x, t)| \leq \frac{\ln(1+t^2)}{a^2+t^2} = g_a(t)$ et g_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Ainsi, par continuité sous le signe somme, f est continue sur \mathbb{R}_+^* , donc aussi sur \mathbb{R}_-^* par parité. En conclusion, la fonction f est bien continue sur \mathbb{R} .

5.40 a. Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x, t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt}$.

- Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
- Pour tout $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, on a $|f(x, t)| \leq \varphi(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ et φ est continue sur \mathbb{R}_+^* avec $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \frac{1}{2}$ par développements limités et $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc φ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction F est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .

b. Continuons :

- Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (fait ci-dessus). De plus, les

fonctions $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-xt}$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = (1 - \cos(t))e^{-xt}$ sont continues sur \mathbb{R}_+^* .

• Soit $a > 0$, alors pour $(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, on a $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-at} \leq \|h\|_{\infty, \mathbb{R}_+} e^{-at} = \theta_a(t)$ avec $h : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t}$ qui est continue sur \mathbb{R}_+^* et $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = 0$ par développements limités et $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$

donc h est bornée sur \mathbb{R}_+ . De plus, $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \psi_a(t) = 2e^{-at}$. Comme θ_a et ψ_a sont continues et intégrables sur \mathbb{R}_+^* , on déduit du théorème de dérivation sous le signe somme que F est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* et que $\forall x > 0$, $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-xt} dt$ et $F''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t))e^{-xt} dt$.

c. Soit $x > 0$, avec les fonctions bornées φ et h ci-dessus, on a par inégalité de la moyenne (tout converge), les majorations suivantes : $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} |\varphi(t)| e^{-xt} dt \leq \|\varphi\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{\|\varphi\|_{\infty, \mathbb{R}_+}}{x}$. De même, comme $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-xt} dt$ et $F''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t))e^{-xt} dt$, on a $|F'(x)| \leq \frac{\|h\|_{\infty, \mathbb{R}_+}}{x}$ et $|F''(x)| \leq \frac{2}{x}$ car $0 \leq 1 - \cos(t) \leq 2$. Par encadrement, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

d. Pour $x > 0$, on a $F''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t))e^{-xt} dt = \frac{1}{x} - \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{it-xt} dt \right) = \frac{1}{x} - \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x} \right]_0^{+\infty} \right)$ donc $F''(x) = \frac{1}{x} - \operatorname{Re} \left(\frac{1}{x-i} \right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$. On intègre sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* et il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $F'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) + C$. Comme on sait que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) = 0$, on trouve $C = 0$. On intègre à nouveau et on trouve classiquement $F(x) = x \ln(x) - x - \frac{x \ln(1+x^2)}{2} + x - \operatorname{Arctan}(x) + K = K - \frac{x}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \operatorname{Arctan}(x)$ avec $K \in \mathbb{R}$. Comme on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, on trouve $K = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall x > 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} + x \ln(x) - x \ln(\sqrt{1+x^2}) - \operatorname{Arctan}(x)$.

e. Comme F est continue en 0, on a $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = K = \frac{\pi}{2}$ par croissances comparées et DL. On effectue dans $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ une intégration par parties en posant $u(t) = 1 - \cos(t)$ et $v(t) = -\frac{1}{t}$, u et v sont C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ donc $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ (DIRICHLET).

5.41 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . Comme $f_x(t) = \frac{1 - (1 - xt^2 + o(t^2))}{t^2} = x + o(1)$, la fonction f_x se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = x$ donc f_x est intégrable sur $]0; 1]$.

- Si $x = 0$, f_x est la fonction nulle donc elle est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .
- Si $x < 0$, $1 - e^{-xt^2} \sim -e^{-xt^2}$ donc, par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_x(t) = +\infty$ car $f_x(t) \sim \frac{-e^{-xt^2}}{t^2}$ et f_x n'est pas intégrable sur $]1; +\infty[$.
- Si $x > 0$, $f_x(t) \sim \frac{1}{t^2}$ donc f_x est intégrable sur $]1; +\infty[$ d'après RIEMANN.

En résumé, f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $x \geq 0$, et comme f_x est de signe constant sur son ensemble de définition, $\int_0^{+\infty} f_x$ converge dans les mêmes conditions. L'ensemble de définition de f est \mathbb{R}_+ .

b. Définissons $g : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $g(x, t) = \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$ si $x \geq 0$.

(H₁) Pour $t > 0$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = e^{-xt^2}$.

(H₂) Pour $x > 0$, $t \mapsto g(x, t) = f_x(t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (déjà vu en a.).

(H₃) Pour $a > 0$, $x \in [a; +\infty[$ et $t > 0$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at^2} = \varphi_a(t)$ et φ_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car, par croissances comparées, $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$. On effectue le changement de variable $t = \psi(u) = \frac{u}{\sqrt{x}}$, licite car ψ est de classe C^1 , strictement croissante et bijective de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* , et on a $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ en se rappelant de la très classique intégrale de GAUSS $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c. Comme \mathbb{R}_+^* est un intervalle, d'après **b.**, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $f'(x) = \sqrt{\pi x} + C$.

Méthode 1 : montrons que f est continue sur \mathbb{R}_+ .

(H₁) Pour $t > 0$, $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ par opérations.

(H₂) Pour $x \geq 0$, $t \mapsto g(x, t) = f_x(t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (déjà vu en **a.**).

(H₃) Pour $a > 0$, $x \in [0; a]$, $t > 0$, $|g(x, t)| \leq \psi_a(t)$ avec $\psi_a(t) = 1$ si $t \in]0; 1]$ car $1 - e^{-u} \leq u$ par concavité et $\psi_a(t) = \frac{1}{t^2}$ si $t \geq 1$ car $1 - e^{-xt^2} \leq 1$; et ψ_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* car $\psi_a(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur \mathbb{R}_+ .

Méthode 2 : Pour $u \in [0; 1[$, comme on a classiquement $\forall v > -1$, $\ln(1 + v) \leq v$, en posant $v = -u$, on a $\ln(1 - u) \leq -u$ donc, par croissance de l'exponentielle, $1 - u \leq e^{-u}$. Comme cette inégalité est clairement vraie aussi si $u \geq 1$, on a donc $\forall x > 0$, $\forall t > 0$, $0 \leq 1 - e^{-xt^2} \leq xt^2$. Ainsi, pour $x > 0$, on a $\forall t > 0$, $f_x(t) \leq x$ et on a aussi $f_x(t) \leq \frac{1}{t^2}$. Par conséquent, $0 \leq f(x) = \int_0^{1/\sqrt{x}} f_x(t) dt + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} f_x(t) dt \leq x \times \frac{1}{\sqrt{x}} + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 2\sqrt{x}$. Ceci prouve par encadrement que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ donc que f est continue sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi, comme $\forall x > 0$, $f(x) = \sqrt{\pi x} + C$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = C = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{\pi x}$.

5.42 a. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x, t) = \frac{e^{ixt} - 1}{t} e^{-t}$ de sorte que $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ si elle converge.

(H₁) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

(H₂) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car $f_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ et que f_x se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = ix$ car $e^{ixt} - 1 \sim ixt$ si $x \neq 0$.

(H₃) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = ie^{-t} e^{ixt}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

(H₄) Pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-t} = \varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $F'(x) = \int_0^{+\infty} ie^{(ix-1)t} dt$.

b. Ainsi, $F'(x) = \left[\frac{ie^{(ix-1)t}}{ix-1} \right]_0^{+\infty} = \frac{i}{1-ix} = \frac{i(1+ix)}{1+x^2} = -\frac{x}{1+x^2} + \frac{i}{1+x^2}$. Comme $F(0) = 0$ et que \mathbb{R} est un intervalle, en intégrant, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + i \operatorname{Arctan}(x)$.

5.43 a. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$ de sorte que $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ (si elle converge).

• Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* par opérations.

• Pour tout $x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* car elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = 1$ car $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ et $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-xt})$ (avec $x > 0$).

• Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t)e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

• Pour $a > 0$ et $(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \psi_a(t)$ et ψ_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $F'(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt$.

Ainsi, $F'(x) = -\text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} dt \right) = -\text{Im} \left[\frac{e^{(i-x)t}}{(i-x)} \right]_0^{+\infty} = \text{Im} \left(\frac{1}{i-x} \right) = -\frac{1}{1+x^2}$.

b. La fonction $f_0 : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et prolongeable par continuité en 0 en posant $f_0(0) = 1$

car $\sin(t) \sim t$. En posant $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto 1 - \cos(t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur

\mathbb{R}_+^* et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0$ car $1 - \cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par $1 - \cos(t) = O(1)$. Les intégrales

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ sont donc de même nature. Or $g_0 : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est continue

et positive sur \mathbb{R}_+^* , prolongeable par continuité en 0 en posant $g_0(0) = \frac{1}{2}$ toujours car $1 - \cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ et

$|g_0(t)| \leq \frac{2}{t^2}$ ce qui garantit son intégrabilité sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ converge car elle converge

absolument, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge aussi donc $F(0)$ existe et on a $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$.

Méthode 1 : pour $x \geq 0$, en posant $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{e^{-xt}}{t}$, les fonctions u et v sont de classe C^1

sur \mathbb{R}_+^* et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties à

nouveau, comme $v'(t) = -\frac{1+tx}{t^2} e^{-xt}$, on a $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \times (1+tx) e^{-xt} dt$.

• Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \times (1+tx) e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

• Pour $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \times (1+tx) e^{-xt}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (déjà vu).

• Posons $h : s \mapsto (1+s)e^{-s}$, alors h est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $h'(s) = -se^{-s} \leq 0$ donc h est positive et maximale en 0 donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t > 0, \left| \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \times (1+tx) e^{-xt} \right| \leq g_0(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ car $(1+tx)e^{-xt} = h(xt) \leq h(0) = 1$ et g_0 est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Par continuité sous le signe somme, F est continue sur \mathbb{R}_+ , notamment en 0.

Méthode 2 : Par CHASLES, pour $x \geq 0$, $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t) e^{-xt}}{t} dt$ et, en posant $t = u + k\pi$ dans

chaque intégrale, $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-k\pi x} \int_0^\pi \frac{\sin(u) e^{-xu}}{u + k\pi} du$. Posons $u_k : x \mapsto e^{-k\pi x} \int_0^\pi \frac{\sin(u) e^{-xu}}{u + k\pi} du$.

Pour $x \geq 0$ fixé, les suites $(e^{-k\pi x})_{k \in \mathbb{N}}$ et $\left(\int_0^\pi \frac{\sin(u) e^{-xu}}{u + k\pi} du \right)_{k \in \mathbb{N}}$ sont décroissantes (car $\sin(u) \geq 0$ et

$(u + k\pi)_{k \in \mathbb{N}}$ croît), de plus, pour $k \geq 1, \left| \int_0^\pi \frac{\sin(u) e^{-xu}}{u + k\pi} du \right| \leq \int_0^\pi \frac{1}{u + k\pi} du \leq \frac{\pi}{k\pi} = \frac{1}{k}$ donc $(u_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$

est décroissante et tend vers 0. Par le critère spécial des séries alternées, en notant $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k(x)$,

on a $|R_n(x)| \leq u_{n+1}(x) \leq \frac{1}{n+1}$ donc $\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{n+1}$ ce qui prouve que la série de fonctions continues (la

continuité des u_k se montre par application du théorème de continuité sous le signe somme sur un segment)

$\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ converge uniformément vers F sur \mathbb{R}_+ donc, d'après le cours, F est continue sur \mathbb{R}_+ .

c. Par une petite étude de fonction, on montre classiquement que $\forall t > 0, |\sin(t)| \leq t$. Ainsi, $|f(x, t)| \leq e^{-xt}$

et, par inégalité de la moyenne, $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

Comme \mathbb{R}_+^* est un intervalle et que $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $f(x) = \lambda - \text{Arctan}(x)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ donc $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall x > 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Par continuité de F en 0 , on a aussi $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ (intégrale de DIRICHLET).

5.44 a. Soit $h : \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$.

(H₁) $\forall t \in [0; 1]$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} par opérations.

(H₂) $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue donc intégrables sur le segment $[0; 1]$.

(H₃) $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$ est continue sur $[0; 1]$.

(H₄) $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; 1]$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2|x|e^{-x^2}$. Or $b : x \mapsto 2|x|e^{-x^2}$ est continue et positive sur \mathbb{R} , et elle tend vers 0 en $\pm\infty$ par croissances comparées, on en déduit classiquement que b est bornée sur \mathbb{R} et on note $M = \text{Sup}_{x \in \mathbb{R}}(2|x|e^{-x^2})$. Ainsi, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) = M$ et φ est intégrable sur le segment $[0; 1]$.

Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, la fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et on a la formule de LEIBNIZ, à savoir $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2 \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} x dt$.

Par le théorème fondamental de l'intégration, comme $a : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} , la fonction g est de classe C^1 sur \mathbb{R} car c 'est la primitive de a sur \mathbb{R} qui s'annule en 0 . On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^{-x^2}$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -2 \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} x dt = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} x dt = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2e^{-x^2} g(x)$ en posant $u = tx = \psi(t)$ si $x \neq 0$ avec ψ qui est une bijection de classe C^1 strictement monotone (croissante si $x > 0$ et décroissante si $x < 0$) de $[0; 1]$ dans $[0; |x|]$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2g'(x)g(x)$. Mais si $x = 0$, on a clairement $f'(0) = 0$ donc $f'(0) = -2e^{-0^2} g(0)$ est encore vrai car $g(0) = 0$. Comme \mathbb{R} est un intervalle et que $(f + g^2)' = 0$ sur \mathbb{R} , il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + g^2(x) = C$.

Or $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ et $g(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + g^2(x) = \frac{\pi}{4}$.

c. Pour $x > 0$, $\forall t \geq 0$, $0 \leq e^{-(1+t^2)x^2} \leq e^{-x^2}$ et $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$, donc $0 \leq f(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$ donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Comme g est une fonction positive, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{g(x)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4} - f(x)}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = I$.

5.45 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $g_x : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_x(t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$. La fonction positive g_x est continue sur \mathbb{R}_+^* , $g_x(t) \sim \frac{1}{t^x}$ donc g_x est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $x < 1$ et $g_x(t) \sim \frac{1}{t^{x+1}}$ donc g_x est intégrable sur $]1; +\infty[$ si et seulement si $x + 1 > 1$. Ainsi, g_x est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $0 < x < 1$. Or $f(x)$ existe si et seulement si g_x est intégrable sur \mathbb{R}_+^* donc le domaine de définition D de f est $D =]0; 1[$.

b. Définissons $g :]0; 1[\times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x, t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$ si elle converge.

(H₁) $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $]0; 1[$ par opérations.

(H₂) $\forall x \in]0; 1[$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x, t)$ est continue (et intégrable) sur \mathbb{R}_+^* d'après a..

(H₃) Soit $(a, b) \in]0; 1]^2$ tel que $0 < a < b < 1$, $\forall (x, t) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+^*$, $|g(x, t)| = g(x, t) \leq \varphi_{a,b}(t)$ avec

$\varphi_{a,b}(t) = \frac{1}{t^b(1+t)}$ si $t \in]0; 1]$ et $\varphi_{a,b}(t) = \frac{1}{t^a(1+t)}$ si $t \geq 1$. Or $\varphi_{a,b}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* d'après RIEMANN car $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^b}$ (et $b < 1$) et $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{a+1}}$ (et $a+1 > 1$).

Par théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $D =]0; 1[$.

c. Si $x \in D =]0; 1[$, on a clairement $1-x \in D$. Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on pose $t = \frac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement décroissante et de classe C^1 de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* et, par changement de variable, on a $f(x) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{u^{-x}(1+(1/u))} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^{1-x}(u+1)} du$ donc $f(1-x) = f(x)$.

d. Méthode 1 : pour $x \in]0; 1[$, par CHASLES, $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{t^x(1+t)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt$. De plus, on majore $0 \leq \int_0^1 \frac{1}{t^x(1+t)} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t^x} dt = \left[\frac{t^{-x+1}}{1-x}\right]_0^1 = \frac{1}{1-x}$ qui garantit que $\int_0^1 \frac{1}{t^x(1+t)} dt = O(1)$. Dans la seconde intégrale, on pose $t = u^{1/x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $[1; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt = \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{1}{u(1+u^{1/x})} u^{(1/x)-1} du = \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2(1+u^{-1/x})} du$. Or pour tout réel $u \geq 1$, on a $1 - u^{-1/x} \leq \frac{1}{1+u^{-1/x}} \leq 1$ donc, par croissance de l'intégrale, on a

l'encadrement $\int_1^{+\infty} \frac{1-u^{-1/x}}{u^2} du = 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \leq x \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt \leq 1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$. Par théorème d'encadrement, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$. Par somme, on a $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$. D'après **c.**, $f(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{1-x}$.

Méthode 2 : comme ci-dessus, on pose $t = u^{1/x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $]0; +\infty[$ dans $]0; +\infty[$ pour $x \in D$, et on obtient $xf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2(1+u^{-1/x})} du$. Posons

$g : (x, u) \mapsto \frac{1}{u^2(1+u^{-1/x})} = \frac{1}{u(1+u^{1/x})} u^{(1/x)-1}$ de sorte que $xf(x) = \int_0^{+\infty} g(x, u) du$ si $x \in]0; 1[$.

(H₁) Pour $u > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x, u) = h(u)$ avec $h(u) = 0$ si $u \in]0; 1[$, $h(1) = \frac{1}{2}$ et $h(u) = \frac{1}{u^2}$ si $u > 1$.

(H₂) $\forall x \in]0; \frac{1}{2}]$, $u \mapsto g(x, u)$ et h sont continues sur \mathbb{R}_+^* .

(H₃) $\forall x \in]0; \frac{1}{2}]$, $\forall u > 0$, $|g(x, u)| \leq \varphi(u)$ avec $\varphi(u) = 1$ si $u < 1$ (car $0 \leq u^{1/x} \leq u^2$), $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ et $\varphi(u) \leq \frac{1}{u^2}$ si $u > 1$ (car $u^{-1/x} \geq 0$) et φ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R}_+^* car $\varphi(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u^2}$.

Le théorème de convergence dominée à paramètre continu permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = \int_0^{+\infty} h(u) du$ ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{+\infty} = 1$. À nouveau, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

5.46 a. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $g_x : t \mapsto t^x e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et prolongeable par continuité en 0 en posant $g_0(0) = 1$ ou $g_x(0) = 0$ si $x > 0$. De plus, par croissances comparées, $g_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc g_x est intégrable sur \mathbb{R}_+^* . La fonction f est définie sur $[0; +\infty[$.

b. Définissons $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x, t) = t^x e^{-t}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$.

- $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ par opérations.
- $\forall x \geq 0$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x, t)$ est continue (et intégrable) sur \mathbb{R}_+^* d'après **a.**
- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall (x, t) \in [0; a] \times \mathbb{R}_+^*$, $|g(x, t)| = g(x, t) \leq \varphi_a(t)$ avec $\varphi_a(t) = e^{-t}$ si $t \in]0; 1]$ et $\varphi_a(t) = t^a e^{-t}$ si $t \geq 1$. Or φ_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* d'après **a.**

Par théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur \mathbb{R}_+ .

c. Soit $x \geq 1$, dans l'intégrale définissant $f(x)$, on pose $u : t \mapsto t^x$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$, u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, on trouve bien $f(x) = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t} dt = xf(x-1)$.

d. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction g_x est continue, positive et non nulle sur \mathbb{R}_+^* donc $f(x) = \int_0^{+\infty} g_x(t) dt > 0$. Ainsi, d'après a., la fonction $h : u \mapsto \ln(f(u))$ est continue sur \mathbb{R}_+ et on note H une de ses primitives. Comme $\varphi(x) = [H(u)]_{x-1}^x = H(x) - H(x-1)$, la fonction φ est dérivable sur $]1; +\infty[$ et on a la relation $\forall x \geq 1, \varphi'(x) = H'(x) - H'(x-1) = \ln(f(x)) - \ln(f(x-1)) = \ln(x)$ d'après c..

e. D'après la question précédente, $\varphi(x) = \varphi(1) + \int_1^x \varphi'(t) dt = \varphi(1) + \int_1^x \ln(t) dt = \varphi(1) + [t \ln(t) - t]_1^x$ ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Comme $v_n = \varphi(n)$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et, avec le critère spécial des séries alternées, on conclut à la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{v_n}$.

5.47 a. Soit $x \geq 0$, posons $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{x+t}$. Alors u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et le

crochet $[uv]_0^{+\infty}$ converge car $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ puisque $1 - \cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$. Ainsi les intégrales

$\int_0^{+\infty} u'v$ et $\int_0^{+\infty} uv'$ sont de même nature. Or uv' est continue en 0 si $x > 0$ et se prolonge par continuité en 0 si $x = 0$ car $u(t)v'(t) = -\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ donc uv' est intégrable sur $]0; 1]$. De plus $u(t)v'(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

donc uv' est intégrable sur $]1; +\infty[$. Par conséquent, uv' est intégrable sur \mathbb{R}_+^* , l'intégrale $\int_0^{+\infty} uv'$ converge donc, tout comme $\int_0^{+\infty} u'v = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ (de même nature). De plus, comme le crochet est nul, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = -\int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) \times \left(-\frac{1}{(x+t)^2}\right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} dt.$$

b. Soit maintenant $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2}$.

- $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- $\forall x \geq 0$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (déjà vu avant).
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, |g(x, t)| = g(x, t) \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur \mathbb{R}_+^* (déjà vu avant).

On peut donc conclure par continuité sous le signe somme que f est continue sur \mathbb{R}_+ .

L'intégrale de DIRICHLET est $f(0)$ et vérifie $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

c. Utilisons le théorème de dérivation sous le signe somme deux fois.

- $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* .
- $\forall x > 0$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (voir a.).
- $\forall x > 0, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{2(1 - \cos(t))}{(x+t)^3}$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \frac{6(1 - \cos(t))}{(x+t)^4}$ sont continues sur \mathbb{R}_+^* .
- $\forall a > 0, \forall (x, t) \in [a; +\infty \times \mathbb{R}_+^*, \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leq \frac{4}{(a+t)^3} = \varphi_a(t)$ et $\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)\right| \leq \frac{12}{(a+t)^4} = \psi_a(t)$ et les fonctions φ_a et ψ_a sont continues et intégrables sur \mathbb{R}_+^* par RIEMANN.

Ainsi, f est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* et que $f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{2(1 - \cos(t))}{(x+t)^3} dt$ et $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{6(1 - \cos(t))}{(x+t)^4} dt$.

Dans cette dernière intégrale, on pose $u : t \mapsto -\frac{1}{3(x+t)^3}$ et $v : t \mapsto 6(1 - \cos(t))$, u et v sont de classe C^1

sur \mathbb{R}_+ et $u(0)v(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ donc, par intégration par parties, $f''(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(x+t)^3} dt$. On pose cette fois-ci $u : t \mapsto -\frac{1}{2(x+t)^2}$ et $v = \sin$ et, avec les mêmes arguments, $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x+t)^2} dt$. Par conséquent, $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - 1 + 1}{(x+t)^2} dt = -f(x) + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t)^2} = -f(x) + \left[-\frac{1}{x+t}\right]_0^{+\infty} = -f(x) + \frac{1}{x}$ ce qui montre que la fonction f est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = \frac{1}{x}$.

5.48 a. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $g_\alpha : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha(1+x)}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et $g_\alpha(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$ et $g_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$. D'après le critère de RIEMANN, g_α est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$ et g_α est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $1 + \alpha > 1$. Comme g_α est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si elle l'est sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$ et que g_α est positive, $f(\alpha)$ est définie si et seulement si $\alpha \in]0; 1[$. Ainsi, $D =]0; 1[$.

b. Soit $h :]0; 1[\times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(\alpha, x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x)}$.

(H₁), pour $x > 0$, $\alpha \mapsto h(\alpha, x)$ est continue sur $]0; 1[$.

(H₂), pour $\alpha \in]0; 1[$, $g_\alpha : x \mapsto h(\alpha, x)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (vu en **a.**).

(H₃), soit $0 < a \leq \alpha \leq b < 1$, $\forall (\alpha, x) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+^*$, $|h(\alpha, x)| = \frac{x^{-\alpha}}{1+x} \leq \frac{x^{-b}}{1+x}$ si $x \in]0; 1]$ et

$|h(\alpha, x)| \leq \frac{x^{-a}}{1+x}$ si $x \in [1; +\infty[$. Soit $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{a,b}(x) = \frac{x^{-b}}{1+x}$ si $x \in]0; 1]$ et

$\varphi_{a,b}(x) = \frac{x^{-a}}{1+x}$ si $x \in [1; +\infty[$. Alors $\varphi_{a,b}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* (avec $\varphi_{a,b}(1) = \frac{1}{2}$) et elle est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Par le théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $]0; 1[$.

c. Dans $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$, on pose $x = \frac{1}{t} = \varphi(t)$ avec φ qui est bien C^1 , strictement décroissante et bijective de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* pour avoir $f(\alpha) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{t^{-\alpha}(1+t^{-1})} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{t^{-\alpha}(1+t^{-1})} \left(-\frac{dt}{t^2}\right)$ donc $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1+t)} = f(1-\alpha)$. Ainsi la courbe de f est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$.

d. La symétrie précédente suggère que c'est en $\frac{1}{2}$ que f atteint une valeur particulière, pourquoi pas son minimum. Soit $\alpha \in D$, alors $f(\alpha) = f(1-\alpha) = \frac{f(\alpha) + f(1-\alpha)}{2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2x^\alpha(1+x)} + \frac{1}{2x^{1-\alpha}(1+x)}\right) dx$ par linéarité de l'intégrale. On l'écrit $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-(1/2)} + x^{(1/2)-\alpha}}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$ et on se rappelle de l'inégalité classique $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ pour $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ de sorte que $f(\alpha) \geq \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = f(0) = [2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})]_0^{+\infty} = \pi$. Ainsi, la valeur minimale prise par f sur D est $f(0) = \pi$.

e. Quand α tend vers 0, c'est au voisinage de $+\infty$ qu'il va y avoir un problème. D'après CHASLES, on a $f(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ est certainement "de l'ordre" de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ et, comme $\frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$, la quantité $f(\alpha)$ se doit d'être assez proche de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha}$. Évaluons la différence, $f(\alpha) - \frac{1}{\alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)}$. Or on peut encadrer $0 \leq \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \leq \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = \frac{1}{1-\alpha}$ et $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2+\alpha}} = \frac{1}{1+\alpha} \leq 1$. Ainsi, $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = O(1)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)} = O(1)$. Par somme, $f(\alpha) - \frac{1}{\alpha} = O(1) = o\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ donc $f(\alpha) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\alpha}$.

5.49 a. Soit $h : \mathbb{R}_+ \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}$ de sorte que $f(x) = \int_0^1 h(x, t) dt$.

(H₁) $\forall t \in [0; 1], x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ par opérations et $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -e^{-(1+t^2)x}$.

(H₂) $\forall x \in \mathbb{R}_+, t \mapsto h(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ sont continues donc intégrables sur le segment $[0; 1]$.

(H₃) $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0; 1], \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-x} \leq 1 = \varphi(t)$ et φ est constante donc intégrable sur $[0; 1]$.

Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et $f'(x) = -\int_0^1 e^{-(1+t^2)x} dt$.

b. Classiquement, $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. De plus, pour $x > 0, \forall t \geq 0, 0 \leq e^{-(1+t^2)x} \leq e^{-x}$ et $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$, donc $0 \leq f(x) \leq \int_0^1 e^{-x} dt = e^{-x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c. Comme la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} , la fonction $h : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} d'après le théorème fondamental de l'intégration et $h'(x) = e^{-x^2}$. De plus, d'après a., g est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ avec $g'(x) = 2xf'(x^2)$. Ainsi, la fonction $a : x \mapsto g(x) + h(x)^2$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ par opérations et $\forall x \geq 0, a'(x) = 2xf'(x^2) + 2h'(x)h(x) = -2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Si $x = 0, a'(0) = 0$ et, si $x > 0$, on a $a'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2x^2} x dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 2e^{-x^2} \left(\int_0^x e^{-t^2} dt - \int_0^1 e^{-t^2x^2} x dt \right)$. Or par le changement de variable $u = xt$, il est clair que $\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^1 e^{-t^2x^2} x dt$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+, a'(x) = 0$. Comme $a' = 0$ sur l'intervalle \mathbb{R}_+ , il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, a(x) = g(x) + h(x)^2 = C \geq 0$. Comme $h(0) = 0$, on en déduit $C = g(0) = f(0) = \frac{\pi}{4}$ d'après a..

d. Comme f est une fonction positive, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{f(x)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4} - g(x)}$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ainsi, on a la valeur de l'intégrale de GAUSS, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ qu'on note $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5.50 a. Pour un réel x , la fonction $h_x : t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est positive et continue sur \mathbb{R}_+ .

- Si $x < 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_x(t) = +\infty$ donc h_x n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+ .
- Si $x = 0, h_0(t) = \frac{1}{1+t^2}$ donc h_0 est intégrable sur \mathbb{R}_+ car une primitive de h_0 est Arctan qui admet une limite finie en $+\infty$.
- Si $x > 0, h_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ou $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-tx})$ donc h_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ par comparaison aux intégrales de référence.

Ainsi, le domaine de définition de la fonction f vaut $D = \mathbb{R}_+$.

b. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$.

(H₁) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* .

(H₂) Pour $x > 0$, la fonction $h_x : t \mapsto h(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ (voir ci-dessus). De plus, la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-tx})$.

Enfin, $t \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

(H₃) Pour $a > 0$ et $(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+$, on a la majoration $\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2} \leq e^{-at} = \varphi_a(t)$ et la fonction φ_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi, par théorème, la fonction f est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* et $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} dt$ par LEIBNIZ. Par conséquent, $f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} + \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

c. Les fonctions $u : t \mapsto \sin(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ donc la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ est la même, par intégration par parties, que celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$. Or $\frac{\sin(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ converge, ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ converge aussi. De même, $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* avec $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge car elle est de même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que g est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

d. Comme les fonctions $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ et $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sont continues sur \mathbb{R}_+^* et que pour tout $x > 0$, on a $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t} dt$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$, il vient $g'(x) = \frac{\cos(x)\sin(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt \right) \cos(x) - \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \right) \sin(x)$ par le théorème fondamental de l'intégration donc $g'(x) = - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt \right) \cos(x) - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \right) \sin(x)$. De même, g' est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $g''(x) = \frac{\cos^2(x)}{x} + \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt \right) \sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \right) \cos(x)$ donc $g''(x) = \frac{1}{x} - g(x)$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Par conséquent, g est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* et solution sur \mathbb{R}_+^* de (E) : $y'' + y = \frac{1}{x}$.

e. $h = f - g$ est C^2 par opérations et $h''(x) = f''(x) - g''(x) = -f(x) + \frac{1}{x} + g(x) - \frac{1}{x} = -(f - g)(x) = -h(x)$ donc $h'' + h = 0$ sur \mathbb{R}_+^* . On sait qu'alors $\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x > 0, h(x) = A \cos(x) + B \sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x + \theta)$. Or $0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$ car $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$. Par encadrement, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. En tant que "reste" d'intégrales convergentes, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = 0$ donc, comme \cos et \sin sont bornées, on a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ ce qui impose $\sqrt{A^2 + B^2} = 0$ donc $A = B = 0$. On déduit donc $f = g$ du fait que $h = 0$.

f. Avec les notations de la question **b.**, comme $\forall x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, |h(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \psi(t)$ et que ψ est intégrable sur \mathbb{R}_+ , la fonction f est continue sur \mathbb{R}_+ par continuité sous le signe somme car $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, $f(0) = [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

En écrivant $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt + \int_x^1 \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt + \int_x^1 \frac{\cos(t) - 1}{t} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} dt$, comme $\int_x^1 \frac{\cos(t) - 1}{t} dt = O(1)$ car $t \mapsto \frac{\cos(t) - 1}{t}$ est bornée sur \mathbb{R}_+ , on trouve $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$. Avec l'intégration par parties de **c.**, on a la relation $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2(t/2)}{t^2} dt$. On pose $t = 2u$ dans cette dernière

intégrale, facile à justifier, et on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2(u)}{4u^2} (2du) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

5.51 a. Si $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est positive et continue sur \mathbb{R}_+ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-xt}$. Traitons deux cas :

- si $x \leq 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-xt} = +\infty$ donc g_x n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+ et $f(x)$ n'existe pas.
- si $x > 0$, par croissances comparées, $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, g_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ donc $\int_0^{+\infty} g_x(t) dt$ converge et $f(x)$ existe.

Par conséquent, le domaine de définition D de f vaut $D = \mathbb{R}_+^*$. Pour $0 < x < y$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-xt} \geq e^{-yt}$ donc $g_x(t) \geq g_y(t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f(x) \geq f(y)$. Ainsi, f est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

b. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} h(x, t) dt$.

(H₁) Pour $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

(H₂) Pour $x > 0$, la fonction $g_x : t \mapsto h(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ (on vient de le voir) et la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{-t^4 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

(H₃) Pour $a > 0$, $(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t^4 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} \leq t^2 e^{-at} = \varphi_a(t)$ avec φ_a qui est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car $a > 0$.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et, avec la formule de LEIBNIZ, $\forall x > 0$, $f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^4 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt$. Pour $0 < x < y$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-xt} \geq e^{-yt}$ ce qui donne $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \leq \frac{\partial h}{\partial x}(y, t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f'(x) \leq f'(y)$. Ainsi, f' est croissante sur \mathbb{R}_+^* . On peut donc conclure d'après le cours que f est une fonction convexe sur \mathbb{R}_+^* .

c. On peut utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu mais, plus élémentairement, $0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} te^{-xt} dt = \left[-t \frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2}$ par intégration par parties avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-xt}}{x}$ qui sont C^1 sur \mathbb{R}_+ et $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)v(t) = 0$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

d. La fonction $t \mapsto t^3 e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $t^3 e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées car $x > 0$.

Ainsi, $g(x)$ existe. On peut procéder à trois intégrations par parties successives (pour passer de t^3 à t^0) ou, plus simple, poser $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ et

$$\text{avoir } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^3}{x^4} e^{-u} du = \frac{\Gamma(4)}{x^4} = \frac{3!}{x^4} = \frac{6}{x^4}.$$

Pour $x > 0$, par linéarité de l'intégrale, on a $|f(x) - g(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} - t^3 e^{-xt} \right) dt \right|$ qu'on écrit aussi

$$|f(x) - g(x)| = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \right) dt = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} \left(\frac{\sqrt{1+t^4} - 1}{\sqrt{1+t^4}} \right) dt \text{ et, avec la quantité conjuguée,}$$

$$|f(x) - g(x)| = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} \left(\frac{(1+t^4) - 1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})} \right) dt = \int_0^{+\infty} t^7 e^{-xt} \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})} \right) dt. \text{ Or on}$$

minore $\forall t \geq 0$, $\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4}) \geq 1$ donc $|f(x) - g(x)| \leq \int_0^{+\infty} t^7 e^{-xt} dt = \frac{\Gamma(8)}{x^8} = \frac{7!}{x^8}$ comme ci-dessus.

On a donc $f(x) - g(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^8}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^4}\right) \underset{+\infty}{=} o(g(x))$, ce qui prouve que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) = \frac{6}{x^4}$.

e. Méthode 1 : pour $x \in]0; 1]$, par CHASLES, $f(x) = \int_0^{1/x} h(x, t) dt + \int_{1/x}^{+\infty} h(x, t) dt \geq \int_{1/x}^{+\infty} h(x, t) dt$. Or, on a $\int_{1/x}^{+\infty} h(x, t) dt = \int_{1/x}^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/x}^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/x}^{+\infty} t e^{-xt} dt$ car $\sqrt{1+t^4} \leq \sqrt{2} t^2$ pour $t \in [1/x; +\infty[\subset [1; +\infty[$, d'où $\sqrt{2} \int_{1/x}^{+\infty} h(x, t) dt \geq \left[-t \frac{e^{-xt}}{x} \right]_{1/x}^{+\infty} + \int_{1/x}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x} dt = \frac{1}{ex^2} + \left[-\frac{e^{-xt}}{x^2} \right]_{1/x}^{+\infty} = \frac{2}{ex^2}$ avec la même intégration par parties qu'à la question c.. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{ex^2} = +\infty$, par encadrement, on obtient finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Méthode 2 : pour $x > 0$, par CHASLES, $f(x) = \int_0^1 h(x, t) dt + \int_1^{+\infty} h(x, t) dt \geq \int_1^{+\infty} h(x, t) dt$. Or, on a $\int_1^{+\infty} h(x, t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{t^2} dt$ car $\forall t \geq 1, 1+t^4 \leq 2t^4$. Ainsi, comme $\int_1^{+\infty} t e^{-xt} dt = \left[-t \frac{e^{-xt}}{x} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x} dt = \frac{e^{-x}}{x} + \left[-\frac{e^{-xt}}{x^2} \right]_1^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2}$, et que l'on a la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2} \right) = +\infty$, par encadrement, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour aller plus loin, avec le changement de variable $t = \varphi(u) = \frac{u}{x}$ avec la fonction φ qui est de classe C^1 , bijective et strictement croissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ , on a $f(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{x^4 + u^4}} du$ donc la relation $x^2 f(x) = \int_0^{+\infty} a(x, u) du$ en posant $a(x, u) = \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{x^4 + u^4}}$.

(H₁) Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} a(x, u) = u e^{-u} = b(u)$.

(H₂) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u \mapsto a(x, u)$ et $u \mapsto b(u)$ sont continues sur \mathbb{R}_+ .

(H₃) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in \mathbb{R}_+$, $|a(x, u)| = \left| \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{x^4 + u^4}} \right| \leq u e^{-u} = b(u)$ avec b continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ comme avant.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 f(x) = \int_0^{+\infty} b(u) du = \Gamma(2) = 1$.

Par conséquent, $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

5.52 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est positive et continue sur \mathbb{R}_+^* , $g_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$.

D'après RIEMANN, g_x est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $x < 1$ et g_x est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $1+x > 1$. Ainsi, g_x étant intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si elle l'est sur $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$, g_x est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $x \in]0; 1[$. Par conséquent, le domaine de définition de f est $D =]0; 1[$ car pour une fonction continue positive, la convergence ou l'absolue convergence de l'intégrale sont équivalentes.

b. Soit $h :]0; 1[\times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} h(x, t) dt$.

(H₁) pour $t > 0$, $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur $]0; 1[$.

(H₂) pour $x \in]0; 1[$, $t \mapsto h(x, t) = g_x(t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* d'après a..

(H₃) soit $0 < a < b < 1$, $\forall (x, t) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+^*$, $|h(x, t)| = \frac{t^{-x}}{1+t} \leq \frac{t^{-b}}{1+t}$ si $t \in]0; 1]$ et $|h(x, t)| \leq \frac{t^{-a}}{1+t}$

si $t \in [1; +\infty[$. Soit $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{a,b}(t) = \frac{t^{-b}}{1+t}$ si $t \in]0; 1]$ et $\varphi_{a,b}(t) = \frac{t^{-a}}{1+t}$ si $t \in [1; +\infty[$ et $\forall (x, t) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+^*$, $|h(x, t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$ d'après ce qui précède. La fonction $\varphi_{a,b}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* (avec $\varphi_{a,b}(1) = \frac{1}{2}$) et elle est intégrable sur \mathbb{R}_+^* car $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^b}$ avec $b < 1$ et $\varphi_{a,b}(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{a+1}}$ avec $1+a > 1$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $]0; 1[$.

c. Si $x \in]0; 1[$, on a clairement $1-x \in]0; 1[$. De plus, en effectuant dans $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$ le changement de variable $t = \frac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ est de classe C^1 , bijective et strictement décroissante de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* , on

a $f(x) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{u^{-x}(1+u^{-1})} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1-x}(1+u)} = f(1-x)$. Ainsi la courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. De plus, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \left[2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})\right]_0^{+\infty} = \pi$.

d. Méthode 1 : quand x tend vers 0, c'est au voisinage de $t = +\infty$ qu'il va y avoir un problème et que l'intégrale va être grande. Or $g_x(t) \sim \frac{1}{t^{x+1}}$ donc on approche $f(x)$ par $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \frac{1}{x}$. Évaluons la

différence entre ces quantités, $f(x) - \frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+x}(1+t)}$.

Or $0 \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} = \frac{1}{1-x}$ et $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+x}(1+t)} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2+x}} = \frac{1}{1+x} \leq 1$. Ainsi,

$\int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} = O(1)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+x}(1+t)} = O(1)$. Par somme : $f(x) - \frac{1}{x} = O(1)$ donc $f(x) \sim \frac{1}{x}$.

Méthode 2 : on pouvait aussi poser $t = u^{1/x} = \varphi(u)$ avec φ qui est de classe C^1 et une bijection strictement croissante de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* et on a la relation $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})} du$. Soit $a :]0; 1[\times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie

par $a(x, u) = \frac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})}$ de sorte que $xf(x) = \int_0^{+\infty} a(x, u) du$.

(H₁) si $u \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} a(x, u) = d(u)$ avec $d(u) = 0$ si $u < 0$, $d(u) = \frac{1}{2}$ si $u = 1$ et $d(u) = \frac{1}{u^2}$ si $u > 1$.

(H₂) si $x \in]0; 1[$, les fonctions $g_x : t \mapsto g(x, t)$ et d sont continues par morceaux sur \mathbb{R}_+^* .

(H₃) si $(x, u) \in]0; 1[\times \mathbb{R}_+^*$, on a $|a(x, u)| \leq \varphi(u)$ avec $\varphi(u) = 1$ si $u < 1$, $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ et $\varphi(u) = \frac{1}{u^2}$ et φ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R}_+^* par RIEMANN.

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} a(x, u) du$,

on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = \int_0^{+\infty} d(u) du = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{+\infty} = 1$ donc $f(x) \sim \frac{1}{x}$.

5.53 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0; +\infty[$ avec un prolongement par continuité

$f_x(0) = x$ en 0 car $\operatorname{Arctan}(xt) \sim xt$ si $x \neq 0$. De plus, $f_x(t) = O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ car Arctan est bornée donc f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ par comparaison aux intégrales de RIEMANN ($3 > 1$). Ainsi, g est définie sur \mathbb{R} et elle est clairement impaire car Arctan l'est.

b. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$.

(H₁) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

(H₂) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (déjà vu).

(H₃) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| = \left|\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\right| \leq \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ avec φ qui est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, g est C^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

c. Si $x \neq \pm 1$ et $t \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} = \frac{x^2(1+t^2) - (1+x^2t^2)}{(x^2-1)(1+t^2)(1+x^2t^2)}$ en réduisant au

même dénominateur, $\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} = \frac{x^2-1}{(x^2-1)(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$.

d. Si on prend $x \geq 0$ et $x \neq 1$, d'après **c.**, $g'(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} \right) dt$ donc

$g'(x) = \frac{x}{x^2-1} \left[\text{Arctan}(xt) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{(1-x^2)} \left[\text{Arctan}(t) \right]_0^{+\infty}$ et, comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(xt) = \frac{\pi}{2}$, cela donne

$g'(x) = \frac{x\pi}{2(x^2-1)} + \frac{\pi}{2(1-x^2)} = \frac{(x-1)\pi}{2(x^2-1)} = \frac{\pi}{2(1+x)}$. Comme la fonction g' est continue en 1 d'après **b.**,

on a $g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g'(x) = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2(1+1)}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$. Comme \mathbb{R}_+ est un intervalle, il

existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \frac{\pi \ln(1+x)}{2} + \lambda$. Or $g(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \frac{\pi \ln(1+x)}{2}$.

e. Par imparité de F , on a $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $g(x) = -g(-x) = -\frac{\pi \ln(1-x)}{2}$ d'après **d.**

5.54 Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+ , prolongeable par continuité en 0 en posant $h_x(0) = x$ car $\sin(xt) = xt + o(t)$ donc $h_x(t) = x + o(1)$ et $h_x(t) = o(e^{-t})$ donc h_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ par comparaison à des intégrales de référence. Ainsi, la fonction φ est définie sur \mathbb{R} .

Soit l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t}$.

(H₁) Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

(H₂) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (on vient de le voir) et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \cos(xt)e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

(H₃) $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = |\cos(xt)|e^{-t} \leq e^{-t} = \psi(t)$ et ψ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, φ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et, avec la formule de LEIBNIZ, il vient $\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt = \text{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{ixt-t} dt \right) = \text{Re} \left(\frac{1}{1-ix} \right) = \frac{1}{1+x^2}$. Comme \mathbb{R} est un intervalle, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ implique l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = C + \text{Arctan}(x)$. Or $g(0) = 0$, d'ailleurs g est clairement impaire, donc $C = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \text{Arctan}(x)$.

5.55 a. Clairement, la fonction f_x est continue sur $]0; 1[$ et elle est de signe constant sur $]0; 1[$: f_x est positive si $x < 0$ et f_x est négative si $x > 0$. De plus, si $x \neq 0$, comme $t^x - 1 = e^{x \ln(t)} - 1$ et que $\lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(t) = 0$, on a $t^x - 1 \underset{1^-}{\sim} x \ln(t)$ donc $f_x(t) \underset{1^-}{\sim} x$ donc f_x se prolonge par continuité en 1 en posant $f_x(1) = x$. Ainsi, la fonction f_x est toujours intégrable sur le segment $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$.

• Si $x = 0$, alors $f_0 = 0$ donc f_0 est intégrable sur $]0; 1]$.

• Si $x > 0$, $f_x(t) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{\ln(t)}$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(t)} = 0$ donc f_x se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = 0$. f_x est donc intégrable car elle se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0; 1]$.

• Si $x < 0$, $f_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{-x} \ln(t)}$ donc $f_x(t) = o\left(\frac{1}{t^{-x}}\right)$ car $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$ et, d'après RIEMANN, f_x est intégrable sur $]0; 1]$ car $-x < 1$.

Ainsi, f_x est intégrable sur $]0; 1]$ pour tout réel $x \in \mathbb{D}$.

b. Soit $g : \mathbb{D} \times]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{t^x - 1}{\ln(t)}$. Alors :

(H₁) $\forall t \in]0; 1[$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{D} .

(H₂) $\forall x \in D$, la fonction $f_x : t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0; 1[$ (on vient de le voir) et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = t^x$ est continue sur $]0; 1[$.

(H₃) Soit $a \in D$, $\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times]0; 1[$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = t^a \leq t^a = \varphi_a(t)$ et φ_a intégrable sur $]0; 1[$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est C^1 sur D et $\forall x > -1$, $f'(x) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$.

Comme D est un intervalle et que $f(0) = 0$, en intégrant, on a donc $\forall x > -1$, $f(x) = \ln(1+x)$.

5.56 a. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} dt$ est continue sur \mathbb{R}_+ . De plus, $f_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{\ln(t)}{x^2} = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées et $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc f_x est intégrable sur $]0; 1[$ et $[1; +\infty[$, donc sur \mathbb{R}_+^* , par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Ainsi, $F(x)$ existe pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et la fonction F est bien définie. Soit $g : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2}$.

(H₁) $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{2x \ln(t)}{(x^2 + t^2)^2}$.

(H₂) $\forall x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* d'après ce qui précède et la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

(H₃) Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\forall (x, t) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{2x |\ln(t)|}{(x^2 + t^2)^2} \leq \frac{2b |\ln(t)|}{(a^2 + t^2)^2} = \varphi_{a,b}(t)$ et $\varphi_{a,b}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* car $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \frac{2b |\ln(t)|}{a^4} = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\varphi_{a,b}(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2b |\ln(t)|}{t^4} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

b. Dans $F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du$, on effectue le changement de variable $u = \frac{1}{t} = \psi(t)$ avec ψ qui est une bijection strictement décroissante de classe C^1 de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* pour avoir $F(1) = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/t)}{1+(1/t)^2} \left(-\frac{dt}{t^2}\right)$ donc $F(1) = -F(1)$ et $F(1) = 0$.

Méthode 1 : par la formule de LEIBNIZ et **a.**, on obtient $\forall x > 0$, $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{2x \ln(t)}{(x^2 + t^2)^2} dt$ qu'on

écrit $F'(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} \times \frac{-2t}{(x^2 + t^2)^2} dt$ et on pose $u : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ et $v : t \mapsto \frac{1}{x^2 + t^2} - \frac{1}{x^2}$ (pour que

la fonction v s'annule en 0) de sorte que u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $F'(x) = x \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt$.

Comme $u(t)v(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^3}$ et $u(t)v(t) \underset{0}{\sim} \frac{-t \ln(t)}{x^2}$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances

comparées ce qui montre, par intégration par parties, que $F'(x) = x[u(t)v(t)]_0^{+\infty} - x \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt$ qu'on

écrit $F'(x) = -x \int_0^{+\infty} \frac{1 - \ln(t)}{t^2} \times \frac{-t^2}{x^2(x^2 + t^2)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \ln(t)}{x(x^2 + t^2)} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2} - \frac{F(x)}{x}$ (les deux

intégrales convergent). De plus, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2} = \left[\frac{1}{x} \operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$ donc $\forall x > 0$, $F'(x) + \frac{F(x)}{x} = \frac{\pi}{2x^2}$.

On résout cette équation différentielle classiquement par variation de la constante pour avoir l'existence d'une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $F(x) = \frac{\pi \ln(x)}{2x} + \frac{\lambda}{x}$. Or $F(1) = 0$ donc $\lambda = 0$ et on a $\forall x > 0$, $F(x) = \frac{\pi \ln(x)}{2x}$.

Méthode 2 : pour $x > 0$, on effectue le changement de variable $t = ux = \varphi(u)$ avec φ qui est bien une

bijection strictement croissante de classe C^1 de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* et on a donc $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ux)}{x^2 + x^2 u^2} x du$ d'où

la relation $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du + \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x(1+u^2)} du$ (les deux intégrales convergent comme en **a.**) de

sorte que $F(x) = \frac{F(1)}{x} + \frac{\ln(x)}{x} [\operatorname{Arctan}(u)]_0^{+\infty} = \frac{F(1)}{x} + \frac{\pi \ln(x)}{2x}$. Ceci prouve aussi que la fonction F est de

classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* sans théorème de dérivation mais ce n'est pas l'esprit de l'exercice. Comme $F(1) = 0$, on en déduit que $\forall x > 0$, $F(x) = \frac{\pi \ln(x)}{2x}$.

5.57 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0; +\infty[$ avec un prolongement par continuité en 0 donné par $f_x(0) = x$ car $\text{Arctan}(xt) \underset{0}{=} xt + o(t)$ donc $f_x(t) \underset{0}{=} x + o(1)$. De plus, $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ car Arctan est bornée donc f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $3 > 1$. F est donc définie sur $D = \mathbb{R}$ et elle est clairement impaire car Arctan l'est.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$.

(H₁) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^0 sur \mathbb{R} .

(H₂) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (déjà vu).

(H₃) Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in [-a; a]$ et $t > 0$, $|f(x, t)| = \frac{|\text{Arctan}(xt)|}{t} \times \frac{1}{1+t^2} \leq \varphi_a(t) = \frac{a}{1+t^2}$ et φ_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car Arctan est 1-lipschitzienne sur \mathbb{R} car $0 \leq \text{Arctan}'(t) = \frac{1}{1+t^2} \leq 1$ donc $|\text{Arctan}(xt)| = |\text{Arctan}(xt) - \text{Arctan}(0)| \leq 1 \times |xt - 0| = |x|t \leq at$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, F est continue sur \mathbb{R} .

b. On souhaite maintenant dériver.

(H₁) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

(H₂) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ et la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* par opérations.

(H₃) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \right| \leq \psi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et ψ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ comme φ_a ci-dessus.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, F est C^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

c. Si $x \neq 1$, $x > 0$, on décompose $\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}$ en éléments simples donc $F'(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} \right)$ et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(xt) = \frac{\pi}{2}$, cela donne $F'(x) = \frac{x}{x^2-1} \left[\text{Arctan}(xt) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{(1-x^2)} \left[\text{Arctan}(t) \right]_0^{+\infty} = \frac{x\pi}{2(x^2-1)} + \frac{\pi}{2(1-x^2)} = \frac{\pi}{2(1+x)}$. Comme F' est continue en 1, on a $F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F'(x) = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2(1+1)}$. Ainsi, la relation $F'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$

est valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. En intégrant sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* , il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \frac{\ln(1+x)}{2} + C$. Comme F est continue en 0 d'après a. et que $F(0) = 0$, on a $F(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{\pi \ln(1+0)}{2} + C = C$ donc $C = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \frac{\pi \ln(1+x)}{2}$ et, par imparité de F , on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \text{sgn}(x) \frac{\pi \ln(1+|x|)}{2}$.

5.58 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto \frac{\text{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0; +\infty[$ avec un prolongement par continuité en 0 donné par $f_x(0) = x$ car $\text{Arctan}(tx) \underset{0}{\sim} tx + o(t)$ et $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car Arctan est bornée donc f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ d'après RIEMANN ($2 > 1$). F est donc définie sur \mathbb{R} et elle est clairement impaire car Arctan l'est.

b. On va utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ si $t > 0$ et $f(x, 0) = x$.

(H₁) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ par opérations et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

(H₂) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ (déjà vu).

(H₃) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ et la fonction φ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$.

Par le fameux théorème, F est C^1 sur \mathbb{R}_+ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

c. Si $x > 0$ et $x \neq 1$, on décompose $\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}$ en éléments

simples donc $F'(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} \right)$ et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(xt) = \frac{\pi}{2}$, cela

donne $F'(x) = \frac{x}{x^2-1} \left[\text{Arctan}(xt) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{1-x^2} \left[\text{Arctan}(t) \right]_0^{+\infty}$ d'où $F'(x) = \frac{x\pi}{2(x^2-1)} + \frac{\pi}{2(1-x^2)} = \frac{\pi}{2(1+x)}$.

Comme F' est continue en 0 et en 1 d'après **b.**, on a $F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = \frac{\pi}{2}$ et $F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F'(x) = \frac{\pi}{4}$ ce qui montre que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$. Comme \mathbb{R}_+ est un intervalle, en intégrant, il existe

une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \frac{\pi \ln(1+x)}{2} + \lambda$. Mais $F(0) = 0$ donc $\lambda = 0$ et on a

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \frac{\pi \ln(1+x)}{2}$. Puisque F est impaire, on a $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $F(x) = -F(-x) = -\frac{\pi \ln(1-x)}{2}$, ce

qu'on peut résumer en $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \text{sgn}(x) \frac{\pi \ln(1+|x|)}{2}$.

d. La fonction $h : \theta \mapsto \ln(\sin(\theta))$ est continue sur l'intervalle $I =]0; \frac{\pi}{2}[$ et, comme $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$, on a

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{\sin(\theta)}{\theta}\right) = 0$ donc $\ln(\sin(\theta)) \underset{0}{=} \ln(\theta) + o(1)$ ce qui implique que $\ln(\sin(\theta)) \underset{0}{=} \ln(\theta) + o(\ln(\theta))$ car

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \ln(\theta) = -\infty$ d'où $h(\theta) \underset{0}{\sim} \ln(\theta) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right)$ donc h est intégrable sur I par comparaison aux intégrales de

RIEMANN donc J existe. On pose $t = \tan(\theta)$, ou $\theta = \text{Arctan}(t) = \psi(t)$ avec ψ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de \mathbb{R}_+^* dans $]0; \frac{\pi}{2}[$ et $J = \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \times \left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$. Posons maintenant

$u : t \mapsto \ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ et $v : t \mapsto \text{Arctan}(t)$, u et v étant de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* avec $u(t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$ et $v(t) \underset{0}{\sim} t$

donc $u(t)v(t) \underset{0}{\sim} t \ln(t)$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 1$ car $\sqrt{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} t$

et $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$. Par intégration par parties, comme $u(t) = \ln(t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$

donc $u'(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{t(1+t^2)}$, on a $J = -\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t(1+t^2)} dt = -F(1) = -\frac{\pi \ln(2)}{2} \sim -1,09$ d'après **c.**

5.59 a. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, comme $x^2 - 2x \cos(\theta) + 1 = (x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) > 0$ car $\sin(\theta) > 0$ si $\theta \in]0; \pi[$ et que $(x - \cos(\theta))^2 > 0$ si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ car $x \neq \pm 1$, la fonction $f_x : \theta \mapsto \ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1)$ est continue sur le segment $[0; \pi]$ donc $I(x)$ existe.

b. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $(x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = (x - \cos(\theta) - i \sin(\theta))(x - \cos(\theta) + i \sin(\theta)) = |x - e^{i\theta}|^2$ pour $\theta \in [0; \pi]$ donc $f_x(\theta) = 2 \ln(|x - e^{i\theta}|)$ de sorte que, par linéarité de l'intégrale, $I(x) = 2 \int_0^\pi \ln(|x - e^{i\theta}|) d\theta$.

c. Par propriété du logarithme, on a $S_n(x) = \frac{2\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} |x - e^{i\frac{k\pi}{n}}|\right) = \frac{\pi}{n} \ln\left(\left|\prod_{k=0}^{n-1} (x - e^{i\frac{k\pi}{n}})\right|^2\right)$ donc

$S_n(x) = \frac{\pi}{n} \ln \left((x-1)^2 \left| \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{n-1} (x - e^{\frac{ik\pi}{n}})(x - e^{-\frac{ik\pi}{n}}) \right| \right) = \frac{\pi}{n} \ln \left((x-1)^2 \left| \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{2n-1} (x - e^{\frac{ik\pi}{n}}) \right| \right)$. Or on connaît les $2n$ racines distinctes de $X^{2n} - 1$ qui sont les éléments de $\mathbb{U}_{2n} = \{e^{\frac{ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket\}$, ainsi on factorise $X^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} (X - e^{\frac{ik\pi}{n}})$. Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \frac{\pi}{n} \ln \left(|x^{2n} - 1| \cdot \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la somme de RIEMANN $R_n(x) = \frac{\pi-0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_x \left(0 + \frac{k(\pi-0)}{n} \right)$ associée à la fonction f_x continue sur le segment $[0; \pi]$. D'après le cours, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \int_0^\pi f_x(\theta) d\theta$. Or, avec la question **b.**, on a $R_n(x) = \frac{\pi-0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(|x - e^{\frac{ik\pi}{n}}|^2 \right)$ donc $R_n(x) = S_n(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1) d\theta = I(x)$.

- Si $|x| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(|x^{2n} - 1| \cdot \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) = \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$ ce qui montre avec ce qui précède (pas d'indétermination) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \ln \left(|x^{2n} - 1| \cdot \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) = 0$ d'où $I(x) = 0$.
- Si $|x| > 1$, on a $S_n(x) = \frac{\pi}{n} \ln \left(|x|^{2n} \cdot |1 - x^{-2n}| \cdot \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) = 2\pi \ln(|x|) + \frac{\pi}{n} \ln(|1 - x^{-2n}|) + \frac{\pi}{n} \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$ et, avec les mêmes arguments, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 2\pi \ln(|x|)$ donc $I(x) = 2\pi \ln(|x|)$.

d. Soit $h : (\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) \times [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par la relation $h(x, \theta) = \ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1)$ de sorte que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $I(x) = \int_0^\pi h(x, \theta) d\theta$.

(H₁) $\forall \theta \in [0; \pi]$, la fonction $x \mapsto h(x, \theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(H₂) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, la fonction $f_x : \theta \mapsto h(x, \theta)$ est continue et intégrable sur $[0; \pi]$ (on l'a vu en question **a.**) et $\theta \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, \theta) = \frac{2(x - \cos(\theta))}{x^2 - 2x \cos(\theta) + 1}$ est continue sur $[0; \pi]$.

(H₃) - Soit $x \in [a; b] \subset]1; +\infty[$ et $\theta \in [0; \pi]$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, \theta) \right| = \frac{2(x - \cos(\theta))}{|x - e^{i\theta}|^2} \leq \frac{2(b+1)}{(a-1)^2} = \varphi_{a,b}(\theta)$ et $\varphi_{a,b}$ est continue donc intégrable sur le segment $[0; \pi]$.

- Soit $x \in [a; b] \subset]-\infty; -1[$ et $\theta \in [0; \pi]$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, \theta) \right| = \frac{2(\cos(\theta) - x)}{|x - e^{i\theta}|^2} \leq \frac{2(-a+1)}{(b-1)^2} = \psi_{a,b}(\theta)$ et $\psi_{a,b}$ est continue donc intégrable sur le segment $[0; \pi]$.

- Soit $x \in [-a; a] \subset]-1; 1[$ et $\theta \in [0; \pi]$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, \theta) \right| = \frac{2|x - \cos(\theta)|}{|x - e^{i\theta}|^2} \leq \frac{2(a+1)}{(1-a)^2} = \Theta_a(\theta)$ et Θ_a est continue donc intégrable sur le segment $[0; \pi]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction I est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et, d'après la formule de LEIBNIZ, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $I'(x) = \int_0^\pi \frac{2(x - \cos(\theta))}{x^2 - 2x \cos(\theta) + 1} d\theta$.

On pose $\theta = 2 \operatorname{Arctan}(u) = \varphi(u)$ avec φ qui est de classe C^1 , strictement croissante et bijective de $[0; +\infty[$ dans $[0; \pi[$ et, par changement de variable, comme $\cos(\theta) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\varphi'(u) = \frac{2}{1+u^2}$, on obtient la relation

$$I'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2(x(1+u^2) - (1-u^2))}{(1+x^2)(1+u^2) - 2x(1-u^2)} \left(\frac{2}{1+u^2} \right) du = 4 \int_0^{+\infty} \frac{(x-1) + (x+1)u^2}{(1+u^2)((x-1)^2 + (1+x)^2 u^2)} du.$$

Pour $x \neq 0$, on décompose $\frac{(x-1) + (x+1)u}{(1+u)((x-1)^2 + (1+x)^2 u)} = \frac{\alpha}{1+u} + \frac{\beta}{(x-1)^2 + (1+x)^2 u}$ en éléments simples et, classiquement, $\alpha = \frac{1}{2x}$ et $\beta = \frac{x^2-1}{2x}$. Ainsi, $I'(x) = \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+u^2} + \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2 + (1+x)^2 u^2} \right) du$. Les deux

intégrales convergent donc, par linéarité, on a $I'(x) = \frac{2}{x} \left[\operatorname{Arctan}(u) \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{1 + \left(\frac{(x+1)u}{x-1} \right)^2} du$ donc

$$I'(x) = \frac{2}{x} \left[\operatorname{Arctan}(u) \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{x} \left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{(x+1)u}{x-1} \right) \right]_0^{+\infty}.$$

- Si $|x| > 1$, $\frac{x+1}{x-1} > 0$ donc $\left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{(x+1)u}{x-1} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ et on a $I'(x) = \frac{2\pi}{x}$.
- Si $|x| < 1$ et $x \neq 0$, $\frac{x+1}{x-1} < 0$ donc $\left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{(x+1)u}{x-1} \right) \right]_0^{+\infty} = -\frac{\pi}{2}$ et on a $I'(x) = 0$. Par continuité de I' en 0, on a aussi $I'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} I'(x) = 0$ donc $\forall x \in]-1; 1[$, $I'(x) = 0$.

En intégrant sur les trois intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 1[$ et $]1; +\infty[$, il existe trois constantes C_1, C_2, C_3 réelles telles que $\forall x \in]-\infty; -1[$, $I(x) = 2\pi \ln(|x|) + C_1$, $\forall x \in]-1; 1[$, $I(x) = C_2$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $I(x) = 2\pi \ln(x) + C_3$. Comme $I(0) = 0$, on a $C_2 = 0$. Pour $|x| > 1$, on a $I(x) - 2\pi \ln(|x|) = \int_0^\pi (\ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1) - \ln(|x|^2)) d\theta$. Ainsi, $I(x) - 2\pi \ln(|x|) = \int_0^\pi \ln \left(1 - \frac{2 \cos(\theta)}{x} + \frac{1}{x^2} \right) d\theta = I\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc $I(x) = 2\pi \ln(|x|)$ ce qui montre que $C_1 = C_3 = 0$. On retrouve, comme avant, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $I(x) = 2\pi \ln(|x|)$ si $|x| > 1$ et $I(x) = 0$ si $|x| < 1$.

5.60 a. Si $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est positive et continue sur \mathbb{R}_+ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} t e^{-xt}$. Traitons deux cas :

- si $x \leq 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-xt} = +\infty$ donc g_x n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+ et $f(x)$ n'existe pas.
- si $x > 0$, par croissances comparées, $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} t e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, g_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ donc $\int_0^{+\infty} g_x(t) dt$ converge et $f(x)$ existe.

Par conséquent, le domaine de définition D de f vaut $D = \mathbb{R}_+^*$. Pour $0 < x < y$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-xt} \geq e^{-yt}$ donc $g_x(t) \geq g_y(t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f(x) \geq f(y)$. Ainsi, f est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

b. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} h(x, t) dt$.

(H₁) Pour $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

(H₂) Pour $x > 0$, la fonction $g_x : t \mapsto h(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ (on vient de le voir) et la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{-t^4 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

(H₃) Pour $a > 0$, $(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t^4 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} \leq t^2 e^{-at} = \varphi_a(t)$ avec φ_a qui est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car $a > 0$.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et, avec la formule de LEIBNIZ, $\forall x > 0$, $f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^4 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt$. Pour $0 < x < y$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-xt} \geq e^{-yt}$ ce qui donne $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \leq \frac{\partial h}{\partial x}(y, t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f'(x) \leq f'(y)$. Ainsi, f' est croissante sur \mathbb{R}_+^* . On peut donc conclure d'après le cours que f est une fonction convexe sur \mathbb{R}_+^* .

c. On peut utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu mais, plus élémentairement, $0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} t e^{-xt} dt = \left[-t \frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2}$ par intégration par parties avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-xt}}{x}$ qui sont C^1 sur \mathbb{R}_+ et $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)v(t) = 0$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

d. La fonction $t \mapsto t^3 e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $t^3 e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées car $x > 0$.

Ainsi, $g(x)$ existe. On peut procéder à trois intégrations par parties successives (pour passer de t^3 à t^0) ou, plus simple, poser $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ et

avoir $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^3}{x^4} e^{-u} du = \frac{\Gamma(4)}{x^4} = \frac{3!}{x^4} = \frac{6}{x^4}$.

Pour $x > 0$, par linéarité de l'intégrale, on a $|f(x) - g(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} - t^3 e^{-xt} \right) dt \right|$ qu'on écrit aussi

$$|f(x) - g(x)| = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \right) dt = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} \left(\frac{\sqrt{1+t^4} - 1}{\sqrt{1+t^4}} \right) dt$$

et, avec la quantité conjuguée,

$$|f(x) - g(x)| = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} \left(\frac{(1+t^4) - 1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})} \right) dt = \int_0^{+\infty} t^7 e^{-xt} \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})} \right) dt.$$

Or on minore $\forall t \geq 0, \sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4}) \geq 1$ donc $|f(x) - g(x)| \leq \int_0^{+\infty} t^7 e^{-xt} dt = \frac{\Gamma(8)}{x^8} = \frac{7!}{x^8}$ comme ci-dessus.

On a donc $f(x) - g(x) = O\left(\frac{1}{x^8}\right) = o\left(\frac{1}{x^4}\right) = o(g(x))$, ce qui prouve que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) = \frac{6}{x^4}$.

e. Méthode 1 : pour $x \in]0; 1]$, par CHASLES, $f(x) = \int_0^{1/x} h(x, t) dt + \int_{1/x}^{+\infty} h(x, t) dt \geq \int_{1/x}^{+\infty} h(x, t) dt$. Or,

$$\text{on a } \int_{1/x}^{+\infty} h(x, t) dt = \int_{1/x}^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/x}^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/x}^{+\infty} t e^{-xt} dt$$

$$\text{car } \sqrt{1+t^4} \leq \sqrt{2} t^2 \text{ pour } t \in [1/x; +\infty[\subset [1; +\infty[, \text{ d'où } \sqrt{2} \int_{1/x}^{+\infty} h(x, t) dt \geq \left[-t \frac{e^{-xt}}{x} \right]_{1/x}^{+\infty} + \int_{1/x}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x} dt = \frac{1}{ex^2} + \left[-\frac{e^{-xt}}{x^2} \right]_{1/x}^{+\infty} = \frac{2}{ex^2}$$

avec la même intégration par parties qu'à la question **c.** Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{ex^2} = +\infty$, par encadrement, on

obtient finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Méthode 2 : pour $x > 0$, par CHASLES, $f(x) = \int_0^1 h(x, t) dt + \int_1^{+\infty} h(x, t) dt \geq \int_1^{+\infty} h(x, t) dt$. Or, on

$$\text{a } \int_1^{+\infty} h(x, t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{t^2} dt \text{ car } \forall t \geq 1, 1+t^4 \leq 2t^4. \text{ Ainsi, comme}$$

$$\int_1^{+\infty} t e^{-xt} dt = \left[-t \frac{e^{-xt}}{x} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x} dt = \frac{e^{-x}}{x} + \left[-\frac{e^{-xt}}{x^2} \right]_1^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2},$$

et que l'on a la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2} \right) = +\infty$, par encadrement, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour aller plus loin, avec le changement de variable $t = \varphi(u) = \frac{u}{x}$ avec la fonction φ qui est de classe

C^1 , bijective et strictement croissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ , on a $f(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{x^4 + u^4}} du$ donc la relation

$$x^2 f(x) = \int_0^{+\infty} a(x, u) du \text{ en posant } a(x, u) = \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{x^4 + u^4}}.$$

(H₁) Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} a(x, u) = u e^{-u} = b(u)$.

(H₂) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u \mapsto a(x, u)$ et $u \mapsto b(u)$ sont continues sur \mathbb{R}_+ .

(H₃) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in \mathbb{R}_+$, $|a(x, u)| = \left| \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{x^4 + u^4}} \right| \leq u e^{-u} = b(u)$ avec b continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ comme avant.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 f(x) = \int_0^{+\infty} b(u) du = \Gamma(2) = 1$.

Par conséquent, $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

5.61 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $g_x :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_x(t) = |\ln(t)|^x = e^{x \ln(|\ln(t)|)}$. La fonction g_x est continue sur $]0; 1[$ par opérations. Comme $\ln(t) \underset{1^-}{\sim} t - 1$, on a $g_x(t) \underset{1^-}{\sim} (1-t)^x = \frac{1}{(1-t)^{-x}}$. Traitons plusieurs cas :

- Si $x < 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} |\ln(t)| = +\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} g_x(t) = 0$ et g_x se prolonge par continuité en 0 avec $g_x(0) = 0$.
- Si $x \geq 0$, par croissances comparées, $g_x(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc g_x est intégrable en 0.

- Comme $g_x(t) \underset{1^-}{\sim} (1-t)^x = \frac{1}{(1-t)^{-x}}$, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, g_x est intégrable en 1 si et seulement si $-x < 1 \iff x > -1$.

Ainsi, g_x est intégrable sur $]0; 1[$ si et seulement si $x > -1$. Comme la fonction g_x est positive sur $]0; 1[$, g_x est intégrable sur $]0; 1[$ si et seulement si $\int_0^1 g_x$ converge. Par conséquent, $D =]-1; +\infty[$.

b. Posons $g :]1; +\infty[\times]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = |\ln(t)|^x = e^{x \ln(|\ln(t)|)}$ de sorte que $f(x) = \int_0^1 g(x, t) dt$.

(H₁) Pour $t \in]0; 1[$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^∞ sur D et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) = (\ln(|\ln(t)|))^k g(x, t)$.

(H₂) Pour $x \in D$, $g_x : t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0; 1[$ d'après **a.**.

(H₃) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D$, $t \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t)$ est continue sur $]0; 1[$.

(H₄) Pour $[a; b] \subset D$, $t \in]0; 1[$ et $x \in [a; b]$, on a $\left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) \right| = |\ln(|\ln(t)|)|^k e^{x \ln(|\ln(t)|)}$. Comme on

a $\ln(|\ln(t)|) \leq 0 \iff t > \frac{1}{e}$, on a $\left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_{k,a,b}(t)$ en définissant $\varphi_{k,a,b} :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$\varphi_{k,a,b}(t) = |\ln(|\ln(t)|)|^k e^{b \ln(|\ln(t)|)}$ si $t \leq \frac{1}{e}$ et $\varphi_{k,a,b}(t) = |\ln(|\ln(t)|)|^k e^{a \ln(|\ln(t)|)}$ si $t \geq \frac{1}{e}$.

La fonction $\varphi_{k,a,b}$ est continue par morceaux sur $]0; 1[$ et elle y est intégrable car on a comme

à la question **a.** $\varphi_{k,a,b}(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées et $\varphi_{k,a,b}(t) \underset{1^-}{\sim} \frac{|\ln(|\ln(t)|)|^k}{(1-t)^{-b}}$ d'où

$\varphi_{k,a,b}(t) \underset{1^-}{\sim} \frac{|\ln(1-t)|^k}{(1-t)^{-b}} \underset{1^-}{=} o\left(\frac{1}{(1-t)^{\frac{1-b}{2}}}\right)$ par croissances comparées et $\frac{1-b}{2} < 1$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^∞ sur D et, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \in D$, on a $f^{(k)}(x) = \int_0^1 (\ln(|\ln(t)|))^k e^{x \ln(|\ln(t)|)} dt$.

c. Pour $x > -1$, dans l'expression de $f(x)$, on pose $t = e^{-u} = \varphi(u)$ avec φ de classe C^1 , strictement décroissante et bijective de \mathbb{R}_+^* dans $]0; 1[$ et, par changement de variable, $f(x) = \int_{+\infty}^0 e^{x \ln(u)} (-e^{-u}) du$

donc $f(x) = \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} du = \Gamma(x+1)$. Ainsi, comme on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = (n+1-1)! = n!$

(puisque par intégration par parties, on montre que $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n!$.

5.62 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , prolongeable par continuité en 0 en

posant $h(0) = x$ car $\sin(xt) \underset{0}{=} xt + o(t)$ donc $h_x(t) \underset{0}{=} \frac{(1+o(1))(xt+o(t))}{t} \underset{0}{=} x + o(1)$. De plus, $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$

donc h_x est intégrable sur \mathbb{R}_+^* par comparaison. Ainsi la fonction φ est définie sur \mathbb{R} .

b. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t}$ de sorte que $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$.

(H₁) pour $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^0 sur \mathbb{R} .

(H₂) pour $x \in \mathbb{R}$, $h_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

(H₃) Soit $a > 0$, $\forall (x, t) \in [-a; a] \times \mathbb{R}_+^*$, $|f(x, t)| \leq \frac{e^{-t}|x|t}{t} = |x|e^{-t} \leq ae^{-t} = \varphi_a(t)$ car \sin est 1-lipschitzienne sur \mathbb{R} et φ_a est continue et clairement intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Ainsi, φ est de classe C^0 sur \mathbb{R} .

Utilisons maintenant le théorème de dérivation sous le signe somme :

(H₁) pour $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

(H₂) pour $x \in \mathbb{R}$, $h_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (on vient de le voir) et la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \cos(xt)e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

(H₃) $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t} = \psi(t)$ et ψ est continue et clairement intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Ainsi φ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

c. Avec LEIBNIZ, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}(e^{ixt-t}) dt = \operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{ixt-t} dt\right)$ donc on a $\varphi'(x) = \operatorname{Re}\left(\left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+ix}{(1-ix)(1+ix)}\right) = \frac{1}{1+x^2}$. Comme \mathbb{R} est un intervalle, en intégrant, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ implique l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = C + \operatorname{Arctan}(x)$. Or φ est clairement impaire et $\varphi(0) = 0$ donc $C = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{Arctan}(x)$.

5.3 Officiel de la Taupe

5.63 Posons $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ qui est C^∞ sur son domaine de définition.

Pour $x \geq 0$, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ car continue et $f(x, t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand t tend vers $+\infty$.

Pour $x > 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{-te^{-xt}}{1+t^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$. Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \cdot)$ sont intégrables car $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand t tend vers $+\infty$ (cette fois-ci $x > 0$ est primordial).

- Pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction (f, \cdot, t) est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions $f(x, \cdot)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ sont continues et intégrables sur \mathbb{R}_+ .
- Pour $a > 0$, $\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{-te^{-at}}{1+t^2} = \varphi_a(t)$ et φ_a est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

D'après le théorème de LEIBNIZ, g est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $g'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2} dt$.

On recommence (en s'éloignant de 0), et g est de classe C^2 (d'ailleurs C^∞) et $g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

$\forall x > 0$, $g''(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$. Les solutions de l'équation homogène sont $y = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$.

On effectue une double variation des constantes : $\lambda' \cos(x) + \mu' \sin(x) = 0$, $-\lambda' \sin(x) + \mu' \cos(x) = \frac{1}{x}$ et on trouve $\lambda' = -\frac{\sin(x)}{x}$ et $\mu' = \frac{\cos(x)}{x}$. On peut prendre, comme les convergences de ces deux intégrales sont

classiques par IPP : $\lambda(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\mu(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$. Les solutions de l'équation sont les $y = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt$.

Par le changement de variable $u = t - x$, on trouve $y = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x} du$.

Mais $|g(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ car $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

De plus, pour $b > 0$, $\int_0^b \frac{\sin(u)}{u+x} du = \left[-\frac{\cos(u)}{u+x}\right]_0^b - \int_0^b \frac{\cos(u)}{(u+x)^2} du$. On fait tendre b vers $+\infty$ et on obtient

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x} du = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{(u+x)^2} du$ or $\left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{(u+x)^2} du \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u+x)^2} = \left[-\frac{1}{u+x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$ donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x} du = 0$. Comme $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x > 0$, $g(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x} du$, on en déduit par soustraction que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0$ ce qui ne se peut que si $\lambda = \mu = 0$.

Enfin, on peut affirmer que : $\forall x > 0, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x} du$.

5.64 a. Soit $g_y : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}$.

- Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto g_y(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto g_y(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* car $e^{-xt} - e^{-yt} = (y-x)t + o(t)$ donc g_y se prolonge par continuité en 0 avec $g_y(0) = y - x$; $g_y(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et on conclut avec RIEMANN.

- $t \mapsto \frac{\partial g_y}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt}$ est clairement intégrable sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour $a > 0, x \in [a; +\infty[$ et $t > 0, \left| \frac{\partial g_y}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-xt} \leq e^{-at} = \varphi_a(t)$ avec φ_a intégrable sur \mathbb{R}_+^* . On en déduit d'après le théorème de dérivation sous le signe somme que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

b. Et on a la formule de LEIBNIZ : $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = -\frac{1}{x}$ d'après ce qui précède.

c. \mathbb{R}_+^* est un intervalle donc il existe $K(y) \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, F(x, y) = -\ln(x) + K(y)$.

Comme $F(y, y) = 0, K(y) = \ln(y)$ d'où : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, F(x, y) = \ln(y) - \ln(x)$.

5.65 a. Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , la fonction f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} par le théorème fondamental

de l'analyse avec $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x^2}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}$ est continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ donc $g(x)$ est bien défini. Soit $h : \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}$. Alors :

- Pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

- Pour $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \rightarrow e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}$ et $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -\frac{2x}{\cos^2(t)} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}$ sont continues sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ donc y sont intégrables.

- Soit $a > 0$, et $(x, t) \in [-a; a] \times \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, alors $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq 4a$ car $\cos(t) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}} \leq 1$.

Comme $t \mapsto 4a$ est intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, le théorème de dérivation sous le signe somme nous permet d'affirmer

que g est de classe C^1 sur \mathbb{R} et que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -2x \int_0^{\pi/4} \frac{e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}}{\cos^2(t)} dt$.

b. $\psi = f^2 + g$ est paire. Pour $x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = 2f'(x)f(x) + g'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du - 2x \int_0^{\pi/4} \frac{e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}}{\cos^2(t)} dt$. On

a $\psi'(0) = 0$. Si $x \neq 0$, on pose $v = x \tan(t) = \varphi(t)$ avec φ qui de classe C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ dans la seconde intégrale

et on a $\int_0^{\pi/4} x \frac{e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}}{\cos^2(t)} dt = \int_0^{\pi/4} e^{-x^2(1+\tan^2 t)} \varphi'(t) dt = e^{-x^2} \int_0^{\pi/4} e^{-\varphi(t)^2} \varphi'(t) dt = e^{-x^2} \int_0^x e^{-v^2} dv$.

Ainsi, $\psi'(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ donc ψ est constante sur l'intervalle \mathbb{R} et comme $\psi(0) = \frac{\pi}{4}$, on a finalement

$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 + \int_0^{\pi/4} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}} dt = \frac{\pi}{4}$. Mais $0 \leq \int_0^{\pi/4} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}} dt \leq \int_0^{\pi/4} e^{-x^2} dt = \frac{\pi e^{-x^2}}{4}$, d'où

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^2 = \frac{\pi}{4}$ avec ce qui précède. Mais comme $f(x) > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

qui nous redonne la classique l'intégrale de GAUSS : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5.66 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0; +\infty[$ avec un prolongement par continuité

en 0 $f_x(0) = x$ et $f_x(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car Arctan est bornée donc f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ d'après RIEMANN ($2 > 1$). F est donc définie sur \mathbb{R} et elle est clairement impaire car Arctan l'est.

b. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ si $t > 0$ et $f(x, 0) = x$.

- Pour $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ (donc f_x) est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ (déjà vu).
- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| = \left|\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\right| \leq \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ avec φ qui est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, F est C^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

Si $x \neq 1$, $x > 0$, on décompose en éléments simples : $\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}$

donc $F'(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} \right)$ et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(xt) = \frac{\pi}{2}$, cela donne

$F'(x) = \frac{x}{x^2-1} \left[\text{Arctan}(xt) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{(1-x^2)} \left[\text{Arctan}(t) \right]_0^{+\infty}$ d'où $F'(x) = \frac{x\pi}{2(x^2-1)} + \frac{\pi}{2(1-x^2)} = \frac{1}{2(1+x)}$.

Comme F' est continue en 1, on a $F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F'(x) = \frac{1}{4}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \frac{\ln(1+x)}{2}$ (\mathbb{R}_+^* est un intervalle). Au final, par imparité de F , on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \text{sgn}(x) \frac{\ln(1+|x|)}{2}$.

5.67 a. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et $0 \leq f_x(t) \leq \frac{1}{1+t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc

f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ d'après RIEMANN ($2 > 1$). F est donc définie sur \mathbb{R}_+ .

b. Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$.

- Pour $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
- Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ (donc f_x) est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ (déjà vu).
- Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $|f(x, t)| = \frac{1}{1+t^2} \leq \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ avec φ qui est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Par le théorème de continuité sous le signe somme, F est continue sur \mathbb{R}_+ .

Passons maintenant à la dérivabilité mais on doit s'éloigner de 0 :

- Pour $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ (donc f_x) est intégrable sur \mathbb{R}_+ (déjà vu).
- Pour $a > 0$, $x \in [a; +\infty[$ et $t \geq 0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| = \left|\frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leq \varphi(t) = e^{-at^2}$ et φ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, F est C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

c. Si $x > 0$, on a donc $F'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2-1)e^{-xt^2}}{1+t^2} dt = - \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt + F(x)$. On effectue le

changement de variable $u = t\sqrt{x}$ dans cette intégrale et on a donc $F'(x) - F(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$

et on reconnaît l'intégrale de GAUSS : $F'(x) - F(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$. On résout cette équation différentielle

avec la méthode de variation de la constante : $F(x) = \lambda(x)e^x$ avec $\lambda'(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{-x}$. Ainsi, on peut

prendre $\lambda(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ (car cette intégrale converge classiquement) et on pose $t = u^2$ pour avoir $\lambda(x) = \sqrt{\pi} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-u^2} du$.

Par conséquent : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x > 0, F(x) = \left(\alpha + \sqrt{\pi} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-u^2} du \right) e^x$.

Mais F est continue en 0 et $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, ainsi $\alpha = 0$ (toujours avec l'intégrale de GAUSS) :

$\forall x \geq 0, F(x) = \sqrt{\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du - \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du \right) e^x = \sqrt{\pi} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \theta(\sqrt{x}) \right) e^x$. Alors $F(x) = \frac{\pi}{2} (1 - \theta(\sqrt{x})) e^x$.

5.68 Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}$ est continue sur $[0; x[$ et $\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x-t}}\right)$ avec $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-t}}$ qui est intégrable sur $[0; x[$ d'après RIEMANN. Par comparaison, $I_{1/2}f(x)$ est défini si $x > 0$.

On effectue le changement de variable affine (simple à justifier) $t = \varphi(u) = ux$ dans l'intégrale et on obtient

$\forall x > 0, I_{1/2}f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}} du$. Soit $g : \mathbb{R}_+ \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, u) = \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}$.

- pour $u \in [0; 1[$, $x \mapsto g(x, u)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
- pour $x \geq 0, u \mapsto g(x, u)$ est continue et intégrable sur $[0; 1[$.
- pour $a > 0$ et $(x, u) \in [0; a] \times [0; 1[, |g(x, u)| \leq \frac{M}{\sqrt{1-u}} = \psi_a(u)$ avec $M = \text{Max}_{[0; a]} |f|$ (continuité sur un segment) et ψ_a est intégrable sur $[0; 1[$.

Alors par théorème de continuité sous le signe somme, $x \mapsto \int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}} = F(x)$ est continue sur \mathbb{R}_+ . On

peut conclure que $I_{1/2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ si on pose $I_{1/2}(0) = 0$ car $I_{1/2}f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} F(x)$.

On pose $t = x - u$ dans la définition de $I_{1/2}f(x)$ pour obtenir $I_{1/2}f(x) = - \int_x^0 \frac{f(x-u)}{\sqrt{u}} du = \int_0^x \frac{f(x-t)}{\sqrt{t}} dt$.

- pour $u \in [0; 1[$, $x \mapsto g(x, u)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ .
- pour $x \geq 0, u \mapsto g(x, u)$ est intégrable sur $[0; 1[$ et $u \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, u) = \frac{uf'(ux)}{\sqrt{1-u}}$ est continue sur $[0; 1[$.
- pour $a > 0$ et $(x, u) \in [0; a] \times [0; 1[, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, u) \right| \leq \text{Max}_{[0; a]} |f'|$ (continuité sur un segment).

Alors par théorème de dérivation sous le signe somme, F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et on a la formule de LEIBNIZ : $\forall x > 0, F'(x) = \int_0^1 \frac{uf'(ux)}{\sqrt{1-u}} du = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}} (xf'(ux)) du$. On peut conclure que $I_{1/2}$ est de

classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* car $I_{1/2}f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} F(x)$. De plus $\forall x > 0, D_{1/2}f(x) - I_{1/2}f'(x) = (I_{1/2}f)'(x) - I_{1/2}f'(x)$ qui

vaut donc aussi $\frac{1}{2\sqrt{\pi x}} F(x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} F'(x) - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{f'(ux)}{\sqrt{1-u}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left[\int_0^1 \left(\frac{f(ux)}{2\sqrt{1-u}} + \frac{uxf'(ux)}{\sqrt{1-u}} - \frac{xf'(ux)}{\sqrt{1-u}} \right) du \right]$.

Ainsi $D_{1/2}f(x) - I_{1/2}f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left[-\sqrt{1-uf(ux)} \right]_0^1 = \frac{f(0)}{\sqrt{\pi x}}$. On a bien $\forall x > 0, D_{1/2}f(x) = I_{1/2}f'(x) + \frac{f(0)}{\sqrt{\pi x}}$.

Posons $f_n(x) = x^n$, alors $I_{1/2}f_n(x) = \frac{x^n \sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u}} du$ d'après l'expression précédente et on effectue le

changement de variable $u = \sin^2 t$ pour avoir $I_{1/2}f_n(x) = \frac{2x^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} W_{2n+1} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2 x^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)! \sqrt{\pi}}$.

Posons $g_n(x) = x^{n+\frac{1}{2}}$, alors, comme avant, $I_{1/2}g_n(x) = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{u^n \sqrt{u}}{\sqrt{1-u}} du$ et on pose à nouveau le

changement de variable $u = \sin^2 t$ pour avoir $I_{1/2}g_n(x) = \frac{2x^{n+1}}{\sqrt{\pi}} W_{2n+2} = \frac{(2n+2)! x^{n+1} \sqrt{\pi}}{2^{2n+2} ((n+1)!)^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $I_{1/2}I_{1/2}f_n(x) = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}I_{1/2}g_n(x)$ d'après ce qui précède et par linéarité de $I_{1/2}$.

On en déduit que $I_{1/2}I_{1/2}f_n(x) = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!\sqrt{\pi}} \frac{(2n+2)!x^{n+1}\sqrt{\pi}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ après simplification. Comme

$\int_0^x f_n(t)dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, on a $I_{1/2}I_{1/2}f_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$. Par linéarité des opérateurs "primitive" et $I_{1/2}$, la relation $I_{1/2}I_{1/2}f(x) = \int_0^x f(t)dt$ montrée pour les monômes est vraie pour les polynômes.

De même, soit $n \in \mathbb{N}$, $D_{1/2}I_{1/2}f_n(x) = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}D_{1/2}g_n(x) = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}(I_{1/2}g_n(x))'$ qu'on transforme en $D_{1/2}I_{1/2}f_n(x) = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!\sqrt{\pi}} \frac{(2n+2)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}(x^{n+1})' = x^n$ après simplification. Encore une fois,

une formule vraie pour les monômes et linéaire est donc vraie pour tous les polynômes $f : D_{1/2}I_{1/2}f = f$.

Supposons maintenant que f est DSE : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, puisque $I_{1/2}f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}} du$, il

vient $I_{1/2}f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n u^n x^n}{\sqrt{1-u}} \right) du$. On pose $h_n(xu) = \frac{a_n u^n x^n}{\sqrt{1-u}}$ pour $x \geq 0$:

- la série $\sum_{n \geq 0}^{+\infty} h_n$ converge simplement vers $u \mapsto \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}$ sur $]0; 1[$ (on en vient).
- toutes les fonctions h_n sont intégrables sur $]0; 1[$, de plus $\int_0^1 |h_n| = 2|a_n|x^{n+1/2} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \leq \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} |a_n|x^n$ car on a l'expression $\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{3} \frac{4}{5} \dots \frac{2n}{2n+1} < 1$.
- la série $\sum_{n \geq 0} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} |a_n|x^n$ converge (convergence absolue dans l'intervalle ouvert de convergence).

On déduit du TITT que $I_{1/2}f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 \frac{u^n x^n}{\sqrt{1-u}} du = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_{1/2}f_n(x)$.

On recommence pour obtenir $I_{1/2}I_{1/2}f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x f(t)dt$.

Montrer que cette relation est aussi vraie pour les fonctions continues requiert le théorème de WEIERSTRASS qui est hors programme : approximation uniforme de $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par une suite de fonctions polynomiales

sur un segment et l'inégalité $\forall x \in [0; a]$, $\left| I_{1/2}f(x) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\|f\|_{\infty, [0; a]}}{\sqrt{x-t}} dt \leq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \|f\|_{\infty, [0; a]}$.

5.69 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha(1+x)}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et $g(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$ et $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$. D'après le critère de RIEMANN, g est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$ et g est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $1 + \alpha > 1$ donc f est définie sur $]0; 1[$.

Soit $h :]0; 1[\times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(\alpha, x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x)}$.

- pour $x > 0$, $\alpha \mapsto h(\alpha, x)$ est continue sur $]0; 1[$.
- pour $\alpha \in]0; 1[$, $x \mapsto h(\alpha, x)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .
- Soit $0 < a \leq \alpha \leq b < 1$, $\forall (\alpha, x) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+^*$, $|h(\alpha, x)| = \frac{x^{-\alpha}}{1+x} \leq \frac{x^{-b}}{1+x}$ si $x \in]0; 1]$ et $|h(\alpha, x)| \leq \frac{x^{-a}}{1+x}$ si $x \in [1; +\infty[$. Soit $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{a,b}(x) = \frac{x^{-b}}{1+x}$ si $x \in]0; 1]$ et $\varphi_{a,b}(x) = \frac{x^{-a}}{1+x}$ si $x \in [1; +\infty[$.

Alors $\varphi_{a,b}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* (avec $\varphi_{a,b}(1) = \frac{1}{2}$) et elle est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Par le théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $]0; 1[$.

Quand $\alpha \rightarrow 0$, c'est au voisinage de $+\infty$ qu'il va y avoir un problème. On approche $f(\alpha)$ par $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha}$. Évaluons la différence, $f(\alpha) - \frac{1}{\alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)}$. Or $0 \leq \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \leq \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = \frac{1}{1-\alpha}$ et $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2+\alpha}} = \frac{1}{1+\alpha} \leq 1$. Ainsi : $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = O(1)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)} = O(1)$. Par somme : $f(\alpha) - \frac{1}{\alpha} = O(1) = o\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ donc $f(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$.

On pouvait aussi poser $x = u^{1/\alpha}$ dans l'intégrale et $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{1/\alpha}}{u^2(1+u^{1/\alpha})} du$. Si $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est une suite de réels strictement positifs et inférieurs à $\frac{1}{2}$ qui tend vers 0, alors $\alpha_n f(\alpha_n) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{1/\alpha_n}}{u^2(1+u^{1/\alpha_n})} du$.

On pose $f_n(u) = \frac{u^{1/\alpha_n}}{u^2(1+u^{1/\alpha_n})}$, alors les f_n sont continues et intégrables sur \mathbb{R}_+^* , la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(u) = 0$ si $u < 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(u) = \frac{1}{u^2}$ si $u > 1$. Or f est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R}_+^* et $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n \leq g$ où $g(u) = \frac{1}{u^2}$ si $u > 1$, $g(1) = \frac{1}{2}$ et $g(u) = 1$ si $u < 1$. D'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n f(\alpha_n) = \int_0^{+\infty} f = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = 1$. Puis la caractérisation séquentielle des limites permet de conclure que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha f(\alpha) = 1$ donc $f(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$.

On effectue le changement de variable $x = \frac{1}{t} = \varphi(t)$ (φ est bien C^1 et bijective) dans $f(\alpha)$ pour avoir $f(\alpha) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{t^{-\alpha}(1+t^{-1})} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{t^{-\alpha}(1+t^{-1})} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1+t)} = f(1-\alpha)$. Ainsi la courbe de f est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$.

De plus, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \left[2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})\right]_0^{+\infty} = \pi$.

5.70 Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h : t \mapsto e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = x$ et $h(t) = O(e^{-t})$ donc h est intégrable sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi la fonction g est définie sur \mathbb{R} . Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x, t) = e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t}$.

- pour $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \cos(xt)e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq e^{-t} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Ainsi g est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $g'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{ixt-t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-ix} \right) = \frac{1}{1+x^2}$ d'après le théorème de dérivation sous le signe somme. Comme \mathbb{R} est un intervalle, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ implique : $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = C + \operatorname{Arctan}(x)$. Or g est clairement impaire donc $C = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{Arctan}(x)$.

5.71 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$.

- pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} .
- pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et φ est classiquement intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi par le théorème de continuité sous le signe somme : g est définie et continue sur \mathbb{R} .

Il est clair que g est paire, on n'étudie sa dérivabilité que sur \mathbb{R}_+ .

- pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

- pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$ sont continues sur \mathbb{R}_+ et $g(x)$ existe.
- si $0 < a < b$ et $\forall (x, t) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \Psi_{a,b}(t) = 2be^{-(1+t^2)a^2}$ et $\Psi_{a,b}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi par le théorème de dérivabilité sous le signe somme : g est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x > 0, g'(x) = -2 \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} x dt = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} x dt = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2e^{-x^2} h(x).$$

On en déduit alors que $\forall x > 0$, $g'(x) = -2h'(x)h(x)$ car $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur \mathbb{R} . Comme \mathbb{R}_+^* est un intervalle et que $(g + h^2)' = 0$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $g(x) + h^2(x) = C \geq 0$.

Comme $0 \leq g(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \sqrt{C}$. Mais on a $g + h^2$ continue en 0 donc $g(0) + h^2(0) = C = g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5.72 Soit $f : \mathbb{R} \times [0; \pi]$ définie par $f(x, t) = \cos(x \sin t)$.

- pour tout $t \in [0; \pi]$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- si $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0; \pi]$ donc intégrable et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin t \sin(x \sin t)$ est continue.
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; \pi]$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 1$ et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0; \pi]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction Φ_0 est bien définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi_0'(x) = -\int_0^\pi \sin t \sin(x \sin t) dt$. Si $x \in [0; \pi]$, alors $\forall t \in [0; \pi]$, on a $x \sin t \in [0; \pi]$ donc $\sin(x \sin t) \geq 0$ et, comme $\sin t \geq 0$, on a $\Phi_0'(x) \leq 0$. Alors Φ_0 est décroissante sur $[0; \pi]$. De plus $\Phi_0(0) = 1$ et $\Phi_0(\pi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\pi \sin t) dt$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\Phi_0(\pi)$ est négatif.

Or par le changement de variable $t = \pi - \theta$, on a $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi \cos(x \sin t) dt$ ce qui fait

que $\Phi_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) dt$. De nouveau, dans cette intégrale, on effectue le changement $t = \frac{\pi}{2} - \theta$

$$\text{et } \Phi_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} \left(\cos(x \sin t) + \cos(x \cos t) \right) dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \cos\left(\frac{x(\sin t + \cos t)}{2}\right) \cos\left(\frac{x(\sin t - \cos t)}{2}\right) dt.$$

$$\text{Ainsi } \Phi_0(\pi) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \cos\left(\frac{\pi(\sin t + \cos t)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(\sin t - \cos t)}{2}\right) dt.$$

$$\bullet \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \sin(t) + \cos(t) \in [1; \sqrt{2}] \text{ donc } \cos\left(\frac{\pi(\sin t + \cos t)}{2}\right) \leq 0.$$

$$\bullet \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \sin(t) - \cos(t) \in [-1; 0] \text{ donc } \cos\left(\frac{\pi(\sin t - \cos t)}{2}\right) \geq 0.$$

Par conséquent, $\Phi_0(\pi) \leq 0$ et $\Phi_0(0) \geq 0$ donc Φ_0 s'annule une fois et une seule sur $[0; \pi]$.

5.73 Pour a, b, x réels, soit $h_x : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $h_x(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)$. Par DL,

la fonction h_x se prolonge par continuité en 0 en posant $h_x(0) = b - a$.

Bien sûr, si $a = b$, la fonction h_x est nulle donc intégrable sur \mathbb{R}_+ et $F(x) = 0$.

On peut imposer l'ordre entre a et b par symétrie : par exemple $0 < a < b$.

Alors $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-at})$ car $\frac{\cos(xt)}{t} \underset{+\infty}{=} o(1)$ et $e^{-bt} \underset{+\infty}{=} o(e^{-at})$ donc h_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ car $t \mapsto e^{-at}$

l'est. Par conséquent, F est définie sur \mathbb{R} , et elle y est clairement paire, par $F(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$ avec

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } g(x, 0) = b - a \text{ et } g(x, t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) \text{ si } t > 0.$$

- $\forall t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ (on vient de le voir).
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(xt)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

• $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} - e^{-bt} \leq e^{-at} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi, F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $F'(x) = \int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(xt) dt = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at}) e^{ixt} dt \right)$

donc $F'(x) = \text{Im} \left(\left[\frac{e^{(-b+ix)t}}{-b+ix} - \frac{e^{(-a+ix)t}}{-a+ix} \right]_0^{+\infty} \right) = \text{Im} \left(\left[\frac{1}{b-ix} - \frac{1}{a-ix} \right]_0^{+\infty} \right) = \frac{x}{x^2+b^2} - \frac{x}{x^2+a^2}$. On

intègre et il existe une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2} \right) + C$.

Or $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ mais, puisque les deux intégrales convergent :

$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t} dt$ et on pose $t = \frac{u}{a}$ dans la première et $t = \frac{u}{b}$ dans

la seconde intégrale pour avoir $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du$. Or

$\forall u \geq 0, 1-u \leq e^{-u} \leq 1$ donc $\ln \left(\frac{b}{a} \right) - (b-a)\varepsilon = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{u} du - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du \leq \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du \leq \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{u} du = \ln \left(\frac{b}{a} \right)$.

En passant à la limite : $F(0) = \ln \left(\frac{b}{a} \right)$ donc $C = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2} \right)$.

5.74 Pour $x > 0$, soit la fonction continue $h_x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_x(t) = \frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}$. Comme $h_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, la fonction h_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ donc f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}$.

• Pour $t \geq 0, x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* .

• Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ (on vient de le voir). De plus, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{te^{-xt}}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-xt}}{t} = o(e^{-xt})$ et $x > 0$.

Enfin, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

• Soit $a > 0, \forall (x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq e^{-xt} \leq e^{-at} = \varphi_a(t)$ et φ_a est intégrable sur \mathbb{R}_+ ($a > 0$).

Par le théorème de dérivation sous le signe somme appliqué deux fois, la fonction $\theta : x \mapsto xf(x)$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* et que $\forall x > 0, \theta''(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$. Par conséquent $f : x \mapsto \frac{\theta(x)}{x}$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* .

Le calcul précédent montre que $\theta''(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1-1)e^{-xt}}{1+t^2} dt = -\frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = -\frac{1}{x} - \theta(x) + \frac{\pi}{2}$.

On peut scinder l'intégrale : $\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

Comme $0 \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$, on a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$.

Par continuité sous le signe somme, θ est continue sur \mathbb{R}_+ (en dominant $|g(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$) et $\theta(0) = 0$.

On résout l'équation différentielle $\theta''(x) + \theta'(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$. Les solutions de l'équation homogène sont les

$y : x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x)$ et, par méthode variation des constantes (hors programme depuis quelques années), on résout le système $A'(x) \cos(x) + B'(x) \sin(x) = -A'(x) \sin(x) + B'(x) \cos(x) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right) = 0$ pour

avoir $A(x) = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right) \sin(x) + \lambda$ et $B(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right) \cos(x) + \mu$. Ainsi, il existe deux constantes réelles λ et

μ telles que $\forall x > 0, \theta(x) = \left(\lambda + \int_0^x \left(\frac{1}{t} - \frac{\pi}{2}\right) \sin(t) dt\right) \cos(x) + \left(\mu + \frac{\pi}{2} \int_0^x \cos(t) dt - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t} dt\right) \sin(x)$.

Comme $\int_1^x \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{\cos(t)-1+1}{t} dt = \ln(x) - \int_1^x \frac{1-\cos(t)}{t} dt$. Or $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t}$ se prolonge en une

fonction continue donc bornée sur $[0; 1]$ ce qui montre que $\int_1^x \frac{1 - \cos(t)}{t} dt = O(1)$. Ainsi $\int_1^x \frac{\cos(t)}{t} dt \underset{0}{\sim} \ln(x)$.

De même $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0; 1]$ donc $\int_0^x \left(\frac{1}{t} - \frac{\pi}{2}\right) \sin(t) dt = O(1)$. On trouve finalement $\theta(x) \underset{0}{\sim} -x \ln(x)$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

5.75 Soit $g : (\mathbb{R}_+)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{1}{1 + x^3 + t^3}$. Alors :

- $\forall t \geq 0, x \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
- $\forall x \geq 0, t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car $g(x, t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$.
- $\forall (x, t) \in (\mathbb{R}_+)^2, |g(x, t)| \leq \frac{1}{1 + t^3} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur \mathbb{R}_+ (c'est $t \mapsto g(0, t)$).

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, f est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

Comme $1 + x^3 = (1 + x)(x^2 - x + 1)$, on sait qu'il existe trois réels a, b, c tels que $\frac{1}{1 + x^3} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}$.

$1 = a(x^2 - x + 1) + (bx + c)(x + 1) \iff (a + b = 0, b + c - a = 0, a + c = 1) \iff \left(a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = \frac{2}{3}\right)$

en procédant par identification. Ainsi $\int_0^a \frac{dt}{1 + t^3} = \int_0^a \left(\frac{1}{3(t + 1)} - \frac{2t - 1}{6(t^2 - t + 1)} + \frac{1}{2(t^2 - t + 1)}\right) dt$ qu'on

intègre classiquement $\int_0^a \frac{dt}{1 + t^3} = \frac{1}{6} \ln\left(\frac{(a + 1)^2}{a^2 - a + 1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2a - 1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

Par conséquent $f(0) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{dt}{1 + t^3} = \frac{1}{6} \ln(1) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \sim 1,21$.

Posons $f_n : t \mapsto \frac{1}{1 + n^3 + t^3}$ de sorte que $f(n) = \int_0^{+\infty} f_n$. Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ (intégrables sur

\mathbb{R}_+) converge simplement la fonction nulle et toutes les f_n sont dominées par f_0 qui est elle-même intégrable sur \mathbb{R}_+ . Par le théorème de convergence dominée, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \int_0^{+\infty} 0 = 0$. Or la fonction f est

clairement décroissante (car $x \leq y \implies \frac{1}{1 + x^3 + t^3} \geq \frac{1}{1 + y^3 + t^3}$) et positive donc elle admet une limite finie ℓ en $+\infty$ par le théorème de la limite monotone. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$, on a $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Pour $x \geq 0$, on a $f(x) = \int_0^x g(x, t) dt + \int_x^{+\infty} g(x, t) dt \geq \int_0^x \frac{dt}{1 + x^3} + \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{x}{1 + x^3} + \frac{1}{2x^2}$ en majorant directement et on conclut à nouveau que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.