DEVOIR 16 : DOMINATION SCALAIRE

PSI 1 2024-2025 **mardi 14 janvier 2025**

QCM

1 *Produit scalaire : sur l'espace* E *donné, l'application* $(.|.)$ *est-elle un produit scalaire ? On note* $u = (u_1, \cdots, u_n)$ *pour un vecteur* u *de* $\mathbb{R}^n$

1.1 $E = C^0_m([-1;1], \mathbb{R})$ et $(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$

1.2 $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t^2}dt$

1.3 $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(P|Q) = \sum_{k=1}^{n} P(k)Q(k)$

1.4 $E = \mathbb{R}^n$ et $(u|v) = \sum_{k=1}^{n} ku_kv_k$

2 *Produit scalaire et norme : soit* E *un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire* $(.|.)$ *(donc de la norme euclidienne associée* $||\,.\,||$*) et* $\lambda \in \mathbb{R}$

2.1 $\forall (a, b) \in E^2,\ (a + b|a - b) = ||a||^2 - ||b||^2$

2.2 $\forall (a, b) \in E^2,\ (a|b) = \frac{1}{2}(||a + b||^2 - ||a - b||^2)$

2.3 $\forall (a, b) \in E^2,\ |(a|b)| \geqslant ||a||\,||b||$

2.4 $\forall (a, b) \in E^2,\ ||a + \lambda b|| \leqslant ||a|| + |\lambda|\,||b||$

3 *Circulaires réciproques et hyperboliques*

3.1 $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\text{Arctan}(\text{sh}(x))\big)' = \frac{1}{\text{ch}(x)}$

3.2 $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left(\text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)\right)' = \frac{1}{\text{ch}(x)}$

3.3 $\forall x \in [-1;1],\ \text{Arcsin}'(x) + \text{Arccos}'(x) = 0$

3.4 $\forall x \in [-1;1], \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$

4 *Caractérisation séquentielle : soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle qui tend vers* $+\infty$

4.1 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$

4.2 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Longleftarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$

4.3 Si f monotone : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$

4.4 Si f monotone : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Longleftarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$

Définition Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, définir ce qu'est un produit scalaire sur E.

Preuve Soit E un espace préhilbertien réel (dont le produit scalaire est noté $(.|.)$ et la norme euclidienne associée $||\ ||$), u et v deux vecteurs <u>non nuls</u> de E. Montrer que $|(u|v)| \leqslant ||u||\,||v||$.

Exercice 1 Montrer que $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^n + e^t}$ est bien défini pour $n \in \mathbb{N}$. Trouver $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 Soit g la fonction définie par $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1 + t^2)}dt$. On pose $f(x,t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1 + t^2)}$.
Montrer que l'intégrale donnant $g(x)$ converge pour tout réel x.
Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

DEVOIR 16 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Définition

Preuve

Exercice 1

$\boxed{\textbf{Exercice } 2}$

DEVOIR 16	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1				X	
2	X			X	
3	X			X	
4	X		X	X	

1.1 Faux : il faut la continuité **1.2** Faux : pas définie pour $f = 1$ et $g : t \mapsto e^{t^2}$ par exemple **1.3** Faux : si $P = \prod_{k=1}^{n} (X - k) \in E$, on a $||P||^2 = 0$ alors que $P \neq 0$ **1.4** Vrai : structure euclidienne canonique. **2.1** Vrai : bilinéarité et symétrie **2.2** Faux : 4 à la place de 2 **2.3** Faux : $\leqslant$ à la place de $\geqslant$ **2.4** Vrai : inégalité triangulaire et homogénéité. **3.1** Vrai : $\big(\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(x))\big)' = \dfrac{\mathrm{sh}'(x)}{1 + \mathrm{sh}^2(x)} = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$ **3.2** Faux : Arcsin et Arccos non dérivables en ± 1 **3.3** Faux : $\Big(\mathrm{Arccos}\big(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\big)\Big)' = -\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} \times \Big(-\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(x) - 1}}\Big) = \dfrac{\mathrm{sgn}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ **3.4** Vrai : du cours. **4.1** Vrai : caractérisation séquentielle pour une suite **4.2** Faux : il faudrait que ce soit vrai pour toutes les suites qui tendent vers $+\infty$ **4.3** Vrai : la monotonie ne change rien **4.4** Vrai : comme f est monotone, elle possède une limite ℓ' (finie ou pas) en $+\infty$, alors par caractérisation séquentielle, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell'$. Mais comme on sait que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$, par unicité de la limite, on a $\ell = \ell'$.

Définition Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on appelle produit scalaire sur E une application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ telle que φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E, c'est-à-dire si :

- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (u, v, w) \in E^3,\ \begin{cases} \varphi(\alpha u + \beta v, w) = & \alpha\varphi(u, w) + \beta\varphi(v, w) \\ \varphi(u, \alpha v + \beta w) = & \alpha\varphi(u, v) + \beta\varphi(u, w) \end{cases}$.
- $\forall (u, v) \in E^2,\ \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$. • $\forall u \in E, \varphi(u, u) = q(u) \geqslant 0$ et $\varphi(u, u) = q(u) = 0 \Longrightarrow u = 0_E$.

Preuve Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = ||u + tv||^2$. On a $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = ||u||^2 + 2t(u|v) + t^2||v||^2$ par bilinéarité et symétrie du produit scalaire. Comme $||v||^2 > 0$, f est polynomiale du second degré et reste positive. On sait qu'alors $\Delta = 4(u|v)^2 - 4||u||^2||v||^2 \leqslant 0$ (sinon f est strictement négative entre ses deux racines réelles distinctes). Ainsi : $(u|v)^2 \leqslant ||u||^2||v||^2$ et on passe à la racine (croissante sur $\mathbb{R}_+$).

Exercice 1 On pose, pour $n \geqslant 0$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(t) = \dfrac{1}{t^n + e^t}$.

(H_1) : $f_n \xrightarrow{CVS} g$ telle que $g(t) = e^{-t}$ si $t < 1$, $g(1) = \dfrac{1}{1 + e}$ et $g(t) = 0$ si $t > 1$.

(H_2) : les fonctions f_n et la fonction g sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) : $\forall t \geqslant 0,\ |f_n(t)| \leqslant e^{-t} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 g(t)dt = 1 - \dfrac{1}{e}$.

Exercice 2 (H_1) : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(H_2) : $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\lim_{t\to0^+} f(x, t) = x$ (taux d'accroissement) et $f(x, t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{t^3}\Big)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \dfrac{1}{(1 + x^2t^2)(1 + t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) : $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\Big|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\Big| \leqslant \varphi(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}$ et φ est C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} 1/t^2$.

g est donc C^1 et impaire et $g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + x^2t^2)(1 + t^2)} = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{x^2}{(x^2 - 1)(1 + x^2t^2)} - \frac{1}{(x^2 - 1)(1 + t^2)}\Big)dt$

$x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ donc $g'(x) = \Big[\dfrac{x}{x^2 - 1}\mathrm{Arctan}(xt) - \dfrac{1}{x^2 - 1}\mathrm{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{\pi(x - 1)}{2(x^2 - 1)} = \dfrac{\pi}{2(1 + x)}$ (vrai même si $x = 1$ car g est C^1 sur $\mathbb{R}$). En intégrant sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, comme $g(0) = 0$ et g continue en 0, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1 + x)$. Mais g est impaire, d'où $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{sgn}(x)\dfrac{\pi}{2}\ln(1 + |x|)$.