DM 10 : INTÉGRALES DE FRESNEL

PSI 1 2024/2025 **pour le vendredi 17 janvier 2025**

On rappelle la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss *:* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On note aussi $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$.

1 Calcul d'une intégrale

1.1 Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{t^4+1}$. Calculer $\displaystyle J = \int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{t^4+1}$.

1.2 Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{t^4+1}$.

1.3 Quelles sont les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme X^4+1 ? En déduire une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de X^4+1.

1.4 En effectuant une combinaison linéaire du type $I + \alpha J + I$, déterminer la valeur exacte de I.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\,dt$.

2 Étude de la fonction F

2.1 Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2.2 Établir que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$ pour $x > 0$.

2.3 Justifier que : $\forall x > 0,\ |F(x)| \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

3 Valeur des intégrales de Fresnel

3.1 En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,dx$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+i} = \sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,dx$.

3.2 Déterminer une valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,dx$ en fonction de π.

3.3 Que valent donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$?