DM 10 : INTÉGRALES DE FRESNEL

PSI 1 2024/2025 **pour le vendredi 17 janvier 2025**

1.1 $t \mapsto \dfrac{1}{t^4+1}$ et $t \mapsto \dfrac{t}{t^4+1}$ sont continues et positives sur $\mathbb{R}_+$ et on a $\dfrac{1}{t^4+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^4}$ et $\dfrac{t}{t^4+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$ donc elles sont intégrables d'après RIEMANN sur $[1;+\infty[$: $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{tdt}{t^4+1} \text{ sont convergentes.}}$

De plus, $J = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{tdt}{t^4+1} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(t^2)\right]_0^x$. Ainsi : $\boxed{J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{tdt}{t^4+1} = \frac{\pi}{4}.}$

1.2 Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{dt}{t^4+1}$, que $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^4+1}$ est continue et que $\varphi : u \to \dfrac{1}{u}$ est bijective strictement décroissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \int_{+\infty}^0 (f\circ\varphi)\varphi'$ d'après la formule du cours ce qui donne $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2}\frac{1}{1+\frac{1}{u^4}}du = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}du$. Ainsi : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2dt}{t^4+1}.}$

1.3 $z^4 = e^{i\pi} \iff \left(\exists k \in [\![0;3]\!],\ z = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{4}}\right)$ d'où $\boxed{\text{Les racines de } X^4+1 \text{ sont } e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}}$

On regroupe chaque racine avec son conjugué : $X^4+1 = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{-i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{-3i\pi}{4}}\right)$ donc $X^4+1 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$. Directement $X^4+1 = X^4+2X^2+1-2X^2 = (X^2+1)^2-(\sqrt{2}X)^2$ ce qui donne $X^4+1 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$ par identité remarquable : $\boxed{X^4+1 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1).}$

1.4 $I - \sqrt{2}J + I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} - \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \frac{tdt}{t^4+1} + \int_0^{+\infty} \frac{t^2dt}{t^4+1}$ d'après 1.2, et par linéarité de l'intégrale, on a :
$I - \sqrt{2}J + I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(t^2-\sqrt{2}t+1)dt}{t^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{\left(\sqrt{2}t+1\right)^2+1}$.

Il vient donc $I - \sqrt{2}J + I = \sqrt{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}dt}{\left(\sqrt{2}t+1\right)^2+1} = \sqrt{2}\Big[\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}t+1\right)\Big]_0^{+\infty} = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Comme $J = \dfrac{\pi}{4}$ d'après la question 1.1, on a $2I = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ donc $\boxed{I = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}.}$

2.1 On définit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\ f(x,t) = \dfrac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$. On a :

(H1) pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,

(H2) pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après RIEMANN car $f(x,t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$,

(H3) pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, $|f(x,t)| = \dfrac{e^{-t^2x^2}}{\sqrt{t^4+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} = \varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (RIEMANN).

D'après un théorème du cours : $\boxed{F \text{ est bien définie et continue sur } \mathbb{R}.}$

2.2 Cette fois-ci, on prend $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$:

(H1) pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(t^2+i)x^2}$,

(H2) pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues, intégrables sur $\mathbb{R}_+$ (déjà vu pour $t \mapsto f(x,t)$) car $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ (car $x > 0$) donc $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ intégrable d'après RIEMANN.

(H3) pour $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\forall (x,t) \in [a;b] \times \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2be^{-t^2a^2} = \psi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc ψ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Alors F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'après LEIBNIZ : $\forall x > 0,\ F'(x) = -2x\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+i)x^2}dt = -2xe^{-ix^2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}dt$.

On pose $u = tx$ dans cette intégrale, $\varphi : u \mapsto \dfrac{u}{x}$ est une bijection C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, et on obtient $F'(x) = -2e^{-ix^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$ d'après le rappel de la valeur de l'intégrale de GAUSS.

Au final : $\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } F'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2} \text{ pour } x > 0.}$

2.3 Pour $x > 0$, on a $|F(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x,t)|dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x^2}}{\sqrt{t^4+1}}dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}dt$. Par le changement de variable $t = \dfrac{u}{x} = \varphi(u)$ (φ est bien bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 et strictement croissante et $t \mapsto f(x,t)$ et continue sur $\mathbb{R}_+$), on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$. Ainsi, on a bien $\boxed{\forall x > 0,\ |F(x)| \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x}.}$ Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2x} = 0$, par le théorème d'encadrement : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.}$

3.1 Pour $0 < a < b$, on a $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b F'(t)dt = -\sqrt{\pi}\int_a^b e^{-it^2}dt$. Comme $t \mapsto e^{-it^2}$ et F sont continues en 0 d'après 2.1, en faisant tendre a vers 0 : $F(b) - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+i} = -\sqrt{\pi}\int_0^b e^{-it^2}dt$ (R). Mais comme F admet une limite finie en $+\infty$ d'après 2.3, $b \mapsto \displaystyle\int_0^b e^{-it^2}dt$ aussi. En faisant tendre b vers $+\infty$ dans la relation (R), on a $-\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+i} = -\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-it^2}dt$ d'où $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}dx \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+i} = \sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}dx.}$

3.2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+i} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2-i}{(x^2+i)(x^2-i)}dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{x^4+1} - \frac{i}{x^4+1}\right)dx = I - iI = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{i\pi}{2\sqrt{2}}$ par linéarité et d'après les questions 1.2 et 1.4. Avec la question 3.1 : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$

3.3 Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ convergent car $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}dx$ converge (partie réelle et imaginaire) et, comme $e^{-ix^2} = \cos(x^2) - i\sin(x^2)$, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$