DM 11 : DISTANCES ET ANGLES

PSI 1 2024/2025 **pour le vendredi 24 janvier 2025**

Dans tout le problème, E *est un espace euclidien de dimension* $n \geqslant 1$*, on note* $(\,.\,|\,.\,)$ *le produit scalaire sur* E *et* $||\,.\,||$ *la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.*

Si $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $(v_1, \cdots, v_p)$ *est une famille de vecteurs de* E*, on appelle matrice de* Gram *de cette famille, notée* $G(v_1, \cdots, v_p)$*, la matrice de* $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *de coefficient* $g_{i,j} = (v_i|v_j)$ *en case* (i,j) *pour* $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$ *:*

$$G(v_1, \cdots, v_p) = \begin{pmatrix} (v_1|v_1) & (v_1|v_2) & \cdots & (v_1|v_p) \\ (v_2|v_1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (v_p|v_1) & \cdots & \cdots & (v_p|v_p) \end{pmatrix}.$$

On notera $\Gamma(v_1, \cdots, v_p)$ *son déterminant :* $\Gamma(v_1, \cdots, v_p) = \det\big(G(v_1, \cdots, v_p)\big)$.

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$*, on note* $\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$ *(on identifie application linéaire et matrice).*

PARTIE 1 : GÉNÉRALITÉS

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*, soit* $M_{a,b} = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ *la matrice de* $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *telle que* $a_{i,i} = a$ *et* $a_{i,j} = b$ *si* $i \neq j$.

1 **Calcul de déterminant.** Montrer que $\det(M_{a,b}) = (a-b)^{p-1}(a + (p-1)b)$.

Indication : on pourra commencer par sommer toutes les colonnes dans la première.

2 **Rang de** ^tAA**.** Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

2.1 Que peut-on dire d'une matrice $Y \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ telle que $^tYY = 0$?

2.2 Justifier que $\mathrm{Ker}(^tAA) \subset \mathrm{Ker}(A)$. En déduire que rang$\,(^tAA) = $ rang$\,(A)$.

3 **Matrices de** Gram**.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(v_1, \cdots, v_p)$ une famille de vecteurs de E

Soit une <u>*base orthonormale*</u> *de* E *notée* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$*. On note* A *la matrice de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *dont les colonnes sont les composantes des vecteurs* $v_1, \cdots, v_p$ *dans la base* $\mathcal{B}$ *:* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_p)$.

3.1 En notant $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, exprimer les $a_{i,j}$ comme des produits scalaires.

3.2 Montrer que $G(v_1, \cdots, v_p) = {}^tAA$. Quel lien existe entre rang$\,\big(G(v_1, \cdots, v_p)\big)$ et rang$\,(v_1, \cdots, v_p)$?

3.3 Montrer que $(v_1, \cdots, v_p)$ est libre si et seulement si $\Gamma(v_1, \cdots, v_p) \neq 0$.

3.4 Si $p = n$, montrer que $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre si et seulement si $\Gamma(v_1, \cdots, v_n) > 0$.

En déduire en général que $(v_1, \cdots, v_p)$ est libre si et seulement si $\Gamma(v_1, \cdots, v_p) > 0$.

PARTIE 2 : ÉQUIDISTANCE

Dans cette partie, m *est un entier naturel tel que* $m \geqslant 2$ *et* t *un réel tel que* $t \neq 1$.
La famille de m *vecteurs distincts* $(v_1, \cdots, v_m)$ *de* E *est solution du problème* $P(m,t)$ *si elle vérifie les deux conditions suivantes :* $\forall k \in [\![1;m]\!],\ \|v_k\| = 1$ *et* $\forall (i,j) \in [\![1;m]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow (v_i|v_j) = t$.

$\boxed{4}$ **Préliminaires.** On suppose que le problème $P(m,t)$ possède une solution $(v_1, \cdots, v_m)$

$\boxed{4.1}$ Justifier que $t \in [-1;1[$. Calculer les distances $\|v_i - v_j\|$ pour $(i,j) \in [\![1;m]\!]^2$ tels que $i \neq j$.

$\boxed{4.2}$ Montrer que $\Gamma(v_1, \cdots, v_m) = (1-t)^{m-1}\big(1 + (m-1)t\big)$.

$\boxed{5}$ **Conditions nécessaires.** On suppose que le problème $P(m,t)$ possède une solution $(v_1, \cdots, v_m)$

$\boxed{5.1}$ Si $(v_1, \cdots, v_m)$ est libre, montrer que $t \in \left]\dfrac{-1}{m-1};1\right[$ et $m \leqslant n$.

$\boxed{5.2}$ Si $(v_1, \cdots, v_m)$ est liée, montrer que $t = \dfrac{-1}{m-1}$ et $m \leqslant n+1$.

Indication : on pourra montrer qu'alors, la famille $(v_1, \cdots, v_{m-1})$ est libre.

$\boxed{6}$ **Équidistance.** Soit $p > n$ et $(v_1, \cdots, v_p)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que les distances $\|v_i - v_j\|$ soient constantes pour $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$ tel que $i \neq j$: on note $d > 0$ leur valeur commune

$\boxed{6.1}$ Montrer que $(v_1, \cdots, v_p)$ est solution d'un problème $P(p,t)$.

$\boxed{6.2}$ Montrer que $p = n+1$ et exprimer d en fonction de n.

PARTIE 3 : FAMILLES OBTUSANGLES

On dit qu'une famille de vecteurs $(v_1, \cdots, v_p)$ *est* <u>*obtusangle*</u> *si* $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow (v_i|v_j) < 0$.
On se propose de montrer par récurrence que si $(v_1, \cdots, v_p)$ *est une famille obtusangle dans un espace euclidien de dimension* n*, alors* $p \leqslant n+1$*. On définit donc, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$*, la propriété* $\mathcal{P}_n$ *par :*
$\mathcal{P}_n =$ " *si* E *euclidien de dimension* n, $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $(v_1, \cdots, v_p) \in E^p$ *une famille obtusangle de* E*, alors* $p \leqslant n+1$".

$\boxed{7}$ Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, trouver trois vecteurs v_1, v_2 et v_3 tels que (v_1, v_2, v_3) soit obtusangle.

$\boxed{8}$ Vérifier que $\mathcal{P}_1$ est vraie. Indication : supposer que $E = \mathrm{Vect}(e)$ et (v_1, v_2, v_3) est obtusangle.

$\boxed{9}$ **Hérédité.** Soit $n \geqslant 2$, on suppose que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie

Soit donc un espace euclidien E *de dimension* n, $p \geqslant 2$ *et* $(v_1, \cdots, v_p) \in E^p$ *une famille obtusangle de* E.

$\boxed{9.1}$ Montrer que $v_p \neq 0_E$ et déterminer la dimension de $F = \mathrm{Vect}(v_p)^\perp$.

Pour $k \in [\![1;p-1]\!]$*, on définit le vecteur* $w_k = p_F(v_k)$ *qui est le projeté orthogonal de* v_k *sur* F.

$\boxed{9.2}$ Déterminer une expression vectorielle de w_k en fonction de v_p et de v_k.

$\boxed{9.3}$ Montrer que $(w_1, \cdots, w_{p-1})$ est une famille obtusangle de vecteurs de F.

$\boxed{10}$ Conclure.

$\boxed{11}$ **Existence.** Soit $E = \mathbb{R}^n$ euclidien canonique (avec $n \geqslant 2$) et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ sa base canonique

$\boxed{11.1}$ Déterminer une famille liée $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs unitaires de E qui forme une famille obtusangle et dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est du style $M_{a,b}$.

$\boxed{11.2}$ Déterminer une famille $\mathcal{F} = (w_1, \cdots, w_{n+1})$ de vecteurs de E qui forme une famille obtusangle et dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est "triangulaire supérieure" (attention elle n'est pas carrée).