

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 15

PSI 1 2024-2025

du lundi 20/01 au vendredi 24/01

1 Théorèmes de domination : voir programme précédent

2 Intégration à paramètre : voir programme précédent

3 Espaces préhilbertiens réels :

- définition d'une forme bilinéaire symétrique définie positive ;
- forme quadratique associée, identités de polarisation, du parallélogramme ;
- inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, de MINKOWSKI, cas d'égalité ;
- produit scalaire et norme associée dans un espace préhilbertien réel ;
- angle non orienté entre deux vecteurs non nuls ;

4 Orthogonalité :

- vecteurs unitaires et orthogonaux dans un espace préhilbertien réel ;
- famille libre de vecteurs orthogonaux non nuls, relation de PYTHAGORE ;
- sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace (en somme directe) ;
- relation entre les orthogonaux et la somme, l'intersection ;

5 En dimension finie :

- espaces euclidiens, bases orthonormales ;
- procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT, existence de bases orthonormales ;
- relations entre les coordonnées et le produit scalaire, la norme dans une B.O.N. ;
- supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien ;
- projection orthogonale et expression vectorielle dans une B.O.N. ;
- distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie avec la projection orthogonale ;
- expression à l'aide du produit scalaire des formes linéaires : distance à une droite ou un hyperplan ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 énoncer le théorème sur l'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT (th. 9.8)
- 2 énoncer les relations entre les coordonnées des vecteurs et les produit scalaire, norme (th. 9.10)
- 3 énoncer le résultat sur la projection orthogonale sur F de dimension finie dans E préhilb. (prop. 9.14)
- 4 énoncer le théorème sur la distance d'un vecteur à un sous-espace (th. 9.15)
- 5 énoncer le théorème de représentation d'une forme linéaire dans E euclidien (th. 9.16)
- 6 prouver l'inégalité de MINKOWSKI (triangulaire) dans un espace préhilbertien (prop. 9.2 et th. 9.3)
- 7 prouver que si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthonormées, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^T$ (rem. 9.16)
- 8 prouver la relation sur la distance d'un vecteur à un hyperplan dans E euclidien (prop. 9.17)

Prévision pour la prochaine semaine : révision sur espaces préhilbertiens et séries entières