ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 9
ALGÈBRE BILINÉAIRE

9.1 Espaces préhilbertiens

9.1 *Centrale PSI 2011 d'après RMS* Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

a. Si $\dim E = n$, montrer que $\big(\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $E\big) \iff \big(\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (e_i|x)^2\big)$.

b. Est-ce encore vrai si on ne suppose plus E de dimension n ?

9.2 Soit E un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ surjective telle que : $\forall (x,y) \in E^2,\ \big(f(x)|f(y)\big) = (x|y)$.
Montrer que f est un endomorphisme de E.

9.2 Espaces euclidiens et hermitiens

9.3 Polynômes orthogonaux : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $w \in C^0(I, \mathbb{R}_+^*)$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, t \mapsto t^n w(t)$ est intégrable sur I. Ainsi, en notant E l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ telles que $t \to f^2(t)w(t)$ est intégrable sur I, E est un espace préhilbertien réel (qui contient les fonctions polynomiales) en le munissant du produit scalaire $(f|g) = \int_I fgw$. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on identifie les polynômes aux fonctions polynomiales), on a l'existence et l'unicité de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = n$, P_n est un polynôme unitaire et $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ n \neq m \Longrightarrow (P_n|P_m) = 0$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ ||P_n||^2 = (P_n|XP_{n-1})$.
b. Établir que P_n est scindé à racines (les $\alpha_{n,k}$) simples $\mathrm{Inf}(I) < \alpha_{n,1} < \cdots < \alpha_{n,n} < \mathrm{Sup}(I)$.
c. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ P_{n+2} = (X + a_n)P_{n+1} + b_n P_n$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $(L_{n,k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux n racines simples de P_n et les réels $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \Delta_{n,k} = \int_I L_{n,k}w = (L_{n,k}|1)$.

d. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_I Pw = \sum\limits_{k=1}^{n} P(\alpha_{n,k})\Delta_{n,k}$.
On prend dorénavant $I = [-1;1]$ et $w(t) = 1$, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la suite des polynômes de Legendre et on note toujours $\alpha_{n,1}, \cdots, \alpha_{n,n}$ ses racines simples dans $]-1;1[$. On pose $U_n = \dfrac{n!}{(2n)!}\Big((X^2-1)^n\Big)^{(n)}$.

e. Déterminer le degré et le coefficient dominant de U_n.
f. Vérifier que si $n \neq m$, on a $(U_n|U_m) = 0$. Qu'en déduire ?
Soit maintenant une fonction $f \in C^{2n}([-1;1], \mathbb{R})$.
g. Justifier que : $\exists! H \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \forall k \in [\![1;n]\!],\ H(\alpha_{n,k}) = f(\alpha_{n,k})$ et $H'(\alpha_{n,k}) = f'(\alpha_{n,k})$.
h. Soit $x_0 \in [-1;1] \setminus \{\alpha_{n,1}, \cdots, \alpha_{n,n}\}$ et $\Phi : [-1;1] \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = f(x) - H(x) - K\prod\limits_{k=1}^{n}(x - \alpha_{n,k})^2$ où K est choisi pour que $\Phi(x_0) = 0$. Montrer qu'il existe $\eta \in [-1;1]$ tel que $K = \dfrac{n!f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}$.

i. Justifier l'existence de $M_{2n} = \sup\limits_{x\in[-1;1]} |f^{(2n)}(x)|$. Montrer que $\forall x \in [-1;1],\ |f(x) - H(x)| \leqslant \dfrac{n!M_{2n}P_n^2(x)}{(2n)!}$.

j. Montrer que : $\left|\int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_{n,k} f(\alpha_{n,k})\right| \leqslant \dfrac{n!M_{2n}||P_n||^2}{(2n)!}$.

9.4 *Centrale PSI 2012* Soit E euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_p)$ une famille de vecteurs de E.

a. Si $\mathcal{F}$ est une base orthonormale, pour $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, justifier qu'il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que $\forall k \in [\![1;p]\!],\ (v|v_k) = a_k$; vous en donnerez une expression.
b. Donner une **CNS** sur $\mathcal{F}$ pour qu'elle vérifie : $\forall (a_1, \cdots, a_p) \in \mathbb{R}^p,\ \exists v \in E,\ \forall k \in [\![1;p]\!],\ (v|v_k) = a_k$.
c. Donner une **CNS** sur $\mathcal{F}$ pour qu'elle vérifie : $\forall (a_1, \cdots, a_p) \in \mathbb{R}^p,\ \exists! v \in E,\ \forall k \in [\![1;p]\!],\ (v|v_k) = a_k$.

9.5 *Mines PSI 2010 d'après RMS* Soit E un espace euclidien, $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E et une famille $(v_1, \cdots, v_n) \in E^n$ tel que $||v_1|| + \cdots + ||v_n|| < 1$. On pose : $\forall i \in [\![1;n]\!],\ w_i = e_i + v_i$.
Montrer que $(w_1, \cdots, w_n)$ est une base de E.

9.6 *Mines PSI 2011 d'après RMS* Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, $x_1, \cdots, x_p$ des éléments de E, $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans de E. Montrer : $\exists H_0 \in \mathcal{H},\ \forall H \in \mathcal{H},\ \sum\limits_{k=1}^{p} d(x_k, H_0)^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{p} d(x_k, H)^2$.

9.3 Projections et distance à un sous-espace

9.7 *Matrices de Householder* Soit U un vecteur unitaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (que l'on identifie à $\mathbb{R}^n$ ce qui donne un vecteur $u = (u_1, \cdots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k^2 = 1$) et $A = I_n - 2U{}^tU$.
Déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à A. Faire de même avec $B = I_n - U{}^tU$.
Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan $P = \mathrm{Vect}\big(v_1 = (1,2,3), v_2 = (1,0,1)\big)$.

9.8 Soit E un espace vectoriel euclidien et p, q deux projections orthogonales. Montrer que p et q commutent si et seulement si $(\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} \cap \operatorname{Im} p$ et $(\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} \cap \operatorname{Im} q$ sont orthogonaux.

9.9 Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et F un sous-espace vectoriel de E muni d'une base orthonormée $(x_1, \cdots, x_p)$.

a. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F)$ où p_F est projection orthogonale p_F sur F est $A = \sum\limits_{k=1}^{p} X_k{}^tX_k$ où $X_k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_k)$.
b. Donner la projection orthogonale sur le plan $P : x + y + z - t = x - y - z - t = 0$ dans $\mathbb{R}^4$.

9.10 *Centrale PSI 2007 d'après RMS* Soit p, q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien.
Montrer : $p \circ q = 0 \Longrightarrow q \circ p = 0$. Qu'en est-il si les projecteurs ne sont pas orthogonaux ?

9.11 *CCP PSI 2008 d'après RMS* Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E.

a. Montrer que $||p(x)||^2 = (p(x)|x)$ pour tout x de E.
b. Montrer que, pour toute base orthonormée $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, $\sum\limits_{i=1}^{n} ||p(e_i)||^2 = \mathrm{rang}\,(p)$.

9.12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$; on note $F = X\,\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

a. Montrer que $\exists! Q = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X^k \in F,\ m = \operatorname*{Inf}\limits_{P \in F} \int_0^{+\infty} (1 - P(t))^2 e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} (1 - Q(t))^2 e^{-t}dt$.
b. Posons $R = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \prod\limits_{j=1}^{k} (X + j)$, en utilisant $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k!$, établir que $\forall q \in [\![1;n]\!],\ R(q) = 0$.
c. Comparer alors m et $R(0)$. Calculer $R(-1)$ et en déduire la valeur exacte de m.

9.4 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

9.13 *Mines PSI 2015* Oriana Peltzer

Soit A et B deux espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer que A et B sont supplémentaires dans E si et seulement s'il existe un produit scalaire sur E tel qu'avec ce produit scalaire, B soit l'orthogonal de A.

9.14 *Centrale Maths1 PSI 2016* Arthur Robbe

Soit E un espace euclidien de dimension n, $X = (x_1, \cdots, x_n)$ et $Y = (y_1, \cdots, y_n)$ sont deux familles de vecteurs de E telles que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (x_i|x_j) = (y_i|y_j)$.

a. Si $n = 2$ et (x_1, x_2) est libre, montrer que (y_1, y_2) est libre.

b. On revient au cas général, montrer que si X et Y sont libres, alors si on définit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ par les conditions $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \varphi(x_i) = y_i$, alors $\forall x \in E,\ ||\varphi(x)|| = ||x||$.

c. Si X n'est pas libre, montrer qu'il existe encore $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \varphi(x_i) = y_i$ et qui vérifie $\forall x \in E,\ ||\varphi(x)|| = ||x||$. Montrer qu'on peut même imposer que cette isométrie soit directe.

9.15 *CCP PSI 2016* Rogelio Escalona II

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, $E = \mathbb{R}^n$ canonique et f canoniquement associé à A.

a. Montrer que f est un endomorphisme antisymétrique, c'est-à-dire que $\forall (x,y) \in E^2,\ (f(x)|y) = -(f(y)|x)$.

b. Montrer que $\det(f) = (-1)^n \det(f)$. Qu'en déduit-on ?

c. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

d. Justifier que f induit sur $\text{Im}(f)$ un endomorphisme antisymétrique injectif.

e. Si $n = 3$, justifier qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ telle que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Existe-t-il une base $\mathcal{B}'$ de E formée de vecteurs propres de f ?

9.16 *CCP PSI 2016* Samy Essabar I

Soit $\Phi : \mathbb{R}[X]^2 \to \mathbb{R}$ défini par $\Phi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$.

a. Montrer que Φ est un produit scalaire.

b. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - at - b)^2 dt$.

9.17 *ENS Cachan PSI 2017* Vincent Meslier I

Soit un entier $n \geqslant 1$ et $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

a. Prouver que E est un espace vectoriel. Quelle est la dimension de E ?

b. Soit $U_k = \dfrac{1}{k!}(X-1)^k$ avec $k \in [\![1;n]\!]$. Montrer que $\mathcal{B} = (U_1, \cdots, U_n)$ est une base de E.

c. Quels sont les coefficients de P dans la base $\mathcal{B}$?

En déduire un produit scalaire pour lequel $\mathcal{B}$ est une base orthonormale.

d. Soit $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(P) = (X-1)P'$. φ est-il un endomorphisme ? Que vaut $\varphi(U_k)$?

En déduire que φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

e. Montrer que φ est inversible et donner son inverse.

9.18 *ENS Cachan PSI 2017* Sam Pérochon I

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de sa norme euclidienne associée $||x|| = \sqrt{(x|x)}$. Soit $n \geqslant 1$, une famille $(v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs unitaires de E et $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$.

a. On suppose les v_k deux à deux orthogonaux. Montrer que $\left|\left| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \right|\right| = \sqrt{n}$.

b. On ne suppose plus les v_k deux à deux orthogonaux. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes avec $X_k(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$.

On pose $U = \left|\left| \sum\limits_{k=1}^{n} X_k v_k \right|\right|^2$. Que vaut $E(U)$?

c. En déduire qu'il existe une famille $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ telle que $\left|\left| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \right|\right| \leqslant \sqrt{n}$.

d. Montrer : $(v_1, \cdots, v_n)$ est une famille orthonormale $\iff \forall (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, $\left|\left| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \right|\right| = \sqrt{n}$.

e. On suppose que $(v_1, \cdots, v_n)$ n'est pas une famille orthonormale.

Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ telle que $\left|\left| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \right|\right| > \sqrt{n}$.

9.19 *Centrale Maths1 PSI 2017* Agathe Maldonado

Soit E euclidien de dimension $n \geqslant 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E et p un projecteur de E.

a. Questions de cours : qu'est-ce qu'un espace euclidien ? quelles sont les particularités d'un projecteur ? qu'est-ce qu'une base orthonormée ?

b. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique (c'est-à-dire que $\forall (x, y) \in E^2$, $(x|p(y)) = (p(x)|y)$).

c. Si p est orthogonal, que vaut $\sum\limits_{k=1}^{n} ||p(e_k)||^2$?

Soit p^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ vaut ${}^tA$ si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.

d. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $(p(x)|y) = (x|p^*(y))$.

e. Montrer que $\text{Ker}(p^* \circ p) = \text{Ker}(p)$.

9.20 *Mines PSI 2017* Romain Delon I

E désigne un espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = (\mathcal{L}(E))^*$ (ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{L}(E)$) définie par $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\forall v \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi(u)(v) = \text{Tr}\,(u \circ v)$.

Montrer que φ est un isomorphisme.

9.21 *Mines PSI 2017* Maxime Lacourcelle II

Soit E un espace euclidien de dimension n.

a. Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exists! (f_1, \cdots, f_n) \in E^n$, $M = \big((e_i|f_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

b. La réciproque est-elle vraie ?

9.22 *Mines PSI 2017* Claire Meunier I

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \cdots, x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n)^2 dt$.

Montrer que cette fonction admet un minimum absolu, le calculer en dimension quand $n = 2$.

9.23 *CCP PSI 2017* Tom Huix II

Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.

a. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Si $u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(u) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 - u_1 t - u_2 t^2 - \cdots - u_n t^n)^2 dt$.

b. Montrer que f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$.

On note ce minimum ρ_n atteint en $a = (a_1, \cdots, a_n)$ et on pose $P = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X^k$ et $Q = 1 - \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \prod\limits_{i=1}^{j} (X+i)$.

c. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Calculer $(X^k|1-P)$ pour en déduire que $Q(k) = 0$.

d. Comparer alors ρ_n et $Q(0)$. Calculer $Q(-1)$ et en déduire la valeur exacte de ρ_n.

9.24 *Petites Mines PSI 2017* Pauline Lamaignère II

Soit E un $\mathbb{R}$-espace euclidien et u un vecteur de E.

Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(u)$ et s la réflexion d'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.

a. Pour tout vecteur x de E, expliciter $p(x)$ et $s(x)$.

Soit E un espace normé et a et b deux vecteurs différents de E de même norme.

b. Montrer qu'il existe un unique hyperplan de E tel que $s(a) = b$ et $s(b) = a$.

9.25 *Mines PSI 2018* Jean Boudou II

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

On suppose que $\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

9.26 *Mines PSI 2018* Amélie Guyot I

a. Calculer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour $k \in [\![0;n]\!]$, on définit L_k par $L_k(t) = e^t \dfrac{d^k}{dt^k}(e^{-t}t^k)$.

c. Montrer que $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$, déterminer son degré et son coefficient dominant.

d. Si $k \in [\![0;n]\!]$, calculer $(L_k|X^p)$ pour $p \in [\![0;k-1]\!]$. Calculer aussi $(L_k|X^k)$.

e. En déduire que $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer $||L_k||$ pour $k \in [\![0;n]\!]$.

On pose, pour $k \in [\![0;n]\!]$, $P_k = \dfrac{L_k}{||L_k||}$.

f. Calculer $P_k(0)$ pour $k \in [\![0;n]\!]$.

g. On définit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$. Donner une base de F, de $F^\perp$.

h. Calculer $\mathrm{Inf}_{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 - a_1 t - \cdots - a_n t^n)^2 e^{-t} dt$.

9.27 *Mines PSI 2018* Lucie Jandet II

a. Montrer que $\theta : (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{Tr}\ ({}^t M N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\ (M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner $\dim(H)$.

c. Calculer $d(J,H)$ si $J = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9.28 *Mines PSI 2018* Julien Langlais I

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega :]a;b[\to \mathbb{R}$ continue, strictement positive et intégrable sur $]a;b[$.

a. Montrer que $< P, Q >= \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère $(P_0, \cdots, P_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique $(1, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
Dans toute la suite de l'exercice k désigne un entier dans $[\![1; n-1]\!]$.

b. Montrer qu'il existe $(a_k, b_k, c_k) \in \mathbb{R}^3$ tel que $XP_k = a_k P_{k+1} + b_k P_k + c_k P_{k-1}$.

c. Si $k \geqslant 2$, montrer que $c_k = a_{k-1}$.

d. Avec $< P_k, 1 >$, montrer que P_k possède une racine réelle de multiplicité impaire dans $]a;b[$.

Soit $(x_1, \cdots, x_p) \in]a;b[^p$ les racines de multiplicités impaires de P_k dans l'intervalle $]a;b[$.

e. En considérant $Q_k = \prod_{i=1}^{p} (X - x_i)$ et $< P_k, Q_k >$, montrer que $p = k$.

f. En déduire que les racines complexes de P_k sont toutes réelles, toutes dans $]a;b[$ et toutes simples.

9.29 *Mines PSI 2018* Charlotte Nivelle II

Soit E un espace euclidien, un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leqslant \dim(E)$ et $(v_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille de vecteurs de E.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum_{k=1}^{p} (x|v_k)^2$

(ii) $\forall x \in E,\ x = \sum_{k=1}^{p} (x|v_k) v_k$

(iii) $(v_1, \cdots, v_p)$ est une base orthonormée de E.

9.30 *CCP PSI 2018* Martin Gros I

Soit $\Phi : \mathbb{R}[X]^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.

a. Φ est-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$?

b. Calculer $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Trouver $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t}dt$.

9.31 *CCP PSI 2018* Pauline Lamaignère I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ par $\varphi(M, N) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} n_{i,j}$ si $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $H = \{M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} = 0\}$.

b. Calculer $\underset{M \in H}{\mathrm{Inf}} \Big(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \Big)$.

9.32 *CCP PSI 2018* Benoit Souillard I

On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

a. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

b. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c. Déterminer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

9.33 *Petites Mines PSI 2018* Marie-Jeanne Paul I

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ dans lequel on considère $F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x+y-z-t = x-y+z-t = 0\}$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F.

9.34 *ENS Cachan PSI 2019 (OdlT 2019/2020 X-ENS PSI planche 44)* Pierre Fabre

Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on appelle pseudo produit scalaire une application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique positive (mais pas forcément définie positive).

a. Soit $c > 0$, montrer que : $\forall s \in]1; 2[,\ I(c) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{1-s}e^{-ct}dt$ existe.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $F_t(x, y) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j e^{-(a_i+a_j)t}$ et $G(x, y) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j (a_i + a_j)^{s-2}$.

b. Montrer que F_t et G sont des pseudo produits scalaires. Indication : montrer $I(c) = c^{s-2}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$.

On pose $K(a, b) = (a + b)^{s-2}$. On admet l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ pour un pseudo produit scalaire.

c. Soit $(k, \ell, m, p) \in [\![1; n]\!]^4$ avec $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n$ et $1 \leqslant m \leqslant p \leqslant n$. Montrer que :

$$\sum_{i=k}^{\ell}\sum_{j=m}^{p} K(a_i, a_j) \leqslant \sqrt{\Big(\sum_{i=k}^{\ell}\sum_{j=k}^{\ell} K(a_i, a_j)\Big)\Big(\sum_{i=m}^{p}\sum_{j=m}^{p} K(a_i, a_j)\Big)}.$$

On pose $g_{A,B}(x) = \displaystyle\int_A^B K(a, x)da$. On admet que $\displaystyle\int_A^B g_{C,D}(x)dx \leqslant \sqrt{\int_A^B g_{A,B}(x)dx \int_C^D g_{C,D}(x)dx}$.

On pose, pour $s \in]1; 2]$ et $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$: $\rho_s(x, y) = \left[\dfrac{x^s + y^s}{2} - \Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)^s\right]^{1/s}$.

d. Montrer que $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ \rho_s(x, y) + \rho_s(y, z) \geqslant \rho_s(x, z)$.

e. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \rho_s(x, y) = 0 \iff x = y$.

9.35 *Centrale Maths1 PSI 2019* Mathis Chénet

a. Soit E un espace préhilbertien réel. Rappeler l'inégalité de BESSEL.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, $E = C^0([a; b], \mathbb{R})$ et $K : [a; b]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour $f \in E$, on définit $T(f) = g : [a; b] \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in [a; b],\ g(x) = \displaystyle\int_a^b K(x, y)f(y)dy$.

b. Montrer que $\varphi : (u, v) \mapsto \displaystyle\int_a^b u(t)v(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.

c. Montrer que T est un endomorphisme de E.

Prenons $\lambda \in Sp(T)$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille orthonormée de $E_\lambda(T)$.

d. Montrer que $\forall x \in [a; b],\ \lambda^2 \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (f_i(x))^2 \leqslant \int_a^b K(x, y)^2dy$.

9.36 *Mines PSI 2019* Julien Tissot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ tel que $\theta(M, N) = \mathrm{Tr}\ ({}^tMN)$.

On pose $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\ (M) = 0\}$ et $J = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que θ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

c. Calculer la distance de J à H.

9.37 *Mines PSI 2019* Quentin Vacher I

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E qui vérifie la relation : $\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E.

9.38 *CCP PSI 2019* Thomas Brémond et Lucas Maisonnave II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $N = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M, N) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}n_{i,j}$.

On définit aussi l'ensemble $H = \left\{M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j} = 0\right\}$.

a. Montrer que φ définit un produit scalaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $D = \underset{M\in H}{\mathrm{Inf}} \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$.

9.39 *CCP PSI 2019* Romain Cornuault II

Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

a. Montrer que $(.|.)$ définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$.

b. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.

c. Déterminer $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

9.40 *CCP PSI 2019* Perrine Hoffmann II

Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\ ({}^tAB)$.

On pose aussi $\Sigma = \left\{M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

a. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que Σ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c. Exhiber une base orthonormale de $\Sigma^\perp$.

d. Trouver la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $\Sigma^\perp$. Et celle de M à Σ ?

9.41 *Petites Mines PSI 2019* Thibault Maury II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(.|.) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ telle que $(M|N) = \mathrm{Tr}\ ({}^tMN)$.

On pose $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $A_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $(.|.)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

c. Montrer que $S_n(\mathbb{R}) = \big(A_n(\mathbb{R})\big)^\perp$.

d. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée. Calculer $d = \underset{S\in S_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Inf}} \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (m_{i,j} - s_{i,j})^2 \right)$.

9.42 *Centrale Maths1 PSI 2021* Paul Jaïs

Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = e^{-x^2}$ et $(.|.)$ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx$.

a. Montrer que Φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier n, il existe un polynôme réel P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi^{(n)}(x) = P_n(x)\Phi(x)$. Quel est le degré de P_n ?

b. Montrer que $(.|.)$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c. Montrer que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

d. Montrer que P_n n'admet que des racines réelles simples pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

9.43 *Mines PSI 2021* Robin De Truchis I

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale p sur le plan $P : x+y+z = 0$.

9.44 *CCINP PSI 2021* Margot Reungoat II

Soit E un espace préhilbertien et p un projecteur de E.

Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E,\ ||p(x)|| \leqslant ||x||$.

9.45 *Mines-Télécom PSI 2021* Margot Reungoat I (sur 6 points)

a. Soit E un espace euclidien, x un vecteur de E et F un sous-espace vectoriel de E. Rappeler la définition de la distance de x à F et exprimer sa valeur avec une projection orthogonale.

Dans la suite de cet exercice, on prend $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(A|B) = \mathrm{Tr}\,(A^T B)$ et $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

b. Donner une base orthonormale de F.

c. On prend $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $d(M, F)$.

9.46 *Centrale Maths1 PSI 2022* Louis Lacarrieu

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $< P, Q >= \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.

On note, pour $k \in [\![0; n]\!]$, $B_k = \dfrac{X^k}{k!}$ et $L_k : t \mapsto \dfrac{(-1)^k}{k!} e^t f_k^{(k)}(t)$ où $f_k : t \mapsto e^{-t}t^k$.

a. Montrer que $< ., . >$ définit un produit scalaire sur E.

b. La famille $\mathcal{B} = (B_0, \cdots, B_n)$ est-elle une base orthonormale de E ?

c. Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, \cdots, L_n)$ est une famille de vecteurs de E.

Donner le degré et le coefficient dominant de L_k pour $k \in [\![0; n]\!]$.

d. La famille $\mathcal{L}$ est-elle une base orthonormale de E ?

e. On définit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$. Donner une base de F, de $F^\perp$.

f. Calculer $\displaystyle\inf_{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 - a_1 t - \cdots - a_n t^n)^2 e^{-t}dt$.

9.47 *Centrale Maths1 PSI 2022* Margaux Millaret

Soit $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $E = C^0(I, \mathbb{R})$. Pour $(f,g) \in E^2$, on pose $< f, g >= \int_0^{\pi/2} f(t)g(t)dt$ et $||f|| = \sqrt{< f, f >}$.

On définit sur E les fonctions A et B par $A(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $B(f)(x) = \int_x^{\pi/2} f(t)dt$ pour $f \in E$ et $x \in I$.

a. Montrer que A et B sont deux endomorphismes de E.

b. Montrer que $\forall (f,g) \in E^2,\ < A(f), g >=< f, B(g) >$.

c. En déduire que les valeurs propres de $B \circ A$ sont positives.

d. Pour $f \in E$ et $x \in I$, montrer que $A(f)(x)^2 \leqslant x \int_0^x f(t)^2 dt$.

e. En déduire qu'il existe un réel $K \geqslant 0$ tel que $\forall f \in E,\ ||A(f)|| \leqslant K||f||$.

f. Montrer que les valeurs propres de $B \circ A$ sont les $\frac{1}{(2n+1)^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

9.48 *CCINP PSI 2022* Marius Desvalois I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'espace $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur lequel on définit, pour tout $(X,Y) \in E^2$, $< X, Y >= X^T Y \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que $< .,. >$ définit un produit scalaire sur E. On note $||.||$ sa norme euclidienne associée.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Im}\,(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^T)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y \in E$ fixés, on définit $f : E \to \mathbb{R}$ par $f(X) = ||AX - Y||$.

c. Montrer que $f(X) = \underset{Z \in E}{\mathrm{Inf}}(f(Z))$ si et seulement si $A^T(AX - Y) = 0$.

9.49 *CCINP PSI 2022* Matis Viozelange II

On note $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ et, pour $(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$. On pose F le sous-espace de E composé des fonctions affines de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $F = \{f \in E \mid \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in [0;1],\ f(x) = ax + b\}$.

a. Montrer que $(\,.\,|\,.\,)$ définit un produit scalaire sur E.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de $\int_0^1 t^n \ln(t)dt$ et calculer sa valeur.

c. Déterminer le projeté orthogonal de $f : x \mapsto x\ln(x)$ sur F.

d. Calculer $\underset{(a,b) \in \mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} ||g_{a,b}||$ où $g_{a,b} : x \mapsto ax + b - x\ln(x)$.

9.50 *Centrale Maths1 PSI 2023* Maxence Prieur

Pour $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $< P, Q >= \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $<\ .,\ .\ >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Montrer que $\left((X-1)^k\right)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Déterminer $(\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

9.51 *Centrale Maths1 PSI 2023* Marie-Lys Ruzic

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et le vecteur $b = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ associé à B. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, on lui associe canoniquement le vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pas $f(x) = ||u(x) - b||^2$.

a. L'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet-elle une solution ?

b. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$.

c. Ce minimum est-il atteint en un unique point de $\mathbb{R}^3$?

d. Montrer l'équivalence entre (i) : $u(x) - b \in (\mathrm{Im}\,(u))^\perp$ et (ii) : $A^TAX = A^TB$.

e. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f admette son minimum en $x \in \mathbb{R}^3$.

9.52 *CCINP PSI 2023* Paul-Antoine Baury-Carpentier I

Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\,(A^TB)$.

On pose aussi $\Sigma = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que Σ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c. Exhiber une base orthonormale de $\Sigma^\perp$.

d. Trouver la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $\Sigma^\perp$. Et celle de M à Σ ?

9.53 *CCINP PSI 2023* Rémi Darrieumerle II

On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

a. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ en distinguant selon la parité de n.

b. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c. Déterminer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

9.54 *CCINP PSI 2023* Marius Desvalois II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(\,.\,|\,.\,) : \mathbb{R}_n[X]^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(P|Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k$ si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$.

a. Montrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Calculer $d(1, H)$ où $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

9.5 Officiel de la Taupe

9.55 *OdlT 2013/2014 Centrale PSI planche 120II*

Soit $U_1, \cdots, U_p$ des parties non vides et 2 à 2 distinctes de $[\![1; n]\!]$ telles que $\forall (i,j) \in [\![1; p]\!]^2$, $\mathrm{card}\,(U_i \cap U_j) = a$. On définit $\alpha_k = \mathrm{card}\,(U_k)$ pour $k \in [\![1; p]\!]$ et la matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ par $a_{i,j} = 1$ si $j \in U_i$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

a. Calculer A^tA en fonction de a et α_k.

b. Que peut-on dire du cardinal de $E = \{k \in [\![1; p]\!] \mid a = \alpha_k\}$?

c. En déduire que A^tA est inversible. Montrer que $p \leqslant n$.

9.56 *OdlT 2013/2014 CCP PSI planche 246II*

Soit $n \geqslant 2$, à quelle condition sur les réels $a_0, \cdots, a_n$ l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ définit-elle un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$? En supposant cette condition réalisée, trouver une base orthonormale de E. On pose $F = \left\{P \in E \mid \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$. Quelle est la distance de X^n à F ?

9.57 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 162II*

Montrer que $\Phi(f, g) = f(0)g(0) + \int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)dt$ définit un produit scalaire sur l'espace E des fonctions de classe C^1 sur $[-1; 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Trouver une base orthonormale de $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0\}$.

9.58 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 241II*

a. Montrer que $(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
b. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux à deux orthogonaux pour ce produit scalaire et de monôme de plus haut degré X^n.
c. Montrer que si n est pair (resp. impair), P_n est pair (resp. impair).
d. Montrer que P_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

9.59 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 291II* Soit $a_0, \cdots, a_n$ des réels.

a. À quelle condition $(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ définit-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?
b. Sous cette condition, donner une base orthonormale pour ce produit scalaire.
c. Trouver l'orthogonal de $F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$ et déterminer la distance de X^n à F.

9.60 *OdlT 2014/2015 ENSAM PSI planche 321II*

a. Montrer que si A et B sont deux matrices réelles symétriques et positives, on a $\mathrm{Tr}\,(AB) \leqslant \mathrm{Tr}\,(A)\mathrm{Tr}\,(B)$.
b. On pose $||M|| = \mathrm{Tr}\,({}^tMM)$ avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ ||MN|| \leqslant ||M||\,||N||$.

9.61 *OdlT 2014/2015 ENTPE-EIVP PSI planche 323II*

a. Montrer que l'ensemble S des matrices symétriques et l'ensemble A des matrices antisymétriques sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux pour le produit scalaire $(M|N) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}n_{i,j}$.
b. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée. Calculer $d = \operatorname{Inf}_{M\in S} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (c_{i,j} - m_{i,j})^2$.

9.62 *OdlT 2014/2015 ENTPE-EIVP PSI planche 325II*

a. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E euclidien de dimension n vérifiant $\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$.
Montrer que c'est une base orthonormale de E.
b. On ne suppose plus que E est de dimension finie mais on suppose la famille libre, montrer que c'est encore une base orthonormale.

9.63 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 129II*

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de E euclidien, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. On appelle matrice de GRAM associée la matrice $G = \big((u_i|u_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a. Exprimer G en fonction de la matrice M dont les colonnes sont les coordonnées de u_i dans $\mathcal{B}$.
b. Montrer que $\det(G) \geqslant 0$ et que $\det(G) = 0 \Longleftrightarrow (u_1, \ldots, u_n)$ est liée.
c. Généraliser ce résultat pour une famille de $p < n$ vecteurs.

9.64 *OdlT 2015/2016 Centrale PSI planche 191*

Montrer que, si A et B sont deux matrices, rang $(AB) \leqslant \text{Min}(\text{rang}\,(A), \text{rang}\,(B))$.
Soient $a > 0$, $d_1 \geqslant a$ et $d_i > a$ pour $i \geqslant 2$; montrer que la matrice A de coefficients $a_{i,i} = d_i$ et $a_{i,j} = a$ pour $i \neq j$, est inversible.
Soit $a > 0$, $F_1, \cdots, F_m$ des sous-ensembles de $[\![1;n]\!]$ deux à deux distincts tels que card $(F_i \cap F_j) = a$ si $i \neq j$; montrer que $m \leqslant n$.

9.65 *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 40I*

Montrer que ϕ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\phi(P)(X) = P(-X)$ est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.

9.66 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 212II abordable dès la 1ère année*

On munit $E = C^2([0;1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $< f, g >= \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,dt$.

a. Montrer que $(\text{ch}\,, \text{sh}\,)$ est une base de $A = \{y \in E \mid y'' = y\}$.

b. Montrer que $\forall f \in A,\ \forall g \in E,\ < f, g >= f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$. Calculer $< \text{sh}\,, \text{ch}\, >$, $||\text{ch}\,||^2$ et $||\text{sh}\,||^2$.

c. Montrer que si $f \in A$ et $g \in B = \{y \in E \mid y(1) = y(0) = 0\}$, alors $< f, g >= 0$.

d. Pour $f \in H = \{y \in E \mid y(1) = 1,\ y(0) = \text{ch}\,1\}$, calculer $< f, \text{sh}\, >$ et $< f, \text{ch}\, >$.

e. Déterminer les coordonnées dans $(\text{sh}\,, \text{ch}\,)$ du projeté orthogonal de $f \in H$ sur A ?

f. En déduire $M = \underset{f\in H}{\text{Inf}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right) dt$.

9.67 *OdlT 2016/2017 EIVP PSI planche 245II abordable dès la 1ère année*

Dans un espace E euclidien de dimension n, soit deux familles $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de vecteurs de E et $F = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ et $G = \text{Vect}(y_1, \ldots, y_n)$. On suppose que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $(x_i|x_j) = (y_i|y_j)$.
a. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si et seulement si $(y_1, \ldots, y_n)$ est libre.

b. Montrer que F et G sont de même dimension.

9.68 *OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 207II*

Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$, donner sa dimension et calculer $d(1, E)$.

9.69 *OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 216II, abordable dès la première année*

Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$, où les a_k sont des réels deux à deux distincts, munit $\mathbb{R}_n[X]$ d'un produit scalaire. Montrer brièvement que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$ est un espace vectoriel.

Donner sa dimension et son orthogonal. Donner la distance de X^n à F.

9.70 *OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 220I, abordable dès la première année*

Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan $P\ :\ x - 2y + z = 0$.

9.71 *Compléments OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 427II*

Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.

a. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Si $u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(u) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 - u_1 t - u_2 t^2 - \cdots - u_n t^n)^2 dt$.

b. Montrer que f admet un minimum absolu m sur $\mathbb{R}^n$.

On note ce minimum ρ_n atteint en $a = (a_1, \cdots, a_n)$ et on pose $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$ et $Q = 1 - \sum_{j=1}^{n} a_j \prod_{i=1}^{j} (X + i)$.

c. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Calculer $(X^k|1 - P)$ pour en déduire que $Q(k) = 0$.

d. Comparer m et $Q(0)$. Que vaut $Q(-1)$? En déduire la valeur exacte de m.

9.72 *Compléments OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 447II*

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$; donner une condition nécessaire et suffisante pour que $< P, Q >= \sum_{k=1}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose cette condition sur $a_1, \cdots, a_n$ vérifiée, montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=1}^{n} P(a_k) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera la dimension et l'orthogonal. Calculer la distance de X^n à F.