SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 9 ALGÈBRE BILINÉAIRE

9.1 Espaces préhilbertiens

9.1 **a.** Bien sûr, si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de E, pour tout vecteur $x \in E$, on a $x = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k$ d'après le cours donc la condition $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2$ est réalisée.

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)^{\perp}$, alors $||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$ car $\forall k \in [\![1;n]\!],\ x \perp e_k$ par hypothèse et $x = 0_E$ puisque seul le vecteur nul a une norme nulle. Ainsi, on a $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)^{\perp} = \{0_E\}$ donc $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = \{0_E\}^{\perp} = E$; la famille $\mathcal{B}$ est donc génératrice de E donc c'est une base de E car $\dim(E) = n$.

Par ailleurs, si $i \in [\![1;n]\!]$, $||e_i||^2 = \sum_{k=1}^{n} (e_k|e_i)^2 \geqslant (e_i|e_i)^2 = ||e_i||^4$ ce qui montre que $||e_i|| \leqslant 1$.

Soit $j \in [\![1;n]\!]$, $H_j = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{j-1}, e_{j+1}, \cdots, e_n)$ est un hyperplan de E donc $D_j = H_j^{\perp}$ est une droite dans laquelle il existe un vecteur v_j unitaire. Alors, par construction, $||v_j||^2 = \sum_{k=1}^{n} (v_j|e_k)^2 = (v_j|e_j)^2 = 1$ donc $|(v_j|e_j)| = 1 \geqslant ||v_j||\,||e_j||$. On obtient donc par CAUCHY-SCHWARZ $|(v_j|e_j)| = 1 = ||v_j||\,||e_j||$ ce qui est le cas d'égalité : v_j et e_j sont colinéaires donc $e_j \in H_j^{\perp}$.

Ceci qui montre déjà (puisque vrai pour $j \in [\![1;n]\!]$) que la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est orthogonale.

De plus, pour $j \in [\![1;n]\!]$, $||e_j||^2 = \sum_{k=1}^{n} (e_j|e_k)^2 = ||e_j||^4$ d'où $||e_j|| = 1$ et $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

b. NON. On prend $E = \mathbb{R}$ muni du produit comme produit scalaire et on pose $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = e_2$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ ||x||^2 = x^2 = (x|e_1)^2 + (x|e_2)^2 = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2}$ alors que (e_1, e_2) liée car $\dim(E) = 1$.

9.2 Comme f est surjective : $(\mathrm{Im}(f))^{\perp} = E^{\perp} = \{0_E\}$; soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y, z) \in E^3$, alors on a $\big(f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)|f(z)\big) = \big(f(\lambda x + \mu y)|f(z)\big) - \lambda\big(f(x)|f(z)\big) - \mu\big(f(y)|f(z)\big)$ donc $f \in \mathcal{L}(E)$ car : $\big(f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)|f(z)\big) = \big(\lambda x + \mu y|z\big) - \lambda\big(x|z\big) - \mu\big(y|z\big) = 0$ d'où $f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y) = 0_E$.

9.2 Espaces euclidiens et hermitiens

9.3 **a.** Pour un entier n, $||P_n||^2 = (P_n|XP_{n-1} + P_n - XP_{n-1}) = (P_n|XP_{n-1})$ car $P_n - XP_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (les termes en X^n s'éliminent) et que $P_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$ par construction de l'orthonormalisée.

b. On note $\alpha_{n,1} < \cdots < \alpha_{n,r}$ les racines réelles d'ordre de multiplicité impair de P_n dans l'intérieur de I et $Q = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_{n,i})$. Bien sûr, P_n peut a priori avoir d'autres racines réelles ailleurs ou des racines complexes non réelles. Alors $\forall t \in I,\ P_n(t)Q(t) \geqslant 0$ car les ordres de multiplicité des racines de P_nQ sont toutes paires pour les racines réelles de P_nQ dans $\mathring{I}$ et de plus P_nQ n'est pas le polynôme nul ($\mathbb{R}[X]$ intègre). Si P_n n'avait pas toutes ses racines simples dans $\mathring{I}$, alors $\deg(Q) < \deg(P_n)$ d'où $(P_n|Q) = 0$ (car $P_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$) ce qui est impossible. Ainsi $P_n = Q$ et on en déduit que toutes les racines de P_n sont simples dans $\mathring{I}$.

c. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = X^{n+2} + \delta_{n+2}X^{n+1} + \cdots$, $P_{n+1} = X^{n+1} + \delta_{n+1}X^n + \cdots$ et $a_n = \delta_{n+2} - \delta_{n+1}$. On a alors $P_{n+2} - (X + a_n)P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$ donc on écrit $P_{n+2} - (X + a_n)P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_k P_k$ (car $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$). Mais si $k < n$, on a $(P_{n+2} - (X + a_n)P_{n+1}|P_k) = (P_{n+2}|P_k) - a_n(P_{n+1}|P_k) - (P_{n+1}|XP_k) = 0$ donc $b_0 = \cdots = b_{n-1} = 0$. Si $k = n$, $(P_{n+2} - (X + a_n)P_{n+1}|P_n) = b_n||P_n||^2 = -(XP_{n+1}|P_n) = -||P_{n+1}||^2$.

d. Par définition des polynômes d'interpolation de LAGRANGE : $P - \sum_{k=1}^{n} P(\alpha_{n,k})L_{n,k}$ s'annule en tous les $\alpha_{n,1}, \cdots, \alpha_{n,n}$ (qui sont distincts deux à deux) donc ce polynôme se factorise par P_n. Comme $\deg(P) \leqslant 2n-1$, il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car $\deg(P_n) = n$) tel que $P - \sum_{k=1}^{P} (\alpha_{n,k})L_{n,k} = P_n Q$. Comme $P_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$, $\int_I Pw = (1|P) = \Big(1| \sum_{k=1}^{P} (\alpha_{n,k})L_{n,k} + P_n Q\Big) = \sum_{k=1}^{n} P(\alpha_{n,k})(1|L_{n,k}) + (P_n|Q) = \sum_{k=1}^{n} P(\alpha_{n,k})\Delta_k$.

e. On dérive n fois un polynôme de degré $2n$ et de coefficient dominant $\dfrac{n!}{(2n)!}$, ainsi U_n est de degré $n = 2n-n$ et unitaire car $\dfrac{n!}{(2n)!} \times \big((2n).(2n-1).\cdots.(n+1)\big) = 1$.

f. On a $\int_{-1}^{1} \big((x^2-1)^n\big)^{(n)}\big((x^2-1)^m\big)^{(m)}dx = (-1)^k \int_{-1}^{1} \big((x^2-1)^n\big)^{(n-k)}\big((x^2-1)^m\big)^{(m+k)}dx$ si $m < n$ et $k \in [\![1; m+1]\!]$ par des IPP successives et par récurrence, or $\big((x^2-1)^m\big)^{(m+m+1)} = 0$ donc $(U_n|U_m) = 0$.

La famille $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est exactement la famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ce cas particulier.

g. On a déjà vu que $\varphi : \mathbb{R}_{2n-1}[X] \to \mathbb{R}^{2n}$ définie par $\varphi(P) = \big(P(\alpha_{n,1}), \cdots, P(\alpha_{n,n}), P'(\alpha_{n,1}), \cdots, P'(\alpha_{n,n})\big)$ est un isomorphisme d'où l'existence et l'unicité de $H = \varphi^{-1}\big(f(\alpha_{n,1}), \cdots, f(\alpha_{n,n}), f'(\alpha_{n,1}), \cdots, f'(\alpha_{n,n})\big)$.

h. Φ s'annule en $n+1$ valeurs, les $\alpha_{n,k}$ pour $k \in [\![1; n]\!]$ et x_0, on applique ROLLE sur chacun des n intervalles entre ces valeurs et cela fait n valeurs distinctes (et différentes des $\alpha_{n,k}$ pour $k \in [\![1; n]\!]$) en lesquelles Φ' s'annule. Mais Φ' s'annule aussi en les $\alpha_{n,k}$ pour $k \in [\![1; n]\!]$ par hypothèse. Cela fait donc $2n$ valeurs distinctes en lesquelles Φ' s'annule. On applique ROLLE sur les $2n-1$ intervalles et cela donne $2n-1$ valeurs distinctes en lesquelles Φ'' s'annule. On continue et on aura $2n-k+1$ valeurs distinctes en lesquelles $\Phi^{(k)}$ s'annule (pour $k \in [\![1; 2n-1]\!]$). Au final on aura une valeur $\eta \in]-1; 1[$ telle que $\Phi^{(2n)}(\eta) = 0$. Mais $\Phi^{(2n)}(x) = f^{(2n)}(x) - \dfrac{(2n)!}{n!}K$ donc $K = \dfrac{n!f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}$.

i. $f^{(2n)}$ est continue par hypothèse sur le segment $[-1; 1]$, elle y est donc bornée.

Si x est l'une des racines de P_n, l'inégalité de l'énoncé est vraie car elle devient $0 \leqslant 0$.

Sinon, avec **h.**, $x_0 = x$, comme $\Phi(x_0) = 0$: $|f(x) - h(x)| = KP_n(x)^2 = \dfrac{n!f^{(2n)}(\eta)P_n(x)^2}{(2n)!} \leqslant \dfrac{n!M_{2n}P_n^2(x)}{(2n)!}$.

j. $\left|\int_{-1}^{1}(f-H)\right| = \left|\int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} \Delta_{n,k}f(\alpha_{n,k})\right| \leqslant \int_{-1}^{1} |f(x) - H(x)|dx \leqslant \int_{-1}^{1} \dfrac{n!M_{2n}P_n^2(x)dx}{(2n)!}$ donc il vient $\left|\int_{-1}^{1}(f-H)\right| \leqslant \dfrac{n!M_{2n}||P_n||^2}{(2n)!}$ d'après les questions **i** et **d.** sachant que $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $H(\alpha_{n,k}) = f(\alpha_{n,k})$.

9.4 **a.** Le vecteur $v = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$ est solution. Si w l'est aussi, on a $v - w \in E^{\perp} = \{0_E\}$ donc $v = w$.

b. On définit $\varphi : E \to \mathbb{R}^p$ par $\forall v \in E$, $\varphi(v) = \big((v|v_1), \cdots, (v|v_p)\big)$. φ est une application linéaire et l'énoncé revient à chercher celles qui sont surjectives. En notant $F = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p)$ et $r = \dim(F)$ le rang de la famille $\mathcal{F}$, on a $\mathrm{Ker}(\varphi) = F^{\perp}$ donc rang $(\varphi) = n - (n - r) = r$ et la CNS cherchée est donc que $\mathcal{F}$ soit $\mathcal{F}$ libre.

c. $\big(\varphi$ bijective$\big) \iff \big(\varphi$ surjective et $\dim(E) = p\big) \iff \big(\mathcal{F}$ libre et $\dim(E) = p\big) \iff \big(\mathcal{F}$ base$\big)$.

9.5 Si on suppose que la famille est liée, il existe une famille de scalaires non tous nuls $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ telle que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(e_i + v_i) = 0_E$ et on peut poser $i_0 \in [\![1;p]\!]$ tel que $|\lambda_{i_0}| = \underset{1\leqslant i\leqslant p}{\mathrm{Max}} |\lambda_i| > 0$. Alors on écrit que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(e_i + v_i) = 0_E$ donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = -\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$ et on passe à la norme euclidienne :

$|\lambda_{i_0}| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2} = ||\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i|| = || - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i|| \leqslant \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i|\, ||v_i|| \leqslant |\lambda_{i_0}| \sum_{i=1}^{p} ||v_i|| < |\lambda_{i_0}|$ ce qui est absurde.

9.6 Ce n'est pas vraiment un exercice de ce chapitre, il suffit de considérer l'application $\varphi : S(0,1) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(e) = \sum_{k=1}^{p} d(x_k, H)^2$ où $H = \mathrm{Vect}(e)^\perp$ et e est un vecteur unitaire. Alors $d(x_k, H)^2 + (x_k|e)^2 = ||x_k||^2$ par projection orthogonale donc $\varphi(e) = \sum_{k=1}^{p} ||x_k||^2 - \sum_{k=1}^{p} (x_k|e)^2$ donc φ est une fonction continue sur le compact $S(0,1)$, elle est donc bornée et elle atteint ses bornes en un vecteur e_0 unitaire et $H_0 = \mathrm{Vect}(e_0)^\perp$ est l'hyperplan qu'on cherche.

9.3 Projections et distance à un sous-espace

9.7 On peut calculer A^2 et on trouve $A^2 = I_n - 4U\,{}^tU + 4U\,{}^tUU\,{}^tU$ or U est unitaire donc ${}^tUU = 1$ (identification classique entre la matrice à une base et le scalaire) donc $A^2 = I_n$: A est donc une matrice de symétrie et A est diagonalisable car $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est annulateur de A.

- Si $X \perp U$ ce qui se traduit par ${}^tUX = 0$, on a donc $AX = X$. Ainsi $H = \mathrm{Vect}(U)^\perp \subset E_1(A)$.

De plus $AU = U - 2U\,{}^tUU$ donc $AU = -U$. Par conséquent $\mathrm{Vect}(U) \subset E_{-1}(A)$.

Comme ces sous-espaces propres sont en somme directe, on a $\mathrm{Vect}(U)^\perp = E_1(A)$ et $\mathrm{Vect}(U) = E_{-1}(A)$ et A est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(U)^\perp$.

- Ou alors $AX = X \iff X = X - 2U\,{}^tUX \iff 2U({}^tUX) = 0 \iff 2(X|U)U = 0 \iff (X|U) = 0$ car $U \neq 0$ et on a directement $H = \mathrm{Vect}(U)^\perp = E_1(A)$. De plus $AX = -X \iff X = -X + 2U\,{}^tUX \iff X = (X|U)U$ donc $E_{-1}(A) \subset \mathrm{Vect}(U)$ et on vérifie comme avant que $AU = -U$ pour avoir l'égalité.

De même, B est la matrice de la projection orthogonale sur H.

Le plan P est d'équation $z = x + y$ donc admet pour vecteur normal le vecteur unitaire $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$.

D'après ce qui précède, la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la symétrie orthogonale par rapport au plan P est $A = I_3 - \frac{2}{3}U\,{}^tU$ avec ${}^tU = (1\ 1\ -1)$. Après calculs : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9.8 $(\Longrightarrow)$ Supposons $p \circ q = q \circ p$. Soit $x \in (\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q)^\perp \cap \mathrm{Im}\, p$ et $y \in (\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q)^\perp \cap \mathrm{Im}\, q$. Alors $p \circ q(x) = q(x) \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$, donc $(q(x) \mid y) = (x \mid y) = 0$.

$(\Longleftarrow)$ Si les sous-espaces $A = (\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q)^\perp \cap \mathrm{Im}\, p$ et $B = (\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q)^\perp \cap \mathrm{Im}\, q$ sont orthogonaux, alors $\mathrm{Im}\, p = (\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q) \oplus A$ (somme directe orthogonale), $\mathrm{Im}\, q = (\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q) \oplus B$ (somme directe orthogonale), et $E = (\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q) \oplus A \oplus B \oplus (\mathrm{Im}\, p^\perp \cap \mathrm{Im}\, q^\perp)$. Par décomposition, on obtient $p \circ q = q \circ p$ et $p \circ q$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.

9.9 **a.** Il suffit de vérifier que $\forall j \in [\![1;p]\!],\ AX_j = \sum_{k=1}^{p} X_k{}^tX_kX_j = X_j{}^tX_jX_j = X_j$ car $(X_1, \cdots, X_p)$ est une famille orthonormale et que si $X \in \mathrm{Vect}(X_1, \cdots, X_p))^\perp$, on a $AX = 0$. On pouvait aussi écrire que l'on avait $\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} (x_k|x)x_k$ et passer aux matrices en constatant que $({}^tX_kX)X_k = X_k({}^tX_kX) = X_k{}^tX_kX$.

b. On prend la base (x_1, x_2) de P où $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(1, 0, 0, 1\Big)$ et $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(0, 1, -1, 0\Big)$. $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9.10 Si $p \circ q = 0$, on a $\mathrm{Im}\,(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$ donc $\mathrm{Ker}(p)^\perp \subset \mathrm{Im}\,(q)^\perp \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}(q) \Longleftrightarrow q \circ p = 0$.

Il suffit de prendre $p(x, y) = (x, 0)$ et $q(x, y) = (0, y - x)$ pour avoir deux projecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient $p \circ q = 0$ mais pas $q \circ p = 0$.

9.11 **a.** Il suffit d'écrire $x = x - p(x) + p(x)$ et se servir du fait que $x - p(x) \perp p(x)$.

b. Avec ces hypothèses, on a $\sum_{i=1}^{n} ||p(e_i)||^2 = \sum_{i=1}^{n} (p(e_i)|e_i) = \mathrm{Tr}\ (p)$ car la matrice de p dans la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est $\big((p(e_j)|e_i)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ puisqu'elle est orthonormale. Il suffit de se rappeler que, pour un projecteur, on a $\mathrm{Tr}\ (p) = \mathrm{rang}\,(p)$ en prenant une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et en exprimant la matrice de p dans cette base.

9.12 **a.** L'application $(\,.\,|\,.\,) : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\forall (P, Q) \in E^2,\ (P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est bien définie car la fonction $f : t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour $(P, Q) \in E^2$ et que, par croissances comparées, on a $f(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$. Cette application est clairement bilinéaire (par linéarité de l'intégrale), symétrique (par symétrie du produit dans $\mathbb{R}$) et positive (par positivité de l'intégrale) car $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ pour $P \in E$. De plus, si $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$, la fonction $g : t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, ainsi $\int_0^{+\infty} g(t)dt = 0$ implique $g = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ ce qui prouve que tous les réels positifs t sont racines de P car $e^{-t} > 0$. Alors, $P = 0$. Par conséquent, $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.

Enfin, F est bien une partie de E et $P \in F \Longleftrightarrow P(0) = 0$. On vérifie facilement que F est un sous-espace vectoriel de E car $F \neq \emptyset$ puisque $0 \in F$ et que si deux polynômes s'annulent en 0, toute combinaison linéaire de ces deux polynômes s'annule aussi en 0.

Dans ce contexte, $\underset{P \in F}{\mathrm{Inf}} \sqrt{\int_0^{+\infty} (1 - P(t))^2 e^{-t}dt} = \underset{P \in E}{\mathrm{Inf}}\ ||1 - P||$ s'interprète comme la distance du vecteur $1 \in E$ au sous-espace F de E. On en déduit que m existe et que $m = d(1, F)^2$. On sait d'après le cours qu'il existe un unique vecteur Q de F tel que $||1 - Q|| = d(1, F)$ et que ce vecteur est $Q = p_F(1)$.

b. On sait d'après l'étude de la fonction Gamma que $\forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = \Gamma(k + 1) = k!$. Ainsi, pour $q \in [\![1;n]\!]$, il vient $R(q) = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{j=1}^{k} (q + j) = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k \dfrac{(q + k)!}{q}$. On en déduit donc avec ce qui précède :
$q!R(q) = q! - \sum_{k=1}^{n} a_k(q + k)! = \int_0^{+\infty} t^q e^{-t}dt - \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{+\infty} t^{q+k}e^{-t}dt = (X^q|1) - \sum_{k=1}^{n} a_k(X^q|X^k) = (X^q|1 - Q)$.
Mais puisque Q est le projeté de 1 sur F, on a par définition $1 - Q \in F^\perp$. Or $F = \mathrm{Vect}(X^1, \cdots, X^n)$ donc $X^q \perp 1 - Q$ pour tout $q \in [\![1;n]\!]$; ce qui prouve que $\forall q \in [\![1;n]\!],\ R(q) = 0$.
c. On sait que $m = ||1 - Q||^2 = (1 - Q|1 - Q) = (1|1 - Q) - (Q|1 - Q) = (1|1 - Q)$ car $Q \perp 1 - Q$ puisque $Q \in F$ et $1 - Q \in F^\perp$. Par conséquent, $m = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k(1|X^k) = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k k! = R(0)$.

Or $R(-1) = 1$ car $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \prod_{j=1}^{k} (-1 + j) = 0$. Ainsi, puisque $R \in E$ et que R admet au moins pour racines les n réels $1, \cdots, n$ d'après la question précédente, on a $R = \lambda \prod_{q=1}^{n} (X-q)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ mais la valeur $R(-1) = 1$ impose $\lambda = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$ d'où $R = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n} (X-k)$. Alors $m = R(0) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n} (-k) = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

9.4 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

9.13 ($\Leftarrow$) est clair car $A^{\perp}$ est un supplémentaire de A dans un espace euclidien.

($\Rightarrow$) Si A et B sont supplémentaires, soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ une base de E adaptée à cette décomposition. Soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ où $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et $(y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont les coordonnées de x et y dans E. Il est classique que φ est un produit scalaire sur E.
On sait que $\dim(B) = n - \dim(A)$ car A et B sont supplémentaires dans E de dimension n par hypothèse.
On sait que $\dim(A^{\perp}) = n - \dim(A)$ car A et $A^{\perp}$ sont supplémentaires dans E de dimension n.
Il suffit donc de montrer une des deux inclusions $B \subset A^{\perp}$ ou $B \supset A^{\perp}$ pour conclure à l'égalité $B = A^{\perp}$ avec l'égalité des dimensions $\dim(A^{\perp}) = \dim(B)$.

($\subset$) Soit $b \in B$ et $a \in A$, alors a s'écrit $a = \sum_{k=1}^{p} a_k e_k$ car $A = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ et b s'écrit $b = \sum_{k=p+1}^{n} b_k e_k$ car $B = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ par construction de $\mathcal{B}$. Ainsi : $\varphi(a,b) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ p+1 \leqslant j \leqslant n}} a_i b_i \varphi(e_i, e_j)$ par bilinéarité de φ mais $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$ par définition de φ donc $\varphi(a,b) = 0$ et on vient de prouver que $B \subset A^{\perp}$.
On aurait aussi pu dire que si $(a,b) \in A \times B$, on écrit $a = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ avec $a_{p+1} = \cdots = a_n = 0$ et $b = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k$ avec $b_1 = \cdots = b_p = 0$ donc $\varphi(a,b) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$ car $b_k = 0$ si $k \leqslant p$ et $a_k = 0$ si $k > p$. Alors $\varphi(a,b) = 0$ donc $b \in A^{\perp}$ ce qui prouve aussi l'inclusion.
($\supset$) Soit $a \in A^{\perp}$ qu'on écrit $a = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$. Pour $k \in [\![1;p]\!]$, comme $e_k \in A$, on a $\varphi(a, e_k) = 0$ donc $a_k = 0$ par définition de φ. On obtient donc $a \in B$ et $B \supset A^{\perp}$.

9.14 **a.** Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0_E$, alors en prenant le produit scalaire avec y_1, puis avec y_2, on obtient le système (S) : $\begin{cases} \lambda_1 ||y_1||^2 + \lambda_2 (y_1|y_2) & = 0 \\ \lambda_1 (y_1|y_2) + \lambda_2 ||y_2||^2 & = 0 \end{cases}$. Or la matrice de ce système est $\begin{pmatrix} ||x_1||^2 & (x_1|x_2) \\ (x_1|x_2) & ||x_2||^2 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $\Delta = ||x_1||^2 ||x_2||^2 - (x_1|x_2)^2$. Mais d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz -et surtout le cas d'égalité-, comme x_1 et x_2 ne sont pas colinéaires, on a $(x_1|x_2)^2 < ||x_1||^2 ||x_2||^2$ donc $\Delta > 0$ et le système (S) est de Cramer, son unique solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ce qui prouve que (y_1, y_2) est libre.

b. X est libre et $\dim(E) = \mathrm{card}\,(X)$ donc X est une base de E et l'endomorphisme φ vérifiant ces conditions est donc unique d'après un théorème du cours, c'est même un automorphisme car Y est aussi une base de E.
Soit $x \in E$ qu'on écrit $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, par linéarité, on a $||\varphi(x)||^2 = ||\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi(x_k)||^2 = ||\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k||^2$. Ainsi, $||\varphi(x)||^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j (y_i|y_j) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j (x_i|x_j) = ||\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k||^2 = ||x||^2$. Au final, $\forall x \in E,\ ||\varphi(x)|| = ||x||$ et φ est appelé une isométrie vectorielle (ou un automorphisme orthogonal) de E.

c. Soit $r \in [\![0; n-1]\!]$ le rang de la famille X. On peut, sans perte de généralité, supposer que les vecteurs $(x_1, \cdots, x_r)$ forment une famille libre et que $\forall k \in [\![r+1; n]\!],\ x_k \in \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_r)$. Montrons que $\mathrm{rang}\,(Y) = r$.

Soit $(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)\in\mathbb{R}^r$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{r}\lambda_k y_k = 0_E$, alors $||\sum\limits_{k=1}^{r}\lambda_k y_k||^2 = \Big(\sum\limits_{i=1}^{r}\lambda_i y_i|\sum\limits_{j=1}^{r}\lambda_j y_j\Big) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant r}\lambda_i\lambda_j(y_i|y_j)$ donc, par hypothèse, $||\sum\limits_{k=1}^{r}\lambda_k y_k||^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant r}\lambda_i\lambda_j(x_i|x_j) = ||\sum\limits_{k=1}^{r}\lambda_k x_k||^2 = 0$ d'où $\sum\limits_{k=1}^{r}\lambda_k x_k = 0_E$ et la liberté de la famille $(x_1,\cdots,x_r)$ montre que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. Par conséquent, la famille $(y_1,\cdots,y_r)$ est libre. Pour $k\in[\![r+1;n]\!]$, on peut écrire $x_k = \sum\limits_{m=1}^{r}\mu_m x_m$ ce qui s'écrit aussi $||x_k - \sum\limits_{m=1}^{r}\mu_m x_m||^2 = 0$ et on montre comme précédemment que ceci se transforme en $||y_k - \sum\limits_{m=1}^{r}\mu_m y_m||^2 = 0$, c'est-à-dire en $y_k = \sum\limits_{m=1}^{r}\mu_m y_m$.

On déduit de tout ceci que le rang des familles X et Y sont égaux.

Posons $F = \text{Vect}(x_1,\cdots,x_r)^\perp$ et $G = \text{Vect}(y_1,\cdots,y_r)^\perp$ et prenons deux bases orthonormales $(f_{r+1},\cdots,f_n)$ de F et $(g_{r+1},\cdots,g_n)$ de G pour avoir deux bases $X' = (x_1,\cdots,x_r,f_{r+1},\cdots,f_n)$ notée $X' = (x'_1,\cdots,x'_n)$ et $Y' = (y_1,\cdots,y_r,g_{r+1},\cdots,g_n)$ notée $Y' = (y'_1,\cdots,y'_n)$ de E. On a $\forall (i,j)\in[\![1;n]\!]^2$, $(x'_i|x'_j) = (y'_i|y'_j)$ par construction. En effet, c'est l'hypothèse de l'énoncé si $(i,j)\in[\![1;r]\!]^2$, si $i\in[\![1;r]\!]$ et $j\in[\![r+1;n]\!]$, on a $(x'_i|x'_j) = (y'_i|y'_j) = 0$ et, si $(i,j)\in[\![r+1;n]\!]^2$ $(x'_i|x'_j) = (y'_i|y'_j) = \delta_{i,j}$. Comme avant, on peut construire une isométrie φ en envoyant les vecteurs x'_k sur les vecteurs y'_k. Si φ est directe, c'est parfait, sinon, il suffit de remplacer y'_n par $-y'_n$ et la nouvelle φ sera une isométrie directe de E.

9.15 **a.** Soit $(x,y)\in E^2$, on associe à x (resp. y, $f(x)$ et $f(y)$) le vecteur colonne X (resp. Y, U, V) de ses coordonnées dans la base canonique. On sait qu'alors $U = AX$ et $V = AY$, de sorte que, puisque A est antisymétrique $(f(x)|y) = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = {}^tX(-A)Y = -{}^tX(AY) = -(f(y)|x)$.

Ainsi, f est un endomorphisme antisymétrique.

b. Naturellement, $\det(f) = \det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n\det(A) = (-1)^n\det(f)$.

Si n est impair, on en déduit que $\det(f) = 0$ donc f n'est pas un automorphisme de E.

c. Soit $(x,y)\in \text{Ker}(f)\cap \text{Im}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$ et $\exists z\in E,\ y = f(z)$ et on montre que $x\perp y$ car $(x|y) = (x|f(z)) = -(f(x)|z) = -(0_E|z) = 0$. On a montré $\text{Ker}(f)\subset(\text{Im}(f))^\perp$ or, par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) = \dim((\text{Im}(f))^\perp)$ donc $\text{Ker}(f)\subset(\text{Im}(f))^\perp$. Ainsi $E = \text{Ker}(f)\overset{\perp}{\oplus}\text{Im}(f)$.

d. Soit g l'endomorphisme induit dans $\text{Im}(f)$ (qui est stable par f) par f. g est encore antisymétrique car il est clair que $\forall (x,y)\in(\text{Im}(f))^2$, $(f(x)|y) = -(f(y)|x)$. Comme on a classiquement $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)\cap\text{Ker}(f)$, il vient $\text{Ker}(g) = \{0_E\}$ donc g est un endomorphisme antisymétrique injectif donc un automorphisme antisymétrique. On en déduit avec la question **b.** que $\dim(\text{Im}(f))$ est paire.

e. On sait d'après la question **d.** que $\text{Im}(f)$ est de dimension 0 ou 2.

• Si $f = 0$, alors on prend n'importe quelle base et $a = 0$ et le tour est joué et toute base est base de vecteurs propres de f !

• Si $f\neq 0$, alors $\text{Im}(f)$ est un plan donc $\text{Ker}(f)$ une droite. Comme $E = \text{Ker}(f)\overset{\perp}{\oplus}\text{Im}(f)$ d'après la question **c.**, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$ de E telle que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(v_1)$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}(v_2,v_3)$. En notant P la matrice de passage entre la base canonique et cette nouvelle base $\mathcal{B}$, on a ${}^tP = P^{-1}$ puisque P est une matrice de passage entre deux bases orthonormales. Or, en notant $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a $A = PMP^{-1} = PM{}^tP$ d'où $M = {}^tPAP$ et ${}^tM = {}^tP{}^tAP = -M$ donc M est antisymétrique ce qui garantit l'existence d'un réel $a\neq 0$ tel que $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a\\ 0 & a & 0\end{pmatrix}$. e_1 est un vecteur propre de f car $f(e_1) = 0 = 0.e_1$. Mais si on cherche $\lambda\neq 0$ tel qu'il existe un vecteur non nul $v = xv_1 + yv_2 + yv_3$ tel que $f(v) = lv$, on aura le système $MV = \lambda V$ avec ${}^tV = (xyz)$ donc $x = 0$ (première ligne), $-az = \lambda y$ et $ay = \lambda z$ ce qui donne $(\lambda^2 + a^2)y = 0$. Si $y = 0$, alors $z = 0$ ce qui est absurde. Si $y\neq 0$, $\lambda^2 + a^2 = 0$ ce qui l'est tout autant. Il n'existe donc pas de base $\mathcal{B}'$ de E formée de vecteurs propres de f.

9.16 **a.** On pose $E = \mathbb{R}[X]$ qui est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour $(P, Q) \in E^2$, l'application $f = t \mapsto e^{-t}P(t)Q(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissance comparée, $f(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc Φ est bien définie.

- Φ est symétrique par symétrie du produit des réels.
- Φ est linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale (tout converge) donc bilinéaire par symétrie.
- Φ est définie positive car si $P \in E$, on a $\Phi(P, P) = \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)^2 dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale et $\Phi(P, P) = 0 \Longrightarrow (\forall t \in \mathbb{R}_+,\ P^2(t) = 0) \Longrightarrow P = 0$ car $g : t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ donc $\int_0^{+\infty} g(t)dt = 0 \Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+,\ g(t) = 0$ et P ayant une infinité de racines (tout $\mathbb{R}_+$), P est nul.

En conclusion, Φ est bien un produit scalaire sur E.

b. Soit $F = \mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1, X)$, $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - at - b)^2 dt = \underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} ||X^2 - (a.X + b.1)||^2 = d(X^2, F)^2$.
On sait que $d(X^2, F) = ||X^2 - p_F(X^2)||$ où p_F est la projection orthogonale sur F. On a $p_F(X^2) = \alpha X + \beta \in \mathbb{R}_1[X]$ avec le système $(X^2 - p_F(X^2)|1) = (X^2 - p_F(X^2)|X) = 0$ par hypothèse donc $\begin{cases} \Gamma(3) - \Gamma(2)\alpha - \Gamma(1)\beta &= 0 \\ \Gamma(4) - \Gamma(3)\alpha - \Gamma(2)\beta &= 0 \end{cases}$
donc, comme $\forall n \geqslant 1,\ \Gamma(n) = (n-1)!$, on trouve $\alpha = 4$ et $\beta = -2$.

Ainsi $p_F(X^2) = 4X - 2$ et $d(X^2, F) = ||X^2 - 4X + 2||$ qu'on calcule encore avec la fonction Γ, ce qui donne $\underset{(a,b)}{\mathrm{Inf}} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - at - b)^2 dt = d(X^2, F)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - 4t + 2)^2 dt = \Gamma(5) - 8\Gamma(4) + 20\Gamma(3) - 16\Gamma(2) + 4\Gamma(1) = 4$.

9.17 **a.** $E \subset \mathbb{R}_n[X]$ et $0 \in E$. Comme E est clairement stable par combinaison linéaire : E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P) = P(1)$ est une forme linéaire non nulle (car $\varphi(X) \neq 0$) et que $E = \mathrm{Ker}(\varphi)$, E est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim(E) = n$.

b. Les U_k sont bien des éléments de E (car $k \geqslant 1$) et ils forment une famille libre (degrés échelonnés), comme $\mathcal{B} = (U_1, \cdots, U_n)$ est de cardinal n, c'est une base de E qui est de dimension n.

c. On se rappelle la formule de TAYLOR : si $P \in E$, $P(1) = 0$ donc $P = \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1)U_k$.

Il suffit de prendre $(.|.) : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(P|Q) = \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$. $(.|.)$ est clairement bilinéaire, symétrique et positive. Si $(P|P) = 0$, alors $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P^{(k)}(1) = 0$ donc $P = 0$ d'après la relation précédente. Ainsi $(.|.)$ est un produit scalaire sur E. On constate que U_k a une seule racine, 1, et qu'elle est de multiplicité k. On a $\forall m \in [\![1;n]\!],\ U_k^{(m)}(1) = \delta_{k,m}$. De plus, soit $(i, j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $(U_i|U_j) = \sum_{k=1}^{n} U_i^{(k)}(1)U_j^{(k)}(1) = 0$ d'après ce qui précède. Et enfin, pour $k \in [\![1;n]\!]$, $(U_k|U_k) = 1$.

En conclusion $\mathcal{B}$ est une base orthonormale pour le produit scalaire $(.|.)$.

d. φ va bien de E dans E car $\deg((X-1)P') \leqslant n$ si $\deg(P) \leqslant n$ et $(X-1)P'$ s'annule en 1. De plus, φ est clairement linéaire donc φ est un endomorphisme de E. On a facilement $\varphi(U_k) = kU_k$. La base $(U_1, \cdots, U_n)$ de E est donc une base de vecteurs propres de φ (vecteurs dont les images par φ sont colinéaires à ces vecteurs). Ainsi φ est diagonalisable. Ses valeurs propres sont les coefficients de proportionnalité : $1, 2, \cdots, n$.

e. φ envoie la base $(U_1, \cdots, U_n)$ sur la base $(U_1, 2U_2, \cdots, nU_n)$ donc φ est un automorphisme de E.

Si $P = \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1)U_k$, alors $\varphi^{-1}(P) = \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1)\varphi^{-1}(U_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k}U_k$.

9.18 **a.** Dans ces conditions, la famille $(v_1, \cdots, v_n)$ est orthonormale donc, par la relation de PYTHAGORE, on obtient $\Big|\Big| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \Big|\Big|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = n$ et on passe à la racine pour avoir $\Big|\Big| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \Big|\Big| = \sqrt{n}$.

b. En utilisant la bilinéarité du produit scalaire : $U = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} X_i X_j (v_i|v_j)$.

Par linéarité de l'espérance : $E(U) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (v_i|v_j) E(X_i X_j)$. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on a $E(X_k) = 0$ et $E(X_k^2) = 1$.

Par indépendance de X_i et X_j, si $i \neq j$, on a aussi $E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j) = 0$. Ainsi $E(U) = \sum\limits_{k=1}^{n} ||v_k||^2 = n$.

c. Par l'absurde, supposons qu'on ait $\forall (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, $\Big|\Big| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \Big|\Big| > \sqrt{n}$. Notons $X = (X_1, \cdots, X_n)$ la variable aléatoire qui va de Ω dans $\{-1,1\}^n$ et $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = \Big|\Big| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \Big|\Big|^2$. Comme $U = f(X_1, \cdots, X_n) = f(X)$, on a $E(U) = E(f(X)) = \sum\limits_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} P(X = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)) f(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ par le théorème de transfert. $P(X = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)) = P(X_1 = \varepsilon_1, \cdots, X_n = \varepsilon_n) = \prod\limits_{k=1}^{n} P(X_k = \varepsilon_k) = \frac{1}{2^n}$ par indépendance mutuelle des $X_1, \cdots, X_n$ et il vient $E(U) = \frac{1}{2^n} \sum\limits_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \Big|\Big| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \Big|\Big|^2$. L'hypothèse ci-dessus prouve que $E(U) > \frac{1}{2^n} \sum\limits_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} n = \frac{n}{2^n} \mathrm{card}\Big(\{-1,1\}^n\Big) = n$ ce qui contredit le calcul de la question **b.**. Ainsi, il existe une famille $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ telle que $\Big|\Big| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \Big|\Big| \leqslant \sqrt{n}$.

d. On a montré $(\Longrightarrow)$ à la question **a.**. Supposons que $\forall (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, $\Big|\Big| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \Big|\Big| = \sqrt{n}$.

Alors U est constante sur Ω et on a $U = n$. Ainsi $V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = E(U - E(U))^2) = 0$. Or $E(U^2) = E\Big(\Big|\Big| \sum\limits_{k=1}^{n} X_k v_k \Big|\Big|^4\Big) = E\Big(\Big(\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} X_i X_j (v_i|v_j)\Big)^2\Big)$. En développant par linéarité de l'espérance, par indépendance mutuelle des X_i et puisque $E(X_i) = 0$, $X_i^2 = 1$ et $E(X_i^2) = 1$, on a la calcul suivant :

$$E(U^2) = E\Big(\Big(n + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} X_i X_j (v_i|v_j)\Big)^2\Big) = n^2 + 2n \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} (v_i|v_j) E(X_i) E(X_j) + E\Big(\Big(\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} X_i X_j (v_i|v_j)\Big)^2\Big).$$

La somme centrale est nulle et il ne reste de la dernière que $E(U^2) = n^2 + \sum\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} (v_i|v_j)^2$. Par conséquent $V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} (v_i|v_j)^2 = 0$ donc tous les produits scalaires $(v_i|v_j)$ sont nuls et $(v_1, \cdots, v_n)$ est une famille orthonormale.

e. On suppose que $(v_1, \cdots, v_n)$ n'est pas une famille orthonormale. Par l'absurde, supposons que pour tout $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, on a $\Big|\Big| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \Big|\Big| \leqslant \sqrt{n}$. Alors, avec la formule de la question **c.** mais appliquée à U^2, on a $E(U^2) = \frac{1}{2^n} \sum\limits_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \Big|\Big| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \Big|\Big|^4 \leqslant \frac{1}{2^n} \sum\limits_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} n^2 = n^2$. On en déduit que $V(U) = E(U^2) - E(U)^2 \leqslant n^2 - n^2 = 0$ donc $V(U) = 0$ car c'est une quantité positive. Mais d'après la question **d.**, il vient $V(U) = \sum\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} (v_i|v_j)^2 = 0$ ce qui est impossible car la famille $(v_1, \cdots, v_n)$ n'étant pas une famille orthonormale alors que les vecteurs v_k sont unitaires, on a $\mathrm{sli}_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} (v_i|v_j)^2 > 0$. Par conséquent, il existe bien $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ telle que $\Big|\Big| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \Big|\Big| > \sqrt{n}$.

9.19 **a.** Espace euclidien : un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Projecteur : endomorphisme tel que $p^2 = p$, la projection sur $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
Base orthonormée : une base $(v_1, \cdots, v_n)$ de E telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (v_i|v_j) = \delta_{i,j}$.

b. ($\Longrightarrow$) si p est orthogonal, soit $x_k = y_k + z_k$ avec $y_k \in \mathrm{Im}(p)$ et $z_k \in \mathrm{Ker}(p)$ pour $k \in \{1,2\}$. Alors $p(x_1) = y_1$ et $p(x_2) = y_2$ par construction, ainsi, comme $y_1 \perp z_2$ et $y_2 \perp z_1$, p est bien symétrique car $(p(x_1)|x_2) = (y_1|y_2 + z_2) = (y_1|y_2) + (y_1|z_2) = (y_1|y_2) = (y_1|y_2) + (z_1|y_2) = (y_1 + z_1|y_2) = (x_1|p(x_2))$.
($\Longleftarrow$) Si p est symétrique, soit $y \in \mathrm{Im}(p)$ et $z \in \mathrm{Ker}(p)$, alors $(y|z) = (p(y)|z) = (y|p(z)) = (y|0_E) = 0$ (car $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$) donc $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$ ce qui justifie que p est un projecteur orthogonal.
Par double implication, si p est un projecteur : p est orthogonal si et seulement si p est symétrique.

c. Si p est orthogonal, pour $k \in [\![1;n]\!]$, $||p(e_k)||^2 = (p(e_k)|p(e_k)) = (e_k|p^2(e_k)) = (e_k|p(e_k))$ car p est symétrique. Or, $(e_k|p(e_k))$ est le coefficient en case (k,k) de la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormale. On en déduit que $\sum\limits_{k=1}^{n} ||p(e_k)||^2 = \mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(p)$. Mais on sait aussi, en notant r le rang de p, qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ (adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(p)$) telle que $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (par blocs). Comme A et D sont semblables : $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(D) = r = \mathrm{rang}\,(p)$.
Finalement : $\sum\limits_{k=1}^{n} ||p(e_k)||^2 = \mathrm{Tr}\,(p) = \mathrm{rang}\,(p)$.

d. Soit $(x,y) \in E^2$, si on note X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans la base orthonormale $\mathcal{B}$, la relation $(p(x)|y) = (x|p^*(y))$ se résume à l'équation ${}^t(AX)Y = {}^tX({}^tAY)$ qui est évidente.

e. Bien sûr, on a l'inclusion $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(p^* \circ p)$ car si $p(x) = 0_E$, alors $p^* \circ p(x) = p^*(p(x)) = p^*(0_E) = 0_E$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(p^* \circ p)$, alors $p^* \circ p(x) = 0_E$ donc $0 = (x|p^* \circ p(x)) = ||p(x)||^2$ d'après la question précédente donc $||p(x)|| = 0$ qui traduit $x \in \mathrm{Ker}(p)$. Par double inclusion : $\mathrm{Ker}(p^* \circ p) = \mathrm{Ker}(p)$.

9.20 Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application $\varphi(u)$ est bien une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ par linéarité de la trace. Ainsi φ est bien définie. De plus φ est linéaire à nouveau par linéarité de la trace. Comme $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim((\mathcal{L}(E))^*)$, il suffit de prouver que φ est injective pour établir que φ est un isomorphisme. Or si $u \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $\forall v \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{Tr}\,(u \circ v) = 0$. En notant A la matrice de u dans une base quelconque, ceci se traduit par $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}\,(AB) = 0$. Or en prenant $B = {}^t\overline{A}$, on trouve $\mathrm{Tr}\,(A{}^t\overline{A}) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^2 = 0$ ce qui impose que la matrice A est nulle, ainsi que u. On a bien démontré que φ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

9.21 **a.** Considérons l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(x) = \big((e_1|x), \cdots, (e_n|x)\big)$. Alors φ est clairement linéaire et $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^n)$. De plus, si $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $\forall k \in [\![1;n]\!],\ (e_k|x) = 0$ donc $x \in E^{\perp} = \{0_E\}$ donc $x = 0_E$. Ainsi φ est injective donc c'est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$ d'après le cours.
Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $j \in [\![1;n]\!]$, la colonne C_j de M vérifie $C_j^T = (m_{1,j}\ \cdots\ m_{n,j})$ et, comme φ est bijective, il existe un unique vecteur $f_j \in E$ tel que $\varphi(f_j) = (m_{1,j}, \cdots, m_{n,j}) = \big((e_1|f_j), \cdots, (e_n|f_j)\big)$. Il existe bien une unique famille $(f_1, \cdots, f_n) \in E^n$ telle que $M = \big((e_i|f_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

b. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. Supposons que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique famille $(f_1, \cdots, f_n) \in E^n$ telle que $M = \big((e_i|f_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

<u>Méthode 1</u> : Si $(e_1, \cdots, e_n)$ était liée, il existerait $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$. Alors pour toute famille $(f_1, \cdots, f_n) \in E^n$, en notant L_i les lignes de $M = \big((e_i|f_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on aurait $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$ par bilinéarité du produit scalaire et la matrice M serait donc non inversible. Il suffit donc de prendre M

inversible dans la condition imposée pour arriver à une contradiction. Par l'absurde, $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre donc, comme elle est de cardinal n, $(e_1, \cdots, e_n)$ est bien une base de E.

Méthode 2 : En prenant $M = I_n$, il existe une famille $(f_1, \cdots, f_n) \in E^n$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (e_i|f_j) = \delta_{i,j}$. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$ et $j \in [\![1;n]\!]$, on a $\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \Big| f_j\Big) = (0_E|f_j) = 0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i|f_j) = \lambda_j$. Ainsi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ (de cardinal n) est libre : c'est donc une base de E.

Quelle que soit la méthode, la réciproque est donc vraie.

9.22 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ qu'on munit du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)dt$. La fonction $t \mapsto e^{-t}P(t)Q(t)$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissance comparée, on a $e^{-t}P(t)Q(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ donc l'intégrale $(P|Q)$ converge. La symétrie, la bilinéarité et la positivité se montrent classiquement. Si $P \in E$ vérifie $(P|P) = 0$, alors $(P|P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)^2 dt = 0 \Longrightarrow \forall t \geqslant 0,\ P(t) = 0$ car $t \mapsto e^{-t}P(t)^2$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. P admet donc une infinité de racines, on en déduit que $P = 0$ donc que $(.|.)$ est bien un produit scalaire sur E.

Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, en notant $P = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k X^k$, on a $f(x_1, \cdots, x_n) = ||P+1||^2 = ||P-(-1)||^2 = d(P,-1)^2$. En notant $H = X\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'hyperplan de E constitué des polynômes de valuation supérieure ou égale à 1, d'après le cours f est minimale en $P = p_H(-1)$ où p_H est la projection orthogonale sur H de sorte que $\underset{\mathbb{R}^n}{\mathrm{Min}}(f) = d(-1,H)^2 = ||p_H(-1)+1||^2 = ||p_H(1)-1||^2 = d(1,H)^2$.

Si $n = 2$ et si l'on note $p_H(1) = aX + bX^2 \in H = \mathrm{Vect}(X, X^2)$, alors $(p_H(1)-1|X) = (p_H(1)-1|X^2) = 0$ car (X, X^2) est une base de H ce qui revient au système $\begin{cases} a\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt + b\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt &= \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt \\ a\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt + b\int_0^{+\infty} t^4e^{-t}dt &= \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt \end{cases}$

On calcule ces intégrales : $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 1,\ \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt = 2,\ \int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt = 6,\ \int_0^{+\infty} t^4e^{-t}dt = 24$.

Ainsi, le système se ramène à $\begin{cases} 2a + 6b &= 1 \\ 6a + 24b &= 2 \end{cases}$ qui a une unique solution $a = 1$ et $b = -\dfrac{1}{6}$.

Ainsi $d(1,H)^2 = \Big|\Big|X - \dfrac{X^2}{6} - 1\Big|\Big|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\dfrac{t^2}{6} - t + 1\Big)^2 e^{-t}dt = \dfrac{1}{3}$.

9.23 **a.** Si $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, la fonction $t \mapsto e^{-t}P(t)Q(t)$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissances comparées, on a $e^{-t}P(t)Q(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ donc l'intégrale $(P|Q)$ converge. La symétrie, la bilinéarité et la positivité se montrent classiquement. Si $P \in E$ vérifie $(P|P) = 0$, alors $(P|P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)^2dt = 0 \Longrightarrow \forall t \geqslant 0,\ P(t) = 0$ car $t \mapsto e^{-t}P(t)^2$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. P admet donc une infinité de racines, on en déduit que $P = 0$ donc que $(.|.)$ est bien un produit scalaire sur E.

b. Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, en notant $P = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k X^k$, on a $f(x_1, \cdots, x_n) = ||1-P||^2 = d(1,P)^2$. En notant $H = X\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'hyperplan de E constitué des polynômes de valuation supérieure ou égale à 1, d'après le cours f est minimale en $P = p_H(1)$ où p_H est la projection orthogonale sur H : $\underset{\mathbb{R}^n}{\mathrm{Min}}(f) = d(1,H)^2 = ||p_H(1)-1||^2$.

c. Soit $k \in [\![1;n]\!]$, $(X^k|1-P) = 0$ car $P = p_H(1)$ et $H = \mathrm{Vect}(X, \cdots, X^n)$. Par récurrence ou parce qu'on connaît bien la fonction Γ d'Euler, on a $\forall j \in [\![1;n]\!],\ \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{j+k}e^{-t}dt = \Gamma(j+k+1) = (j+k)!$. Ainsi, en développant $(X^k|1) - (X^k|P) = 0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt - \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j t^{j+k}e^{-t}dt$, on obtient $k! - \sum\limits_{j=1}^{n} a_j (j+k)! = 0$.

On divise par $k!$ et on a $1 - \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \dfrac{(j+k)!}{k!} = 0 = 1 - \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \prod\limits_{i=1}^{j} (k+i) = Q(k) = 0$.

d. On sait que $\rho_n = ||1-P||^2 = (1-P|1-P) = (1|1-P) - (P|1-P) = (1|1-P)$ car $P \perp 1-P$ puisque $P \in F$ et $1-P \in F^{\perp}$. Par conséquent, $\rho_n = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(1|X^k) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k k! = Q(0)$.

Or $Q(-1) = 1$ car $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\prod\limits_{j=1}^{k}(-1+j) = 0$. Ainsi, puisque $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et que Q admet au moins pour racines les n réels $1, \cdots, n$ d'après la question précédente, on a $Q = \lambda \prod\limits_{k=1}^{n}(X-k)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ mais la valeur $Q(-1) = 1$ impose $\lambda = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$ d'où $Q = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}\prod\limits_{k=1}^{n}(X-k)$.

Alors $\rho_n = Q(0) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}\prod\limits_{k=1}^{n}(-k) = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}$.

9.24 **a.** Pour tout $x \in E$, on a $x = \dfrac{(x|u)}{||u||^2}u + \left(x - \dfrac{(x|u)}{||u||^2}u\right)$ avec $\dfrac{(x|u)}{||u||^2}u \in \text{Vect}(u)$ et $x - \dfrac{(x|u)}{||u||^2}u \in \text{Vect}(u)^{\perp}$ car $\left(u|x - \dfrac{(x|u)}{||u||^2}u\right) = (u|x) - \dfrac{(x|u)}{||u||^2}(u|u) = 0$. Ainsi, par définition d'une projection orthogonale : $p(x) = \dfrac{(x|u)}{||u||^2}u$.

De même, par définition d'une symétrie orthogonale : $s(x) = \left(x - \dfrac{(x|u)}{||u||^2}u\right) - \dfrac{(x|u)}{||u||^2}u = x - 2\dfrac{(x|u)}{||u||^2}u$.

b. Si une telle réflexion s d'hyperplan H vérifie les deux conditions $s(a) = b$ et $s(b) = a$, alors on sait que $s(a) - a \in \text{Im}\,(s - \text{id}_E) = \text{Ker}(s + \text{id}_E) = H^{\perp}$ donc $b - a \in H^{\perp}$ qui est une droite. Comme $b - a \neq 0$ par hypothèse, $H^{\perp} = \text{Vect}(b-a)$ donc $H = \text{Vect}(b-a)^{\perp}$ ce qui prouve l'unicité.

Réciproquement, soit l'hyperplan $H = \text{Vect}(b-a)^{\perp}$ et $s = s_H$ la réflexion de plan H. Alors $a = \dfrac{a-b}{2} + \dfrac{a+b}{2}$ avec $\dfrac{a-b}{2} \in H^{\perp}$ et $\dfrac{a+b}{2} \in H$ car $\left(\dfrac{a-b}{2}\middle|\dfrac{a+b}{2}\right) = \dfrac{||a||^2 - ||b||^2}{4} = 0$. Ainsi, par définition d'une symétrie orthogonale : $s(a) = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2} = b$. Comme s est une involution : $s(b) = a$. D'où l'existence.

Il existe une unique réflexion s telle que $s(a) = b$ et $s(b) = a$: c'est la réflexion d'hyperplan $H = \text{Vect}(b-a)^{\perp}$.

9.25 Soit $F = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$ et $x \in F^{\perp}$, alors d'après la relation de l'énoncé appliquée à ce vecteur x, on obtient $||x||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}(x|e_k)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} 0 = 0$ donc $x = 0_E$. Ainsi, $F^{\perp} = \{0_E\}$ donc $F = (F^{\perp})^{\perp} = E$. Comme $E = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$, la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est génératrice de E, et comme elle comporte n vecteurs et que $\dim(E) = n$, $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E.

Soit $j \in [\![1;n]\!]$, alors $||e_j||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}(e_j|e_k)^2 = ||e_j||^4 + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(e_j|e_k)^2 \geqslant ||e_j||^4$ donc $||e_j|| \leqslant 1$. Soit l'hyperplan $H_j = \underset{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\k\neq j}}{\text{Vect}}(e_k)$ de E et n_j l'un des deux vecteurs unitaires dans la droite $H_j^{\perp}$. Si on applique la relation de l'énoncé à n_j, on trouve $||n_j||^2 = 1 = \sum\limits_{k=1}^{n}(n_j|e_k)^2 = (n_j|e_j)^2$. Or $1 = (n_j|e_j)^2 \leqslant ||n_j||^2||e_j||^2 \leqslant 1$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, forcément $(n_j|e_j)^2 = ||n_j||^2||e_j||^2 = 1$. Ceci assure que $||e_j|| = 1$ et on peut conclure de deux manières à l'aspect orthonormé de $(e_1, \cdots, e_n)$.

- L'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|(n_j|e_j)| = ||n_j||||e_j|| = 1$ garantit que e_j et n_j sont colinéaires donc que e_j est orthogonal à tous les autres vecteurs de $(e_1, \cdots, e_n)$. Ceci est vrai pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $(e_1, \cdots, e_n)$ est bien une base orthonormée de E.
- On revient à $||e_j||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}(e_j|e_k)^2 = ||e_j||^4 + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(e_j|e_k)^2$ qui devient $\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(e_j|e_k)^2 = 0$ et on a donc $\forall (k,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ k \neq j \Longrightarrow (e_j|e_k) = 0$. À nouveau, $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

9.26 **a.** Pour $k \in \mathbb{N}$, $g_k : t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_k(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc g_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'où l'existence de I_k. On peut procéder par récurrence ou se rappeler qu'on l'a déjà fait avec la fonction Γ d'EULER $I_k = \Gamma(k+1) = (k+1-1)! = k!$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, alors $f : t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissances comparées, $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$: $(P|Q)$ est bien défini. Par linéarité de l'intégrale, $(.|.)$ est bilinéaire et symétrique car $PQ = QP$. De plus, $(P|P) = \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt \geqslant 0$ et, comme $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0 \iff \forall t \geqslant 0,\ P^2(t)e^{-t} = 0 \iff P$ nulle sur $\mathbb{R}_+$. Mais si P s'annule sur $\mathbb{R}_+$, P admet une infinité de racines donc $P = 0$. Ainsi, $(P|P) = 0 \iff P = 0$. $(.|.)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ (plus généralement sur $\mathbb{R}[X]$).

c. Par la formule de LEIBNIZ, on a $L_k(t) = e^t \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (e^{-t})^{(k-i)}(t^k)^{(i)}$ avec les abus de notations habituels. Ainsi, comme $(e^{-t})^{(k-i)} = (-1)^{k-i}e^{-t}$ et $(t^k)^{(i)} = \frac{k!}{(k-i)!}t^{k-i}$, on a $L_k = \sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\frac{k!}{(k-i)!}X^{k-i}$. Par conséquent, L_k est bien un polynôme de degré k et de coefficient dominant $(-1)^k$ (pour $i = 0$).

d. Pour $k \in [\![0;n]\!]$, $p \in [\![0;k-1]\!]$, $u(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)$ et $v(t) = t^p$ dans $(L_k|X^p) = \int_0^{+\infty} \frac{d^k}{dt^k}(e^{-t}t^k)t^p dt$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées (car $u(t)v(t)$ est de la forme $V(t)e^{-t}$ avec V polynomiale). Ainsi, $(L_k|X^p) = \left[\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)t^p\right]_0^{+\infty} - p\int_0^{+\infty} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)t^{p-1}dt$ par intégration par parties donc $(L_k|X^p) = -p\int_0^{+\infty} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)t^{p-1}dt$. On effectue encore $p-1$ IPP du même style et on trouve $(L_k|X^p) = (-1)^p p! \int_0^{+\infty} \frac{d^{k-p}}{dt^{k-p}}(e^{-t}t^k)dt = \left[\frac{d^{k-p-1}}{dt^{k-p-1}}(e^{-t}t^k)\right]_0^{+\infty} = 0$ car $\frac{d^{k-p-1}}{dt^{k-p-1}}(e^{-t}t^k)$ est de la forme $t^{p+1}W(t)e^{-t}$ avec W polynomiale. Ainsi $(L_k|X^p) = 0$.

De même, $(L_k|X^k) = (-1)^k k! \int_0^{+\infty} \frac{d^{k-k}}{dt^{k-k}}(e^{-t}t^k)dt = (-1)^k k! \int_0^{+\infty} e^{-t}t^k dt = (-1)^k k!\Gamma(k+1) = (-1)^k(k!)^2$.

e. La famille $(L_0, \cdots, L_n)$ est composée de $n+1$ vecteurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$ et en plus elle est orthogonale sans vecteur nul donc c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, d'après les deux questions précédentes, comme $L_k = (-1)^k X^k + G_k$ avec $\deg(G_k) < k$ et $L_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$ par construction : $||L_k||^2 = (L_k|L_k) = (L_k|(-1)^k X^k + G_k) = (-1)^k(L_k|X^k) = (k!)^2$.

f. Pour $k \in [\![0;n]\!]$, on a $P_k(0) = \frac{1}{k!}L_k(0) = 1$ (obtenu pour $i = k$ dans la question **c.**).

g. L'application $\varphi : P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire non nulle car $\varphi(1) = 1$ donc $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, ainsi $\dim(F) = n+1-1 = n$. Comme $P \in F \iff X|P \iff (\exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P = XQ)$, on a $F = \mathrm{Vect}(X, X^2, \cdots, X^n)$. Mais d'après la question **f.**, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $P_k - 1$ s'annule en 0 donc, comme $(P_1 - 1, \cdots, P_n - 1)$ est une famille de n polynômes de degrés échelonnés dans F : $F = \mathrm{Vect}(P_1 - 1, \cdots, P_n - 1)$. Comme F est un hyperplan, $F^\perp$ est une droite. Si elle est engendrée par le vecteur $U = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i P_i$, comme $P_0 = 1$, alors $\forall k \geqslant 1$, $(U|P_k - 1) = a_k||P_k||^2 - a_0||1||^2 = a_k - a_0 = 0$. Ainsi, $F^\perp = \mathrm{Vect}(U)$ avec $U = \sum\limits_{k=0}^{n} P_k$.

h. $d = \underset{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n}{\mathrm{Inf}} \int_0^{+\infty}(1 - a_1 t - \cdots - a_n t^n)^2 e^{-t}dt = d(1,F)^2 = \frac{(1|U)^2}{||U||^2}$ d'après une formule du cours. Or $(1|U) = (1|1 + \sum\limits_{k=1}^{n} P_k) = 1$ et $||U||^2 = n+1$ car $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une bon. Ainsi, $d = \frac{1}{n+1}$.

9.27 **a.** Soit $(U,V,W) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors par linéarité de trace, θ est linéaire en la seconde variable car $\theta(U,V+\lambda W) = \mathrm{Tr}\,({}^tU(V+\lambda W)) = \mathrm{Tr}\,({}^tUV+\lambda{}^tUW) = \mathrm{Tr}\,({}^tUV)+\lambda\mathrm{Tr}\,({}^tUW) = \theta(U,V)+\lambda\theta(U,W)$. De plus, puisque $\theta(N,M) = \mathrm{Tr}\,({}^tNM) = \mathrm{Tr}\,({}^t({}^tNM)) = \mathrm{Tr}\,({}^tMN) = \theta(N,M)$ car la trace d'une matrice carrée est égale à celle de sa transposée, θ est symétrique donc c'est une forme bilinéaire symétrique.

Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on calcule classiquement $\theta(M,M) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2$ donc $\theta(M,M) \geqslant 0$ et, comme une somme de termes positifs est nulle si ces termes sont tous nuls, on a l'équivalence suivante : $\theta(M,M) = 0 \iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j}^2 = 0 \iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j} = 0 \iff M = 0$. Ainsi, θ est définie positive. Au final, θ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est le produit scalaire canonique car la base canonique est une base orthonormée pour ce produit scalaire).

b. La trace est une forme linéaire non nulle car $\mathrm{Tr}\,(I_n) = n \neq 0$ donc $H = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\,)$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc un sous-espace vectoriel de dimension n^2-1.

c. $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \theta(I_n,M) = 0\}$ donc $H = \mathrm{Vect}(I_n)^\perp$ par définition. Or $d(J,H) = ||J-p(J)||$ d'après le cours si p désigne la projection orthogonale sur H. Or $J = J - \dfrac{\theta(J,I_n)}{||I_n||^2}I_n + \dfrac{\theta(J,I_n)}{||I_n||^2}I_n$ avec $\dfrac{\theta(J,I_n)}{||I_n||^2}I_n \in \mathrm{Vect}(I_n)$ et $J - \dfrac{\theta(J,I_n)}{||I_n||^2}I_n \in H$ donc $p(J) = J - \dfrac{\theta(J,I_n)}{||I_n||^2}I_n$. Ainsi, $d(J,H) = \left|\left|\dfrac{\theta(J,I_n)}{||I_n||^2}I_n\right|\right| = \dfrac{|\mathrm{Tr}\,(J)|}{||I_n||^2}\mathrm{Tr}\,(I_n) = \sqrt{n}$.

9.28 **a.** Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, alors $f : t \mapsto P(t)Q(t)\omega(t)$ est continue sur $]a;b[$ et, comme PQ est continue sur le segment $[a;b]$, elle y est bornée donc $\exists M \geqslant 0,\ |f(t)| \leqslant M\omega(t)$ donc f est intégrable sur $]a;b[$ par comparaison, le réel $< P,Q >$ est donc bien défini. Par linéarité de l'intégrale, $< .,. >$ est bilinéaire et symétrique car $PQ = QP$. De plus, $(P|P) = \displaystyle\int_a^b P^2(t)\omega(t)dt \geqslant 0$ et, comme $t \mapsto P^2(t)\omega(t)$ est continue et positive sur $]a;b[$, $\displaystyle\int_a^b P^2(t)\omega(t)dt = 0 \iff \forall t \in]a;b[,\ P^2(t)\omega(t) = 0 \iff P$ nulle sur $]a;b[$. Mais si P s'annule sur $]a;b[$, P admet une infinité de racines donc $P = 0$. Ainsi, $< P,P >= 0 \iff P = 0$. $< .,. >$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ (plus généralement sur $\mathbb{R}[X]$).

b. On sait que $P_0 = \dfrac{1}{||1||}$ et que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $P_k = \dfrac{Q_k}{||Q_k||}$ avec $Q_k = X^k - \sum\limits_{i=0}^{k-1}(X^k|P_i)P_i$ par construction de l'orthonormalisée de Gram-Schmidt. Ainsi, $\deg(P_0) = 0$ et, si, pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, on suppose que $\forall i \in [\![0;k-1]\!]$, $\deg(P_i) = i$, on a $\deg\Big(\sum\limits_{i=0}^{k-1}(X^k|P_i)P_i\Big) \leqslant k-1$ donc $\deg(P_k) = k$. Ainsi, par principe de récurrence, $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\deg(P_k) = k$. Ainsi, $(P_0,\cdots,P_k)$, en tant que famille de polynômes de degrés échelonnés de cardinal $k+1 = \dim(\mathbb{R}_k[X])$, est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$ pour tout $k \in [\![0;n]\!]$.

Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$, $XP_k(X) \in \mathbb{R}_{k+1}[X]$ se décompose $XP_k = \sum\limits_{i=0}^{k+1}\alpha_i P_i$ dans la base $(P_0,\cdots,P_{k+1})$ de $\mathbb{R}_{k+1}[X]$. Par construction toujours, on a $\forall i \in [\![1;n-1]\!]$, $P_i \in \mathrm{Vect}(P_0,\cdots,P_{i-1})^\perp = \mathrm{Vect}(1,\cdots,X^{i-1})^\perp = \mathbb{R}_{i-1}[X]^\perp$. Ainsi, pour $j \in [\![0;k-2]\!]$, on a $< XP_k,P_j >= \sum\limits_{i=0}^{k+1}\alpha_i < P_i,P_j >= \alpha_j = 0 =< P_k,XP_j >$ car $XP_j \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. En notant $a_k = \alpha_{k+1}$, $b_k = \alpha_k$ et $c_k = \alpha_{k-1}$, on a bien $(a_k,b_k,c_k) \in \mathbb{R}^3$ et $XP_k = a_kP_{k+1}+b_kP_k+c_kP_{k-1}$.

c. On a $XP_k = a_kP_{k+1}+b_kP_k+c_kP_{k-1}$ et $XP_{k-1} = a_{k-1}P_k+b_{k-1}P_{k-1}+c_{k-1}P_{k-2}$ d'après la question **b.**. Or la famille $(P_{k-2},P_{k-1},P_k,P_{k+1})$ est orthonormale donc $c_k =< XP_k,P_{k-1} >$ et $a_{k-1} =< XP_{k-1},P_k >$. Or on a clairement $< XP_k,P_{k-1} >=< XP_{k-1},P_k >$ (en passant par les intégrales) donc $c_k = a_{k-1}$.

d. Comme $k \geqslant 1$ et $P_0 = \dfrac{1}{||1||}$, on a $< P_k,1 >= ||1|| < P_k,P_0 >= 0$. Supposons que P_k ne possède aucune racine réelle de multiplicité impaire dans $]a;b[$, alors en décomposant P_k en produit de polynômes irréductibles réels, on a $P_k = \lambda \prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{2m_i} \prod_{i=1}^{r}(X-\beta_i)^{2n_i+1} \prod_{i=1}^{t}(X^2+\gamma_i X+\delta_i)^{o_i}$ où les α_i sont les racines réelles (mais de multiplicité paire) de P_k et β_i les racines réelles de multiplicité impaires de P_k hors de $]a;b[$. Ainsi, P_k garde un signe constant donc $< P_k, 1 >= \int_a^b P_k(t)\omega(t)dt = 0$ implique, comme $t \mapsto P_k(t)\omega(t)$ est de signe constant et continue sur $]a;b[$, que $\forall t \in]a;b[,\ P_k(t)\omega(t) = 0 \Longrightarrow P_k(t) = 0$ car $\omega(t) > 0$. Ainsi, P_k admet une infinité de racines donc $P_k = 0$ ce qui est absurde. Ainsi, P_k admet au moins une racine réelle de multiplicité impaire dans l'intervalle $]a;b[$.

e. Par construction, P_kQ_k n'a que des racines réelles de multiplicités impaires hors de l'intervalle $]a;b[$, ou des racines réelles de multiplicités paires, ou des racines complexes conjuguées de mêmes multiplicités. Toujours est-il que P_kQ_k est de signe constant, continu sur $]a;b[$ en ne s'annulant qu'en un nombre fini de valeurs (les racines de P_k dans $]a;b[$), ainsi $< P_k, Q_k >= \int_a^b P_k(t)Q_k(t)\omega(t)dt > 0$. Si on avait $p < k$, alors on aurait $Q_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et, puisque $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$ par construction, on aurait $< P_k, Q_k >= 0$ ce qui est absurde. Alors, il vient $p = k$.

f. P_k possède donc k racines distinctes réelles dans $]a;b[$, et comme P_k est de degré k, il ne peut y en avoir d'autres. Les racines complexes de P_k sont donc toutes réelles, toutes dans $]a;b[$ et toutes simples. WAOUH !

9.29 (iii) $\Longrightarrow$ (ii) et (iii) $\Longrightarrow$ (i) sont des formules du cours.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p)$ et $x \in F^\perp$, alors d'après la relation (i) appliquée à ce x, on a $||x||^2 = 0$ donc $x = 0_E$. Par conséquent $F^\perp = \{0_E\}$ donc $F = (F^\perp)^\perp = E$. Ainsi $(v_1, \cdots, v_p)$ est génératrice donc $p \geqslant \dim(E)$. Comme $p \leqslant \dim(E)$ par hypothèse, il vient $p = \dim(E)$ et $(v_1, \cdots, v_p)$ est une base de E. Soit $j \in [\![1;p]\!]$, alors $||v_j||^2 = \sum_{k=1}^{p}(v_j|v_k)^2 = ||v_j||^4 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p}(v_j|v_k)^2 \geqslant ||v_j||^4$ donc $||v_j|| \leqslant 1$. Soit aussi l'hyperplan $H_j = \underset{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\k\neq j}}{\mathrm{Vect}}(v_k)$ de E et n_j l'un des deux vecteurs unitaires dans la droite $H_j^\perp$. Si on applique (i) à n_j, $1 = (n_j|v_j)^2$. Or $1 = (n_j|v_j)^2 \leqslant ||n_j||^2||v_j||^2 = ||v_j||^2 \leqslant 1$ d'après CAUCHY-SCHWARZ donc $||v_j|| = 1$. On a donc $|(n_j|v_j)| = ||n_j||||v_j|| = 1$ ce qui assure par le cas d'égalité dans CAUCHY-SCHWARZ que v_j et n_j sont colinéaires donc que v_j est orthogonal à tous les autres vecteurs de la famille $(v_1, \cdots, v_p)$. Ceci est vrai pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, $(v_1, \cdots, v_p)$ est bien une base orthonormée de E.

On pouvait aussi dire, une fois prouvé que $||v_j|| = 1$, en reprenant la formule ci-dessus, que $\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p}(v_j|v_k)^{=}0$ car $||v_j||^4 = ||v_j||^2 = 1$ donc que $\forall k \in [\![1;p]\!] \setminus \{j\},\ (v_j|v_k) = 0$ avec la même conclusion.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) L'hypothèse (ii) nous apprend que $(v_1, \cdots, v_p)$ est génératrice dans E donc $p \geqslant \dim(E)$. Comme $p \leqslant \dim(E)$ par hypothèse, voici que $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_p)$ est déjà une base de E. Soit $j \in [\![1;p]\!]$, si on applique (ii) à v_j, $v_j = \sum_{k=1}^{p}(v_j|v_k)v_k$ ce qui donne, en identifiant dans la base $\mathcal{B}$: $||v_j||^2 = 1$ et $\forall k \in [\![1;p]\!] \setminus \{j\},\ (v_j|v_k) = 0$. Comme ceci est vrai pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, $(v_1, \cdots, v_p)$ est bien une base orthonormée de E.

On a bien montré l'équivalence des trois assertions avec ce qui précède mais on pouvait aussi, plutôt que de démontrer que (ii) $\Longrightarrow$ (iii), montrer que (ii) $\Longrightarrow$ (i) de la manière suivante :

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Soit $x \in E$, qu'on écrit par hypothèse $x = \sum_{k=1}^{p}(x|v_k)v_k$ alors, par linéarité à gauche du produit scalaire, $||x||^2=(x|x)=\Big(x\Big|\sum_{k=1}^{p}(x|v_k)v_k\Big)=\sum_{k=1}^{p}(x|v_k)(x|v_k)$, ce qui donne bien $||x||^2=\sum_{k=1}^{p}(x|v_k)^2$.

9.30 **a.** Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$, alors $f:t\mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissances comparées, $f(t)\underset{+\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$: $\Phi(P,Q)$ est bien défini. Par linéarité de l'intégrale, Φ est bilinéaire et symétrique car $PQ=QP$. De plus, $\Phi(P,P)=\displaystyle\int_0^{+\infty}P^2(t)e^{-t}dt\geqslant 0$ et, comme $t\mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}P^2(t)e^{-t}dt=0\iff\forall t\geqslant 0,\ P^2(t)e^{-t}=0\iff P$ nulle sur $\mathbb{R}_+$. Mais si P s'annule sur $\mathbb{R}_+$, P admet une infinité de racines donc $P=0$. Ainsi, $\Phi(P,P)=0\iff P=0$. Φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Pour $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}dt=\Phi(X^n,1)$ existe d'après **a.**. Si $n\geqslant 1$ et $u(t)=t^n$ et $v(t)=-e^{-t}$, u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $I_n=[-t^ne^{-t}]_0^{+\infty}+n\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-t}dt=nI_{n-1}$. Comme $I_0=[-e^{-t}]_0^{+\infty}=1$, on montre par une récurrence simple que $I_n=n!$. On pouvait aussi dire que $I_n=\Gamma(n+1)=(n+1-1)!=n!$.

c. Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}(t^2-at-b)^2e^{-t}dt=\Phi(X^2-aX-b,X^2-aX-b)$ donc, d'après le cours, $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}}\displaystyle\int_0^{+\infty}(t^2-at-b)^2e^{-t}dt=\Big(\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}}\sqrt{\int_0^{+\infty}(t^2-at-b)^2e^{-t}dt}\Big)^2=d(X^2,F)^2=||X^2-p(X^2)||^2$ avec $F=\mathrm{Vect}(1,X)$ et p la projection orthogonale sur F. Si on pose $p(X^2)=aX+b$, alors $X^2-p(X^2)\in F^\perp$ donc $\Phi(X^2-aX-b,1)=\Phi(X^2-aX-b,X)=0\iff 2-a-b=6-2a-b=0\iff(a=4$ et $b=-2)$. Ainsi $||X^2-p(X^2)||^2=||X^2-4X+2||^2=I_4-8I_3+20I_2-16I_1+4I_0=24-48+40-16+4=4$.

9.31 **a.** L'application φ est clairement une forme bilinéaire et symétrique, surtout si on se rappelle (le calcul est simple) que $\varphi(M,N)=\mathrm{Tr}\ ({}^tMN)$. Soit $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\varphi(M)=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}m_{i,j}^2\geqslant 0$ et $\varphi(M,M)=0\iff\forall(i,j)\in[\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j}^2=0\iff\forall(i,j)\in[\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j}=0\iff M=0$ car une somme de termes positifs est nulle s'ils sont tous nuls. Ainsi, φ est définie positive. Au final, φ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est le produit scalaire canonique).

b. $M\in H\iff\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}m_{i,j}=0\iff\varphi(M,J)=0$ avec $J=(1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice composée de 1). Ainsi, $H=\mathrm{Vect}(J)^\perp$ donc H est un sous-espace de dimension n^2-1 (supplémentaire orthogonal d'une droite).

D'après le cours, $d(A,H)^2=||A-p(A)||^2=\Big(\underset{M\in H}{\mathrm{Inf}}\sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{i,j}-m_{i,j})^2}\Big)^2=\underset{M\in H}{\mathrm{Inf}}\Big(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{i,j}-m_{i,j})^2\Big)$ si p désigne la projection orthogonale sur H. Dorénavant, on note $(U|V)=\varphi(U,V)$. Or $A=A-\dfrac{(A|J)}{||J||^2}J+\dfrac{(A|J)}{||J||^2}J$ avec $\dfrac{(A|J)}{||J||^2}J\in\mathrm{Vect}(J)$ et $A-\dfrac{(A|J)}{||J||^2}J\in H$ car $\Big(A-\dfrac{(A|J)}{||J||^2}J\Big|J\Big)=(A|J)-\dfrac{(A|J)}{||J||^2}||J||^2=0$ donc $p(A)=A-\dfrac{(A|J)}{||J||^2}J$. Ainsi, $d(A,H)^2=\Big|\Big|\dfrac{(A|J)}{||J||^2}J\Big|\Big|^2=\dfrac{(A|J)^2}{||J||^2}=\dfrac{1}{n^2}\Big(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}\Big)^2$.

9.32 **a.** D'après l'énoncé, $I_0=\sqrt{\pi}$. De plus, $I_1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}dt=\Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}\Big]_{-\infty}^{+\infty}=0$. Soit $n\in\mathbb{N}$, l'application $f_n:t\mapsto t^ne^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire ou impaire selon la parité de n, et $f_n(t)\underset{\pm\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées, ce qui fait que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après Riemann. Ainsi, I_n existe.
Pour $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+2}=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}t^{n+2}e^{-t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}t^{n+1}(te^{-t^2})dt$. Si on pose $u:t\mapsto t^{n+1}$ et $v:t\mapsto-\dfrac{e^{-t^2}}{2}$, alors u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to\pm\infty}u(t)v(t)=0$. Ainsi, par intégration par parties, $I_{n+2}=0+\dfrac{n+1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}t^ne^{-t^2}dt=\frac{n+1}{2}I_n$.
Si n impair, comme $t\mapsto t^ne^{-t^2}$ est impaire, on a $I_n=0$ (ou alors avec $I_1=0$ et la relation précédente).

Si $n = 2p$ est pair, alors $I_n = I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2} I_{2p-2} = \cdots = \dfrac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2^p} I_0 = \dfrac{(2p)!}{4^p p!}\sqrt{\pi} = \dfrac{n!}{2^n (n/2)!}\sqrt{\pi}$.

b. À nouveau, pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $g : t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, par croissances comparées, $g(t) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc g est intégrable sur $\mathbb{R}$. L'application φ est donc bien définie.

Par linéarité de l'intégrale, φ est bilinéaire et symétrique car $PQ = QP$. $\varphi(P, P) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt \geqslant 0$ et, comme $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R},\ P^2(t)e^{-t} = 0$ ainsi P est nulle sur $\mathbb{R}$. Mais si P s'annule sur $\mathbb{R}$, P admet une infinité de racines donc $P = 0$. Ainsi, $(P|P) = 0 \iff P = 0$. $(.|.)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c. D'après le cours, $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = ||X^3 - p(X^3)||$ si p est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $p(X^3) = a + bX + cX^2$ et $(X^3 - p(X^3)|1) = (X^3 - p(X^3)|X) = (X^3 - p(X^3)|X^2) = 0$ ce qui donne le système à 3 équations et 3 inconnues suivant : $aI_0 + cI_2 = aI_2 + cI_4 = bI_2 - I_4 = 0$ car $(X^3 - p(X^3)|1) = I_3 - aI_0 - bI_1 - cI_2$, $(X^3 - p(X^3)|X) = I_4 - aI_1 - bI_2 - cI_3$ et $(X^3 - p(X^3)|X^2) = I_5 - aI_2 - bI_3 - cI_4$. On en déduit après calculs que $a = c = 0$ et $b = 3/2$, et, de deux manières :

- $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = ||X^3 - (3/2)X||$ et on développe $||X^3 - (3/2)X||^2 = ||X^3||^2 - 3(X^3|X) + (9/4)||X||^2$ ce qui donne $||X^3 - (3/2)X|| = \sqrt{I_6 - 3I_4 + (9/4)I_2} = \sqrt{((15/8) - (9/4) + (9/8))\sqrt{\pi}} = \dfrac{\sqrt{3}(\pi)^{1/4}}{2}$.
- Comme $X^3 = (X^3 - (3/2)X) + ((3/2)X)$ avec $(X^3 - (3/2)X) \perp ((3/2)X)$ par construction, on a aussi par PYTHAGORE $||X^3||^2 = ||X^3 - (3/2)X||^2 + ||(3/2)X||^2$ donc $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \sqrt{||X^3||^2 - (9/4)||X||^2}$ ce qui donne encore $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \sqrt{I_6 - (9/4)I_2} = \sqrt{\dfrac{15}{8}\sqrt{\pi} - \dfrac{9}{8}\sqrt{\pi}} = \dfrac{\sqrt{3}(\pi)^{1/4}}{2}$.

Par les deux méthodes, on obtient $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \dfrac{\sqrt{3}(\pi)^{1/4}}{2} \sim 1,15$.

9.33 Soit $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, alors $v \in F \iff x - t = y - z = 0 \iff (x, y, z, t) = (x, y, y, x) = xv_1 + yv_2$ en notant $v_1 = (1, 0, 0, 1)$ et $v_2 = (0, 1, 1, 0)$. Ainsi, $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. En notant s la symétrie orthogonale par rapport à F, $s(v) = 2p(v) - v$ en notant p la projection orthogonale sur F. Or v_1, v_2 sont orthogonaux et de norme $\sqrt{2}$ donc $p(v) = \dfrac{(v|v_1)}{2}v_1 + \dfrac{(v|v_2)}{2}v_2$. Ainsi, avec la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^4$, si $v = (x, y, z, t)$, on a $s(v) = (v|v_1)v_1 + (v|v_2)v_2 - v = (x+t)v_1 + (y+z)v_2 - v = (x+t, y+z, y+z, x+t) - (x, y, z, t) = (t, z, y, x)$.

Ainsi, on a donc $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9.34 **a.** Soit $c > 0$ et $s \in]1; 2[$, la fonction $f_c : t^{1-s}e^{-ct}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $c > 0$, par croissances comparées, $f_c(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f_c est intégrable sur $[1; +\infty[$. De plus, $f_c(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{s-1}}$ donc, d'après RIEMANN, f_c est intégrable sur $]0; 1]$ car $s - 1 < 1$. Par conséquent, f_c est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où l'existence de $I(c)$.

b. Les applications F_t et G sont bien définies sur $(\mathbb{R}^n)^2$ et clairement symétriques. Un calcul classique montre aussi qu'elles sont linéaires en la première variable (par exemple) donc bilinéaires. Enfin, si $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$F_t(x, x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j e^{-(a_i + a_j)t} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j e^{-a_i t} e^{-a_j t} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k e^{-a_k t}\right)^2 \geqslant 0$$

donc F_t est bien un pseudo produit scalaire. Ce n'est pas un produit scalaire car quel que le n-uplet $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, comme $(e^{-a_1 t}, \cdots, e^{-a_n t}) \neq (0, \cdots, 0)$, l'ensemble des $(x_1, \cdots, x_n)$ qui vérifient

$\sum_{k=1}^{n} x_k e^{-a_k t} = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ donc il ne contient pas que $(0, \cdots, 0)$.

L'énoncé nous encourage à poser le changement de variable $t = \frac{u}{c} = \varphi(u)$ dans $I(c)$, ce qui est valide car φ est une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, on obtient bien par linéarité de l'intégration $I(c) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{c}\right)^{1-s} e^{-u} \left(\frac{1}{c}\right) dt = c^{s-2} \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$.

Alors, puisque d'après le cours on peut poser $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ et que $\Gamma(s) > 0$ car $t \mapsto t^{s-1} e^{-t}$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient encore par linéarité de l'intégration :

$$G(x,x)\Gamma(s) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j (a_i + a_j)^{s-2} \Gamma(s) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j I(a_i + a_j) = \int_0^{+\infty} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j e^{-(a_i + a_j)t} dt.$$

D'après le calcul précédent, $G(x,x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} F_t(x,x) dt \geqslant 0$ et G est aussi un pseudo produit scalaire.

On va montrer que G est un produit scalaire si et seulement si les $a_1, \cdots, a_n$ sont distincts deux à deux.

• Il est clair que si, par exemple, $a_1 = a_2$, alors en prenant $x = (1, -1, 0, \cdots, 0) \neq (0, \cdots, 0)$, il vient $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ F_t(x,x) = 0$ donc $G(x,x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} F_t(x,x) dt = 0$ donc G n'est pas définie positive.

• Réciproquement, si $a_1, \cdots, a_n$ sont distincts deux à deux, on peut par exemple supposer, quitte à les renuméroter, que $0 < a_1 < \cdots < a_n$. Alors, soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \neq (0, \cdots, 0)$ et posons $p = \text{Min}(i \in [\![1;n]\!],\ x_i \neq 0) \in [\![1;n]\!]$. Par croissances comparées, on sait que $\sum_{k=1}^{n} x_k e^{-a_k t} \underset{+\infty}{\sim} x_p e^{-a_p t}$ donc $t \mapsto F_t(x,x)$ est une fonction positive continue et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui montre d'après un théorème du cours que $G(x,x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} F_t(x,x) dt > 0$ donc G est définie positive ce qui en fait un produit scalaire.

c. Dans la preuve de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans le cours, on ne s'est pas servi de la définie positivité mais seulement de la positivité, ce qui fait qu'on l'a bien montré pour un pseudo produit scalaire. Il suffit de prendre les deux vecteurs $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$ tels que $x_i = 1$ si $k \leqslant i \leqslant \ell$ et $x_i = 0$ sinon, $y_j = 1$ si $m \leqslant j \leqslant p$ et $y_j = 0$ sinon, et d'appliquer l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ au pseudo-produit scalaire G. En effet, on a $G(x,y) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j (a_i + a_j)^{s-2} = \sum_{i=k}^{\ell} \sum_{j=m}^{p} K(a_i, a_j)$ par définition de K et construction des vecteurs x et y, de même $G(x,x) = \sum_{i=k}^{\ell} \sum_{j=k}^{\ell} K(a_i, a_j)$ et $G(y,y) = \sum_{i=m}^{p} \sum_{j=m}^{p} K(a_i, a_j)$ ce qui donne bien l'inégalité attendue, puisque $|G(x,y)| \leqslant \sqrt{G(x,x)}\sqrt{G(y,y)}$ et que $G(x,y) \geqslant 0$:

$$\sum_{i=k}^{\ell} \sum_{j=m}^{p} K(a_i, a_j) \leqslant \sqrt{\Big(\sum_{i=k}^{\ell} \sum_{j=k}^{\ell} K(a_i, a_j)\Big)\Big(\sum_{i=m}^{p} \sum_{j=m}^{p} K(a_i, a_j)\Big)}.$$

L'inégalité $\int_A^B g_{C,D}(x) dx \leqslant \sqrt{\int_A^B g_{A,B}(x) dx \int_C^D g_{C,D}(x) dx}$ provient de l'approximation de ces intégrales par les sommes de RIEMANN avec de bonnes subdivisions et l'inégalité qu'on vient juste d'établir.

d. D'abord, on constate que si $s = 2$, alors $\rho_2(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} = \frac{|x-y|}{2}$ donc l'inégalité $\rho_2(x,y) + \rho_2(y,z) \geqslant \rho_2(x,z)$ est simplement l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue.

Si $s \in]1;2[$, commençons par calculer, pour $(A,B) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $A \leqslant B$, la quantité $\int_A^B g_{A,B}(x)dx$. D'abord $g_{A,B}(x) = \int_A^B (a+x)^{s-2}da = \left[\frac{(a+x)^{s-1}}{s-1}\right]_A^B = \frac{(B+x)^{s-1}-(A+x)^{s-1}}{s-1}$, puis

$$\int_A^B g_{A,B}(x)dx = \int_A^B \left(\frac{(B+x)^{s-1}-(A+x)^{s-1}}{s-1}\right)dx = \left[\frac{(B+x)^s}{s(s-1)} - \frac{(A+x)^s}{s(s-1)}\right]_A^B = \frac{2^sA^s+2^sB^s-2(A+B)^s}{s(s-1)},$$

ce qui peut s'écrire plus simplement $\int_A^B g_{A,B}(x)dx = \frac{2^{s+1}}{s(s-1)}\left[\frac{A^s+B^s}{2} - \left(\frac{A+B}{2}\right)^s\right] = \frac{2^{s+1}}{s(s-1)}\rho_s(A,B)^s$.
??????????????????????????????????????

e. Encore une fois, si $s=2$, $\rho_2(x,y) = \frac{|x-y|}{2} = 0 \Longleftrightarrow |x-y| = 0 \Longleftrightarrow x=y$ directement.

Soit $x>0$ et $0<A<B$, comme $\forall a \in [A;B]$, $(a+x)^{s-2} \geqslant (B+x)^{s-2}$ car $s-2<0$ donc $t \mapsto t^{s-2}$ est strictement décroissante, on en déduit que $g_{A,B}(x) = \int_A^B K(a,x)da \geqslant (B-A)(B+x)^{s-2}$ ce qui montre aussi que $\int_A^B g_{A,B}(x)dx \geqslant (B-A)\int_A^B (B+x)^{s-2}dx = \frac{(2B)^{s-1}-(A+B)^{s-1}}{s-1} > 0$ car $A+B<2B$ et $s-1>0$. Par conséquent, si $0<A<B$, on a $\frac{2^{s+1}}{s(s-1)}\rho_s(A,B)^s > 0$ donc $\rho_s(A,B)>0$. Comme ρ_s est clairement symétrique, on a aussi $\rho_s(A,B)>0$ si $0<B<A$. Comme $\rho_s(A,A)=0$ pour tout $A>0$, on a bien l'équivalence annoncée (avec x à la place de A et y à celle de B) : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \rho_s(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$.

9.35 **a.** Soit E un espace préhilbertien réel, $(e_1,\cdots,e_n)$ une famille orthonormale de E et $x \in E$un vecteur, alors l'inégalité de Bessel stipule que $\sum\limits_{k=1}^{n}(e_k|x)^2 \leqslant ||x||^2$.

b. Si $(u,v) \in E^2$, la fonction uv est continue sur les segment $[a;b]$ donc $\varphi(u,v)$ existe et la fonction φ est donc bien définie. De plus, par linéarité de l'intégrale, on montre facilement la bilinéarité de φ. Comme $uv = vu$, $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$ donc φ est déjà une forme bilinéaire symétrique. Si $u \in E$, $\varphi(u,u) = \int_a^b u^2(t)dt \geqslant 0$ car $a<b$ par hypothèse. De plus, si $\varphi(u,u)$, comme u^2 est positive et continue, un théorème du cours montre que $u^2=0$ sur $[a;b]$ donc que $u=0$. On a bien établi l'aspect défini positif.

En conclusion, φ est une forme bilinéaire symétrique défini positive : φ est un produit scalaire sur E.

c. Si $f \in E$ et $x \in [a;b]$, la fonction $h_x : y \mapsto K(x,y)f(y)$ est continue par produit sur le segment $[a;b]$ car f et K sont continues sur leurs ensembles de définition. Ainsi, $g(x)$ est bien défini : T est donc bien définie.

La linéarité de T provient à nouveau de la linéarité de l'intégrale. Reste à montrer que $g = T(f) \in E$, définissons donc $h : [a;b]^2 \to \mathbb{R}$ par $h(x,y) = K(x,y)f(y)$:

- $\forall y \in [a;b]$, $x \mapsto h(x,y)$ est continue sur $[a;b]$ par continuité de K sur $[a;b]$.
- $\forall x \in [a;b]$, $y \mapsto h(x,y) = h_x(y)$ est continue et intégrable su $[a;b]$ (déjà vu).
- $\forall (x,y) \in [a;b]$, en notant $M_1 = \underset{[a;b]^2}{\text{Max}}|K|$ et $M_2 = \underset{[a;b]}{\text{Max}}|f|$ qui existent par les deux formes du théorème des bornes atteintes (fonction de une ou deux variable respectivement sur un segment de $\mathbb{R}$ (pour f) ou un compact de $\mathbb{R}^2$ (pour K)), on a $|h(x,y)| = |K(x,y)||f(y)| \leqslant M_1M_2 = \varphi(y)$ et φ est bien sûr intégrable sur $[a;b]$.

On en conclut donc par le théorème de continuité sous le signe somme que $g = T(f)$ est continue sur $[a;b]$ donc que $T(f) \in E$. Ainsi, T est bien un endomorphisme de E.

d. <u>Méthode 1</u> : il est logique d'appliquer l'inégalité de Bessel. Soit $x \in [a;b]$ et $K_x : [a;b] \to \mathbb{R}$ telle que $K_x(y) = K(x,y)$. Alors, $K_x \in E$ car K est continue sur $[a;b]^2$ et, d'après **a.**, comme $(f_1,\cdots,f_p)$ est orthonormale, $\sum_{k=1}^{p}(f_k|K_x)^2 \leqslant ||K_x||^2$. Or $(f_k|K_x) = \int_a^b f_k(y)K(x,y)dy = T(f_k)(x) = (\lambda f_k)(x)$ car $f_k \in E_\lambda(T)$. Ainsi, on parvient à $\lambda^2 \sum_{k=1}^{p} f_k^2(x) \leqslant ||K_x||^2 = \int_a^b K(x,y)^2dy$ comme attendu.

Méthode 2 : soit $x \in [a;b]$, posons $f = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)f_i$. Comme $E_\lambda(T)$ est un sous-espace de E et que $(f_1,\ldots,f_p)$ est une famille de fonctions de $E_\lambda(T)$, on a $f \in E_\lambda(T)$ donc $T(f) = \lambda f$. Ainsi, $\lambda f(x) = T(f)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$. Or $f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i^2(x)$ par définition donc, en élevant au carré, on a $\lambda^2\Big(\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x)\Big)^2 = \Big(\int_a^b K(x,y)f(y)dy\Big)^2$. Par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, il vient $\Big(\int_a^b K(x,y)f(y)dy\Big)^2 \leqslant \Big(\int_a^b K(x,y)^2dy\Big)\Big(\int_a^b f^2(y)dy\Big)$. Mais $\int_a^b f^2(y)dy = ||f||^2 = \Big|\Big|\sum_{i=1}^{p} f_i(x)f_i\Big|\Big|^2 = \sum_{i=1}^{p} f_i^2(x)$ car est une famille orthonormée de E. Ainsi, on a $\lambda^2\Big(\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x)\Big)^2 \leqslant \Big(\int_a^b K(x,y)^2dy\Big)\Big(\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x)\Big)$ (1). On distingue alors deux cas :

- si $\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x) = 0$, l'inégalité $\lambda^2 \sum_{i=1}^{p} f_i^2(x) \leqslant \int_a^b K(x,y)^2dy$ est claire.
- si $\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x) > 0$, on divise l'inégalité (1) par $\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x)$ et on obtient $\lambda^2 \sum_{i=1}^{p} f_i^2(x) \leqslant \int_a^b K(x,y)^2dy$.

On a bien montré que $\forall x \in [a;b],\ \lambda^2 \sum_{i=1}^{p}(f_i(x))^2 \leqslant \int_a^b K(x,y)^2dy$.

9.36 **a.** On vérifie sans peine, par linéarité de la transposée et la trace, que θ est une forme bilinéaire. De plus, puisque $\theta(N,M) = \text{Tr}\ ({}^tNM) = \text{Tr}\ ({}^t({}^tNM)) = \text{Tr}\ ({}^tMN) = \theta(N,M)$ car la trace d'une matrice carrée est égale à celle de sa transposée. Ainsi, θ est aussi symétrique. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on calcule classiquement $\theta(M,M) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2$ donc $\theta(M,M) \geqslant 0$ et, comme une somme de termes positifs est nulle s'ils sont tous nuls, $\theta(M,M) = 0 \iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j}^2 = 0 \iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j} = 0 \iff M = 0$. Ainsi, θ est définie positive. Au final, θ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est le produit scalaire canonique car la base canonique est une base orthonormée pour ce produit scalaire).

b. La trace est une forme linéaire non nulle car $\text{Tr}\ (I_n) = n \neq 0$ donc $H = \text{Ker}(\text{Tr}\ )$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc un sous-espace vectoriel de dimension n^2-1.

c. $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \theta(I_n,M) = 0\}$ donc $H = \text{Vect}(I_n)^\perp$. On sait d'après le cours que $d(J,H) = ||J - p(J)||$ si p désigne la projection orthogonale sur H. Or $J = J - \frac{\theta(J,I_n)}{||I_n||^2}I_n + \frac{\theta(J,I_n)}{||I_n||^2}I_n$ avec $\frac{\theta(J,I_n)}{||I_n||^2}I_n \in \text{Vect}(I_n)$ et $J - \frac{\theta(J,I_n)}{||I_n||^2}I_n \in H$ donc $p(J) = J - \frac{\theta(J,I_n)}{||I_n||^2}I_n$. Ainsi, $d(J,H) = \Big|\Big|\frac{\theta(J,I_n)}{||I_n||^2}I_n\Big|\Big| = \frac{|\text{Tr}\ (J)|}{||I_n||^2}\text{Tr}\ (I_n) = \sqrt{n}$.

9.37 Soit $F = \text{Vect}(e_1,\cdots,e_n)$ et $x \in F^\perp$. D'après l'énoncé, $||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2 = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$ donc $x = 0_E$. Ainsi, $F^\perp = \{0_E\}$ ce qui montre que $F = (F^\perp)^\perp = \{0_E\}^\perp = E$. On en déduit que $(e_1,\cdots,e_n)$ est génératrice de E ce qui, puisque cette famille possède $n = \dim(E)$ vecteurs, justifie que $\mathcal{B}$ est une base de E.

Pour $j \in [\![1;n]\!]$, soit l'hyperplan $H_j = \text{Vect}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}}(e_i)$ et n_j un vecteur normal à H_j. En appliquant la relation de l'énoncé à n_j, on trouve $||n_j||^2 =< n_j, e_j >^2 \leqslant ||n_j||^2||e_j||^2$ avec CAUCHY-SCHWARZ. Ainsi, $||e_j|| \geqslant 1$. Or $||e_j||^2 = \sum_{k=1}^{n} < e_j, e_k >^2 = ||e_j||^4 + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} < e_j, e_k >^2 \geqslant ||e_j||^4$ donc $||e_j||^2 \geqslant ||e_j||^4$ ce qui montre que $||e_j|| \leqslant 1$.

On en déduit que $||e_j|| = 1$ ce qui donne $\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} < e_j, e_k >^2 = 0$ donc $< e_j, e_k >= 0$ dès que $j \neq k$.

La famille $\mathcal{B}$ est bien une base orthonormale de E.

D'après les formules du cours, réciproquement, si on suppose que $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de E euclidien alors on a bien $\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} < x, e_k >^2$.

9.38 **a.** L'application φ est clairement une forme bilinéaire et symétrique, surtout si on se rappelle (le calcul est simple) que $\varphi(M, N) = \text{Tr}\ ({}^tMN)$. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\varphi(M) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2 \geqslant 0$ et $\varphi(M, M) = 0 \iff \forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2,\ m_{i,j}^2 = 0 \iff \forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2,\ m_{i,j} = 0 \iff M = 0$ car une somme de termes positifs est nulle s'ils sont tous nuls. Ainsi, φ est définie positive. Au final, φ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est le produit scalaire canonique).

b. $M \in H \iff \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j} = 0 \iff \varphi(M, J) = 0$ avec $J = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice composée de 1). Ainsi, $H = \text{Vect}(J)^\perp$ donc H est un sous-espace de dimension $n^2 - 1$ (supplémentaire orthogonal d'une droite).

D'après le cours, $d(A, H)^2 = ||A - p(A)||^2 = \left(\underset{M\in H}{\text{Inf}} \sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2}\right)^2 = \underset{M\in H}{\text{Inf}} \left(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2\right)$ si p désigne la projection orthogonale sur H. Dorénavant, on note $(U|V) = \varphi(U, V)$. Or $A = A - \dfrac{(A|J)}{||J||^2}J + \dfrac{(A|J)}{||J||^2}J$ avec $\dfrac{(A|J)}{||J||^2}J \in \text{Vect}(J)$ et $A - \dfrac{(A|J)}{||J||^2}J \in H$ car $\left(A - \dfrac{(A|J)}{||J||^2}J \Big| J\right) = (A|J) - \dfrac{(A|J)}{||J||^2}||J||^2 = 0$ donc $p(A) = A - \dfrac{(A|J)}{||J||^2}J$. Ainsi, $d(A, H)^2 = \left|\left|\dfrac{(A|J)}{||J||^2}J\right|\right|^2 = \dfrac{(A|J)^2}{||J||^2} = \dfrac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right)^2$.

9.39 **a.** Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ existe car PQ est continue sur le segment $[0; 1]$.
La symétrie et la bilinéarité de $(.|.)$ proviennent de la linéarité de l'intégrale et de la symétrie du produit dans $\mathbb{R}$. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $(P|P) = \displaystyle\int_0^1 P^2(t)dt$ est bien positif et si $(P|P) = 0$, alors, comme P^2 est continue et positive sur $[0; 1]$, on en déduit que $P^2 = 0$ sur $[0; 1]$ donc que P admet pour racines tous les réels de $[0; 1]$. P admet donc une infinité de racines d'où $P = 0$ et $(.|.)$ est défini positif. Au final, $(.|.)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Prenons $P_1 = 1$ qui est unitaire car $||P_1||^2 = \displaystyle\int_0^1 dt = 1$. Ensuite, avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de la base $(1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$, on prend $Q_2 = X - (1|X)1 = X - \dfrac{1}{2}$. Il reste à normer et prendre $P_2 = \dfrac{Q_2}{||Q_2||}$. Or $||Q_2||^2 = \displaystyle\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Ainsi, (P_1, P_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ si $P_1 = 1$ et $P_2 = 2\sqrt{3}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$.

c. Comme $\displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = ||X^-(aX + b)||^2$ par définition et que les polynômes $aX + b$ parcourent le plan $P = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$, la recherche de $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\text{Inf}} \displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$ s'interprètent comme la recherche de la distance (au carré) de X^2 au plan P dans l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(.|.)$.
Or on sait d'après le cours que $d(X^2, P) = ||X^2 - p(X^2)||$ où p est la projection orthogonale sur P. Mais, comme (P_1, P_2) est une base orthonormale de P, on a $p(X^2) = (X^2|P_1)P_1 + (X^2|P_2)P_2$. Comme $(X^2|P_1) = \displaystyle\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$

et $(X^2|P_2) = 2\sqrt{3}\int_0^1 \left(t^3 - \frac{t^2}{2}\right)dt = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$, on a donc $p(X^2) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right) = X - \frac{1}{6}$. Enfin, $d(X^2, P) = ||X^2 - X + (1/6)||$ donc $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = ||X^2 - X + (1/6)||^2$ qu'on calcule aisément car $||X^2 - X + (1/6)||^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4t^2}{3} - \frac{t}{3} + \frac{1}{36}\right)dt$ donc $||X^2 - X + (1/6)||^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180}$. Ainsi, $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \frac{1}{180}$. On sait même que ce minimum n'est atteint qu'en le projeté $p(X^2)$ donc pour $a = 1$ et $b = -\frac{1}{6}$ d'après les calculs précédents.

On pouvait aussi étudier $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(a,b) = \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \frac{a^2}{3} + b^2 + ab - \frac{2b}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{5}$, ce qui se fait sans trop de difficulté avec le calcul de l'unique point critique de f et des calculs algébriques.

9.40 **a.** C'est une question de cours ; en général même, $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}\ ({}^tAB)$ un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, la linéarité de la trace montre la linéarité en la seconde variable de φ. De plus, $\varphi(B,A) = \mathrm{Tr}\ ({}^tBA) = \mathrm{Tr}\ ({}^t({}^tBA)) = \mathrm{Tr}\ ({}^tAB) = \varphi(A,B)$ donc φ est symétrique et donc aussi linéaire en la première variable. Ainsi, φ est déjà bilinéaire symétrique. Par le calcul, en notant $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $\varphi(A,A) = \mathrm{Tr}\ ({}^tAA) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 \geqslant 0$. Si $\varphi(A,A) = 0$, comme une somme de termes positifs n'est nulle que si tous ses termes sont nuls, on a $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = 0$ donc $A = 0$. φ est donc bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Par définition, $M \in \Sigma \iff (\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = aI_2 + bJ)$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\Sigma = \mathrm{Vect}(I_2, J)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de comme la famille (I_2, J) est libre, c'est une base de Σ.

c. $\Sigma^\perp$ étant un supplémentaire du plan Σ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4, on a aussi $\dim(\Sigma^\perp) = 4 - 2 = 2$. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Sigma^\perp \iff (M \perp I_2$ et $M \perp J)$ donc, après calculs, $M \in \Sigma^\perp \iff (a + d = b - c = 0)$. Les matrices de $\Sigma^\perp$ sont donc celles de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, d'où $\Sigma^\perp = \mathrm{Vect}(K, L)$ avec $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Or ${}^tKL = KL = J$ donc $\varphi(K,L) = \mathrm{Tr}\ (J) = 0$. Il suffit donc de normer ces matrices pour avoir $\mathcal{B}_2 = \left(\frac{K}{\sqrt{2}}, \frac{L}{\sqrt{2}}\right)$ comme base orthonormale de $\Sigma^\perp$. De même, $\mathcal{B}_2 = \left(\frac{I_2}{\sqrt{2}}, \frac{J}{\sqrt{2}}\right)$ en est une de Σ.

d. D'après le cours, cette distance d_2 vérifie $d_2 = d(M, \Sigma^\perp) = ||M - p_2(M)||$ où p_2 est la projection orthogonale sur $\Sigma^\perp$. Or on sait que $p_2(M) = \varphi\left(M, \frac{K}{\sqrt{2}}\right)\frac{K}{\sqrt{2}} + \varphi\left(M, \frac{L}{\sqrt{2}}\right)\frac{L}{\sqrt{2}}$ car $\mathcal{B}_2$ est une base orthonormale de $\Sigma^\perp$. Ainsi, $p_2(M) = 0.\frac{K}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\frac{L}{\sqrt{2}} = L$ d'où $d = ||M - L|| = ||I_2|| = \sqrt{2}$. On peut faire de même avec $\mathcal{B}_1$ ou, en notant p_1 la projection orthogonale sur Σ et en notant d_1 la distance de M à Σ, se rendre compte que $d_1 = ||M - p_1(M)|| = ||p_2(M)||$ car $p_1 + p_2 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Puisque $d_2 = ||M - p_2(M)|| = ||p_1(M)||$ et par Pythagore, $||M||^2 = ||p_1(M)||^2 + ||p_2(M)||^2 = d_1^2 + d_2^2 = 2$. Ainsi, on a aussi $d_1 = \sqrt{2}$.

9.41 **a.** On vérifie sans peine, par linéarité de la transposée et la trace, que θ est une forme bilinéaire. De plus, puisque $\theta(N,M) = \mathrm{Tr}\ ({}^tNM) = \mathrm{Tr}\ ({}^t({}^tNM)) = \mathrm{Tr}\ ({}^tMN) = \theta(N,M)$ car la trace d'une matrice carrée est égale à celle de sa transposée. Ainsi, θ est aussi symétrique. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on calcule classiquement $\theta(M,M) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2$ donc $\theta(M,M) \geqslant 0$ et, comme une somme de termes positifs est nulle s'ils sont tous nuls, $\theta(M,M) = 0 \iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j}^2 = 0 \iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j} = 0 \iff M = 0$.

Ainsi, θ est définie positive. Au final, θ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est le produit scalaire canonique car la base canonique est une base orthonormée pour ce produit scalaire).

b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, classiquement (on peut raisonner par analyse/synthèse pour trouver la décomposition), $M = \dfrac{M + {}^tM}{2} + \dfrac{M - {}^tM}{2}$ alors que $\dfrac{M + {}^tM}{2} \in S_n(\mathbb{R})$ et $\dfrac{M - {}^tM}{2} \in A_n(\mathbb{R})$, ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$. Or si $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$, il vent ${}^tM = M = -M$ donc $2M = 0$ d'où $M = 0$: $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe. Ainsi, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$. On a même $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(A_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

c. Si $(M, N) \in S \times A$, on a $(M|N) = \mathrm{Tr}\,({}^tMN) = \mathrm{Tr}\,(MN)$ car M est symétrique et, comme N est antisymétrique, $(N|M) = \mathrm{Tr}\,({}^tNM) = \mathrm{Tr}\,(-NM) = -\mathrm{Tr}\,(NM) = -\mathrm{Tr}\,(MN)$. Ainsi $(M|N) = 0$ et on a bien $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}$. Comme $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})^{\perp}$ sont deux supplémentaires de $A_n(\mathbb{R})$, ils ont même dimension. Et comme l'un est inclus dans l'autre, on en conclut que $S_n(\mathbb{R}) = \big(A_n(\mathbb{R})\big)^{\perp}$.

d. Puisque $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (c_{i,j} - m_{i,j})^2 = ||C - M||^2$, on a $d = d(C, S_n(\mathbb{R}))^2$ donc $d = ||C - p_{S_n(\mathbb{R})}(C)||^2$ par théorème (où $p_{S_n(\mathbb{R})}$ est la projection orthogonale sur $S_n(\mathbb{R})$) mais $C = \dfrac{C + {}^tC}{2} + \dfrac{C - {}^tC}{2}$ avec $\dfrac{C + {}^tC}{2} \in S_n(\mathbb{R})$ et $\dfrac{C - {}^tC}{2} \in A_n(\mathbb{R})$ donc $C - p_{S_n(\mathbb{R})}(C) = \dfrac{C - {}^tC}{2}$.

Par conséquent : $d = \left|\left|\dfrac{C - {}^tC}{2}\right|\right|^2 = \dfrac{1}{4} \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (c_{i,j} - c_{j,i})^2 = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (c_{i,j} - c_{j,i})^2$.

9.42 **a.** La fonction Φ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ par composition. Effectuons une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Comme $\Phi'(x) = -2xe^{-x^2}$, $\Phi''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ et $\Phi'''(x) = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2}$, on conjecture que P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$.

- Si $n = 0$, $\Phi^{(0)}(x) = \Phi(x) = P_0(x)\Phi(x)$ avec $P_0 = 1$ et $\deg(P_0) = 0$ et $\mathrm{dom}(P_0) = 1$.
- Soit un entier naturel n tel que $\Phi^{(n)}(x) = P_n(x)\Phi(x)$ avec un polynôme P_n de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$. Comme $\Phi'(x) = -2x\Phi(x)$ et que $\Phi^{(n+1)}(x) = (\Phi^{(n)}(x))'$, en posant $P_{n+1} = P_n' - 2XP_n$, il vient $\Phi^{(n+1)}(x) = (P_n(x)\Phi(x))' = P_n'(x)\Phi(x) - 2xP_n(x)\Phi(x) = (P_n'(x) - 2xP_n(x))\Phi(x) = P_{n+1}(x)\Phi(x)$. Comme $\deg(P_n') < n$ et $\deg(XP_n) = n + 1$, on a donc $\deg(P_{n+1}) = n + 1$ et $\mathrm{dom}(P_{n+1}) = -2\mathrm{dom}(P_n) = (-2)^{n+1}$.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\Phi^{(n)} = P_n\Phi$ avec $\deg(P_n) = n$ et $\mathrm{dom}(P_n) = (-2)^n$.

On peut aussi montrer par récurrence que le polynôme P_n a la parité de n.

b. L'application $(\,.\,|\,.\,) : (\mathbb{R}[X])^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $(P|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx$ est bien définie car la fonction $f : x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et que, par croissances comparées, on a $f(x) \underset{\pm\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$. En effet, c'est clair si $PQ = 0$. De plus, si $PQ \neq 0$, en notant $r = \deg(PQ)$, on a $P(x)Q(x) \underset{\pm\infty}{=} O(x^r)$ et on sait que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^{r+2}e^{-x^2} = 0$. Cette application $(\,.\,|\,.\,)$ est clairement bilinéaire (par linéarité de l'intégrale), symétrique (par symétrie du produit dans $\mathbb{R}$) et positive (par positivité de l'intégrale) car $x \mapsto P^2(x)e^{-x^2}$ est positive sur $\mathbb{R}$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$. De plus, si $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(P|P) = 0$, la fonction $g : x \mapsto P^2(x)e^{-x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 0$ implique $g = 0$ sur $\mathbb{R}$ ce qui prouve que tous les réels x sont racines de P car $e^{-x^2} > 0$. Alors, $P = 0$.

Ainsi, $(\,.\,|\,.\,)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < m$. $(P_n|P_m) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(t)P_m(t)e^{-t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(t)\Phi^{(m)}(t)dt$. On effectue une première intégration par parties en posant $u = P_n$ et $v : t \mapsto \Phi^{(m-1)}(t) = P_{m-1}(t)e^{-t^2}$

(car $m \geqslant 1$) qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ qui vérifient $\lim\limits_{t\to\pm\infty} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} P_n(t)P_{m-1}(t)e^{-t^2} = 0$ par croissances comparées, ainsi $(P_n|P_m) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_n'(t)\Phi^{(m-1)}(t)dt$. On continue pour montrer par récurrence que $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $(P_n|P_m) = (-1)^k \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_n^{(k)}(t)\Phi^{(m-k)}(t)dt$. Ainsi, en prenant $k = n$, on obtient la relation $(P_n|P_m) = (-1)^n \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_n^{(n)}(t)\Phi^{(m-n)}(t)dt$. Or P_n étant de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$, on a $P_n^{(n)} = (-2)^n n!$ ce qui donne $(P_n|P_m) = 2^n n! \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(m-n)}(t)dt = 2^n n![\Phi^{(m-n-1)}(t)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ car $n+1 \leqslant m$ et $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \Phi^{(m-n-1)}(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} P_{m-n-1}(t)e^{-t^2} = 0$ par croissances comparées.

Ainsi, la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. On peut faire mieux, avec les mêmes calculs, pour $n = m \in \mathbb{N}$, on a $||P_n||^2 = (P_n|P_n) = 2^n n! \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(n-n)}(t)dt = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2^n n!\sqrt{\pi}$ donc $||P_n|| = \sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}$ (classique intégrale de Gauss) donc la famille $\left(\dfrac{P_n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$.

d. <u>Méthode 1</u> : soit r le nombre de racines réelles distinctes de P_n ayant une multiplicité impaire dans P_n et $\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$ ces racines. On pose $Q_n = \prod\limits_{k=1}^{r}(X-\alpha_k)$. Supposons que $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. La famille $(P_0, \cdots, P_{n-1})$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de degré échelonnés, elle est donc libre donc c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi, on aurait $Q_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_k P_k$ d'où $(P_n|Q_n) = \left(P_n \Big| \sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_k P_k\right) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_k(P_n|P_k) = 0$ d'après **c.**. Par construction, les racines de P_nQ_n sont complexes ou réelles de multiplicité paire (car on a rajouté 1 à la multiplicité de α_k dans P_n en multipliant par Q_n et on n'a rien changé à la multiplicité des autres racines). Ainsi, le polynôme P_nQ_n garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ et il n'est pas nul, ainsi la fonction $t \mapsto P_n(t)Q_n(t)e^{-t^2}$ est continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}$. On sait d'après le cours qu'alors on a $(P_n|Q_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(t)Q_n(t)e^{-t^2}dt > 0$: c'est absurde ! On en déduit que $\deg(Q_n) = n$. Comme les n racines de Q_n sont racines de P_n et que $\deg(P_n) = n$, d'après le cours, $P_n = (-2)^n Q_n$.

Ainsi, comme attendu, P_n n'admet que des racines réelles simples !

<u>Méthode 2</u> : pour montrer que P_n n'admet que des racines réelles simples, on va éliminer les autres cas :

- si P_n admet une racine réelle α de multiplicité paire $2p \geqslant 2$ ou impaire $2p+1 \geqslant 3$, on définit U_n par $P_n = (X-\alpha)^{2p}U_n$. Comme pour la méthode 1, puisque $\deg(U_n) = n - 2p \leqslant n-1$, on a $(P_n|U_n) = 0$. Or $P_nU_n = (X-\alpha)^{2p}U_n^2$ donc $(P_n|U_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t-\alpha)^{2p}U_n(t)^2e^{-t^2}dt > 0$ car $t \mapsto (t-\alpha)^{2p}U_n(t)^2e^{-t^2}$ est continue, positive et non nulle. NON !
- si P_n admet un facteur irréductible de degré 2 dans $\mathbb{R}[X]$, de la forme X^2+aX+b avec a et b réels et $a^2-4b < 0$, on définit V_n par $P_n = (X^2+aX+b)V_n$. Comme avant $(P_n|V_n) = 0$ car on a $\deg(V_n) = n-2 \leqslant n-1$. Mais $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+ax+b > 0$ et $(P_n|V_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t^2+at+b)^sV_n(t)^2e^{-t^2}dt > 0$ car $t \mapsto (t^2+at+b)^sV_n(t)^2e^{-t^2}$ est continue, positive et non nulle. NON !

Ainsi, P_n n'a que des racines réelles simples comme annoncé.

La famille des fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\psi_n : t \mapsto \dfrac{P_n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-t^2/2}$ est utilisée en physique quantique comme étant la famille des fonctions d'onde des états propres de l'oscillateur harmonique quantique.

9.43 <u>Méthode 1</u> : un vecteur normal au plan P est le vecteur unitaire $v_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ et on peut prendre la base orthonormée $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ en prenant $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ et $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$. Par définition de p, on a $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si on note $O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique $can = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $\mathcal{B}$, on sait que la matrice de A de p dans la base canonique vaut $A = \mathrm{Mat}_{can}(p) = O^{-1}DO$. Mais comme O est la matrice de passage entre deux bases orthonormées, on a O orthogonale donc $O^{-1} = {}^tO$. Ainsi, $A = {}^tODO = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ après calculs.

<u>Méthode 2</u> : soit $q : v \mapsto v - (v|n)n$ avec n un vecteur normal unitaire de P. Alors $q(n) = n - ||n||^2 n = 0$ et $q(v) = v$ si $v \perp n$. Ainsi, comme q est linéaire par bilinéarité du produit scalaire et coïncide avec p sur P et en $n = v_3$, on en conclut que $p = q$. Comme $p(e_1) = e_1 - (e_1|v_3)v_3 = (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(2,-1,-1)$, $p(e_2) = e_2 - (e_2|v_3)v_3 = (0,1,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(-1,2,-1)$ et $p(e_3) = e_3 - (e_3|v_3)v_3 = \frac{1}{3}(-1,-1,2)$ de même, on en déduit à nouveau que $A = \mathrm{Mat}_{can}(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9.44 ($\Longrightarrow$) Si p est le projecteur orthogonal sur F, pour tout $x \in E$ qu'on écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$, alors $||p(x)||^2 = ||y||^2 \leqslant ||y||^2 + ||z||^2 = ||x||^2$ par PYTHAGORE. Ainsi, en passant à la racine, on a $||p(x)|| \leqslant ||x||$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $\forall x \in E,\ ||p(x)|| \leqslant ||x||$ et notons F et G les sous-espaces de E tels que $G = \mathrm{Ker}(p)$ et $F = \mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$. Soit $y \in F$ et $z \in G$, alors pour tout réel t, on a $p(ty + z) = ty$ donc $||p(ty + z)|| = ||ty|| \leqslant ||ty + z||$ donc $t^2||y||^2 = ||ty||^2 \leqslant ||ty + z||^2 = t^2||y||^2 + 2t(y|z) + ||z||^2$ ce qui prouve que la fonction affine $t \mapsto 2t(y|z) + ||z||^2$ reste positive sur $\mathbb{R}$. Or ceci n'est possible que si $(y|z) = 0$. Par conséquent $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}\,(p)$ et la projection p est bien orthogonale.

Par double implication, on a bien p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E,\ ||p(x)|| \leqslant ||x||$.

9.45 **a.** Par définition, la distance de x à F est le réel $d(x, F) = \underset{y \in F}{\mathrm{Inf}}(||x - y||)$ qui est bien défini car la partie $A = \{||x - y||\ |y \in F\}$ est une partie non vide car $0_E \in F$ donc $||x|| \in A$ et minorée par 0. Pour $y \in F$, on a $x - = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)$ en notant $p_F(x)$ le projeté orthogonal de x sur F. Comme $x - p_F(x) \in F^{\perp}$ et $p_F(x) - y \in F$, par PYTHAGORE, on a $||x-y||^2 = ||x-p_F(x)||^2 + ||p_F(x)-y||^2 \geqslant ||x-p_F(x)||^2$ donc $||x-p_F(x)||$ minore A. Comme $||x-p_F(x)|| \in A$ en prenant $y = p_F(x)$, on a donc $d(x, F) = \mathrm{Inf}(A) = \mathrm{Min}(A) = ||x-p_F(x)||$.

b. Posons $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme on sait que $(A|B) = \mathrm{Tr}\,(A^T B) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} a_{i,j} b_{i,j}$ (avec des notations logiques), on voit que $(U|V) = 0$. Il suffit donc de normer ces deux matrices pour avoir une base orthonormale de F. Or $||U||^2 = ||V||^2 = 2$ donc $\mathcal{B} = \left(\frac{U}{\sqrt{2}}, \frac{V}{\sqrt{2}}\right)$ est une base orthonormale de F.

c. Nommons $P = p_F(M)$ le projeté de M sur la plan F. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de F, on sait que $P = \left(M|\frac{U}{\sqrt{2}}\right)\frac{U}{\sqrt{2}} + \left(M|\frac{V}{\sqrt{2}}\right)\frac{V}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\big((M|U)U + (M|V)V\big) = -\frac{1}{2}U + \frac{3}{2}V = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, comme on a $M - P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, il vient $d(M, F) = ||M - P|| = \frac{1}{2}\sqrt{9+1+1+9} = \sqrt{5}$.

9.46 **a.** L'application $< ., . >: E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\forall (P, Q) \in E^2,\ < P, Q >= \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est bien définie car la fonction $f : t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour $(P, Q) \in E^2$ et que, par croissances comparées, on a $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Cette application est clairement bilinéaire (par linéarité de l'intégrale), symétrique (par symétrie du produit dans $\mathbb{R}$) et positive (par positivité de l'intégrale) car $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ pour $P \in E$. De plus, si $P \in E$ tel que $< P, P >= 0$, la fonction $g : t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt = 0$ implique $g = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ ce qui prouve que tous les réels positifs t sont racines de P car $e^{-t} > 0$. Comme P admet une infinité de racines, $P = 0$. Ainsi, $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

b. Pour $(i, j) \in [\![0; n]\!]^2$, on a $(B_i|B_j) = \dfrac{1}{i!j!}(X^i|X^j) = \dfrac{1}{i!j!}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{i+j}e^{-t}dt = \dfrac{\Gamma(i+j+1)}{i!j!}$ et on sait alors que $(B_i|B_j) = \dfrac{(i+j)!}{i!j!} = \dbinom{i+j}{i} \neq 0$ si $i \neq j$ donc $\mathcal{B} = (B_0, \cdots, B_n)$ n'est pas une base orthonormale de E.

c. Par la formule de Leibniz, pour un entier $k \in [\![0; n]\!]$, on a $L_k(t) = \dfrac{(-1)^k}{k!}e^t \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}(e^{-t})^{(k-i)}(t^k)^{(i)}$ avec les abus de notations habituels. Comme $(e^{-t})^{(k-i)} = (-1)^{k-i}e^{-t}$ et $(t^k)^{(i)} = \dfrac{k!}{(k-i)!}t^{k-i}$, on a la relation $L_k = \dfrac{(-1)^k}{k!}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\frac{k!}{(k-i)!}X^{k-i} = k!\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{i!((k-i)!)^2}X^{k-i}$. Par conséquent, L_k est bien un polynôme de degré k et de coefficient dominant $\dfrac{1}{k!}$ (pour $i = 0$) tel que $L_k(0) = (-1)^k$ (pour $i = k$). Ainsi, $\mathcal{L} = (L_0, \cdots, L_n)$ est une famille de vecteurs de E de degrés échelonnés de 0 à n donc une base de E.

d. Pour $k \in [\![1; n]\!]$, $p \in [\![0; k-1]\!]$, si on pose $u(t) = \dfrac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)$ et $v(t) = t^p$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées ($u(t)v(t)$ est de la forme $V(t)e^{-t}$ avec V polynomiale). Par intégration par parties dans le produit scalaire $(L_k|X^p) = \dfrac{(-1)^k}{k!}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{d^k}{dt^k}(e^{-t}t^k)t^p dt$, on a donc la relation $(L_k|X^p) = \dfrac{(-1)^k}{k!}\left[\dfrac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)t^p\right]_0^{+\infty} - \dfrac{(-1)^k p}{k!}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)t^{p-1}dt$. Or la partie "crochet" est nulle par croissances comparées donc $(L_k|X^p) = -\dfrac{(-1)^k p}{k!}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)t^{p-1}dt$. Après $p-1$ intégrations par parties du même style, $(L_k|X^p) = \dfrac{(-1)^k}{k!}(-1)^p p!\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{d^{k-p}}{dt^{k-p}}(e^{-t}t^k)dt$ d'où $(L_k|X^p) = \dfrac{(-1)^k}{k!}(-1)^p p!\left[\dfrac{d^{k-p-1}}{dt^{k-p-1}}(e^{-t}t^k)\right]_0^{+\infty} = 0$ car $\dfrac{d^{k-p-1}}{dt^{k-p-1}}(e^{-t}t^k)$ est de la forme $t^{p+1}W(t)e^{-t}$ avec W polynomiale. Ainsi $(L_k|X^p) = 0$. Si $0 \leqslant i < k \leqslant n$, $L_i = \displaystyle\sum_{p=0}^{i}\alpha_p X^p$ donc, par bilinéarité du produit scalaire, $(L_k|X^i) = \displaystyle\sum_{p=0}^{i}\alpha_p(L_k|X^p) = 0$ d'après ce qui précède donc la famille est déjà orthogonale.

De même, $(L_k|X^k) = \dfrac{(-1)^k}{k!}(-1)^k k!\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{d^{k-k}}{dt^{k-k}}(e^{-t}t^k)dt = \int_0^{+\infty}e^{-t}t^k dt = k!$. On a vu ci-dessus que $L_k = \dfrac{X^k}{k!} + \displaystyle\sum_{p=0}^{k-1}\alpha_p X^p$ d'où $(L_k|L_k) = \dfrac{(L_k|X^k)}{k!} + \displaystyle\sum_{p=0}^{i}\alpha_p(L_k|X^p) = \frac{k!}{k!} = 1$: $\mathcal{L}$ est une base orthonormale de E.

e. L'application $\varphi : P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire non nulle car $\varphi(1) = 1$ donc $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, ainsi $\dim(F) = n + 1 - 1 = n$. Comme $P \in F \iff X|P \iff (\exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P = XQ)$, la famille $(X, X^2, \cdots, X^n)$ est une base de F. Mais $L_k(0) = (-1)^k$ d'après **c.** donc $L_k - (-1)^k \in F$ et la famille de degrés échelonnés $(L_1 + 1, \cdots, L_n - (-1)^n)$ est une base de F. Comme F est un hyperplan, $F^\perp$ est une droite. Si $F^\perp$ est engendrée par $U = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k L_k$, comme $L_0 = 1$ et que $\mathcal{L}$ est une base orthonormale de E, $(U|L_p - (-1)^p) = a_p||L_p||^2 - (-1)^p a_0||1||^2 = a_p - (-1)^p a_0 = 0$ si $p \geqslant 1$: $F^\perp = \mathrm{Vect}(U)$ avec $U = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k L_k$.

f. $d = \underset{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n}{\text{Inf}} \int_0^{+\infty}(1-a_1t-\cdots-a_nt^n)^2e^{-t}dt = d(1,F)^2 = \dfrac{(1|U)^2}{||U||^2}$ d'après une formule du cours. Or $(1|U) = (1|1+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kL_k) = 1$ et $||U||^2 = n+1$ car $(L_0, L_1, \cdots, L_n)$ est une base orthonormale de E. Ainsi, on peut conclure que $d = \underset{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n}{\text{Inf}} \int_0^{+\infty}(1-a_1t-\cdots-a_nt^n)^2e^{-t}dt = \dfrac{1}{n+1}$.

9.47 **a.** Pour f dans E, comme f est continue sur I, par le théorème fondamental de l'intégration, $A(f)$ est la primitive de la fonction f qui s'annule en 0 et $B(f)$ est l'opposé de la primitive de f qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $A(f)$ et $B(f)$ sont de classe C^1 sur I donc a fortiori elles y sont continues ce qui montre que A et B sont bien définies et à valeurs dans E. De plus, la linéarité de A et de B provient de la linéarité de l'intégrale ; A et B sont bien des endomorphismes de E. On peut même dire que A et B ne sont pas surjectives car, par exemple, $\text{Im}(A) \subset C^1(I,\mathbb{R})$ et que l'inclusion $C^1(I,\mathbb{R}) \subset C^0(I,\mathbb{R})$ est stricte. Par contre, A et B sont injectives car, par exemple, si $B(f) = 0$, en dérivant, on obtient $-f = 0$ donc $\text{Ker}(B) = \{0\}$.

b. Pour $(f,g) \in E^2$, comme $A(f)$ et $B(g)$ sont de classe C^1 sur I d'après **a.**, par intégration par parties, on a $< A(f), g >= \int_0^{\pi/2} A(f)g = -\int_0^{\pi/2} A(f)B(g)' = -[A(f)B(g)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} A(f)'B(g) = \int_0^{\pi/2} fB(g)$ car $A(f)(0) = B(g)(\pi/2) = 0$ et on conclut bien que $< A(f), g >=< f, B(g) >$.

c. Soit λ une valeur propre de $B \circ A$, il existe donc une fonction non nulle $f \in E$ telle que $B \circ A(f) = \lambda f$. Or, d'après la question précédente, $< f, B\circ A(f) >=< f, B(A(f)) >=< A(f), A(f) >= ||A(f)||^2 \geqslant 0$ alors que $< f, B\circ A(f) >=< f, \lambda f >= \lambda ||f||^2$ avec $||f|| > 0$ donc $\lambda \geqslant 0$. Les valeurs propres de $B \circ A$ sont bien positives.

d. Par Cauchy-Schwarz, $\left|\int_0^x f(t)dt\right|^2 = \left|\int_0^x 1.f(t)dt\right|^2 \leqslant \int_0^x 1^2dt \times \int_0^x f(t)^2dt = x\int_0^x f(t)^2dt$.

e. Pour $f \in E$, on a $||A(f)||^2 = \int_0^{\pi/2} A(f)(x)^2dx \leqslant \int_0^{\pi/2} x\Big(\int_0^x f(t)^2dt\Big)dx \leqslant \int_0^{\pi/2} x\Big(\int_0^{\pi/2} f(t)^2dt\Big)dx$ donc $||A(f)||^2 \leqslant ||f||^2\int_0^{\pi/2} xdx = \frac{\pi^2}{8}||f||^2$ et, en passant à la racine, $||A(f)|| \leqslant K||f||$ avec $K = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

f. Soit λ une valeur propre de $B\circ A$, on sait d'après la question **c.** que $\lambda \geqslant 0$. Comme $B \circ A$ est injective d'après **a.**, 0 n'est pas une valeur propre de $B\circ A$ donc $\lambda > 0$. Soit $f \in E$ une fonction non nulle telle que $B\circ A(f) = B(A(f)) = \lambda f$, en dérivant, $-A(f) = \lambda f'$ qu'on dérive encore pour avoir $-f = \lambda f''$ qui s'écrit aussi $f'' + \frac{f}{\lambda} = 0$ (E). On résout classiquement cette équation différentielle linéaire (E) du second ordre à coefficients constants et il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f : x \mapsto \alpha\cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \beta\sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$. Comme $\lambda f(0) = A(f)(0) = 0$ et $\lambda f(\pi/2) = B(A(f))(\pi/2) = 0$, on a $\beta = 0$ et $\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) = 0$. Comme f n'est pas nulle, on ne peut pas avoir $\alpha = 0$ donc $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ d'où l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} = n\pi + \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$.
Réciproquement, pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : I \to \mathbb{R}$ définie par $f_n : x \mapsto \cos((2n+1)x)$, on a bien $f_n \in E$:
<u>Méthode 1</u> : on a par calculs $A(f_n)(x) = \dfrac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$ (bien nul en 0) et $B(A(f_n))(x) = \dfrac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$ (bien nul en $\frac{\pi}{2}$) d'où $B\circ A(f_n) = \dfrac{1}{(2n+1)^2}f_n$ avec $f_n \neq 0$ donc $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ est valeur propre de $B\circ A$.
<u>Méthode 2</u> : en posant $\lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$, on a clairement $-f_n = \lambda f_n''$. Or on sait que $(B\circ A(f_n))'' = -f_n$ donc $(B\circ A(f_n) - \lambda f_n)'' = 0$. Ceci prouve que la fonction $h = B\circ A(f_n) - \lambda f_n$ est affine donc qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in I,\ h(x) = B\circ A(f_n)(x) - \lambda f_n(x) = \alpha x + \beta$. Or les relations $h(\pi/2) = 0$ et $h'(0) = 0$ nous donnent

$\alpha = \beta = 0$ et $B \circ A(f_n) = \lambda f_n$ avec, à nouveau, la conclusion que $\lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ est valeur propre de $B \circ A$.

On conclut donc que $\mathrm{Sp}(B \circ A) = \left\{ \dfrac{1}{(2n+1)^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

9.48 **a.** $\varphi : (X,Y) \mapsto X^T Y$ va bien de E^2 dans $\mathbb{R}$. Pour $(X,Y) \in E^2$, si $X^T = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ et $Y^T = (y_1 \ \cdots \ y_n)$, $X^T Y = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k = Y^T X$. Ainsi, φ est symétrique. Par distributivité du produit matriciel et linéarité de la transposée, pour $(X_1, X_2) \in E^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $Y \in E$, $(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)^T Y = (\lambda_1 X_1^T + \lambda_2 X_2^T) Y = \lambda_1 X_1^T Y + \lambda_2 X_2^T Y$ donc avec la symétrie, φ est bilinéaire. Pour $X \in E$, $\varphi(X,X) = X^T X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 0$ en notant $X^T = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ et si $\varphi(X,X) = 0$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$ donc, comme une somme de termes positifs n'est nulle que si tous ses termes sont nuls, on a $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $x_k = 0$ donc $X = 0$, et φ est bien définie positive.

Comme φ est une application bilinéaire, symétrique définie positive sur E, φ est un produit scalaire sur E.

b. Comme $\mathrm{rang}\,(A) = \mathrm{rang}\,(A^T)$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(A^T)) = n - \mathrm{rang}\,(A) = n - \dim(\mathrm{Im}\,(A)) = \dim(\mathrm{Im}\,(A)^{\perp})$ par la formule du rang. De plus, soit $X \in \mathrm{Ker}(A^T)$ et $Y \in \mathrm{Im}\,(A)$, alors il existe $Z \in E$ tel que $Y = AZ$, ainsi $(X|Y) = (X|AZ) = X^T A Z = X^T (A^T)^T Z = (A^T X)^T Z = (A^T X|Z) = (0|Z) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(A^T) \subset \mathrm{Im}\,(A)^{\perp}$. On conclut à l'égalité de ces deux sous-espaces de E par égalité de leurs dimensions, $\mathrm{Im}\,(A)^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^T)$.

c. Pour un vecteur X de E, $f(X)$ est la distance entre AX et Y. Comme AX parcourt $\mathrm{Im}\,(A)$ quand X parcourt E, la fonction f admet bien une borne inférieure sur E, et même un minimum. En notant p la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(A)$, on a $\underset{Z \in E}{\mathrm{Inf}}(f(Z)) = \underset{Z \in E}{\mathrm{Min}}(f(Z)) = d(Y, \mathrm{Im}\,(A)) = ||Y - p(Y)||$ et ce minimum de la distance entre Y et un vecteur de $\mathrm{Im}\,(A)$ n'est atteint, toujours d'après le cours, qu'en ce vecteur $p(Y)$. Ainsi, f est minimale en X si et seulement si $AX = p(Y)$, c'est-à-dire si et seulement si $AX - Y$ est orthogonal à $\mathrm{Im}\,(A)$. D'après **b.**, on a $f(X) = \underset{Z \in E}{\mathrm{Inf}}(f(Z)) \iff AX - Y \in (\mathrm{Im}\,(A))^{\perp} \iff AX - Y \in \mathrm{Ker}(A^T) \iff A^T(AX - Y) = 0$.

9.49 **a.** L'application $(\,.\,|\,.\,) : E^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 t^2 f(t) g(t) dt$ est bien définie car la fonction $t \mapsto t^2 f(t) g(t)$ est continue sur le segment $[0;1]$ pour $(f,g) \in E^2$. Cette application est clairement bilinéaire (par linéarité de l'intégrale), symétrique (par symétrie du produit dans $\mathbb{R}$) et positive (par positivité de l'intégrale) car $t \mapsto t^2 f^2(t)$ est positive sur $[0;1]$ pour $f \in E$. De plus, si $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$, la fonction $t \mapsto t^2 f^2(t)$ est continue et positive sur $[0;1]$, ainsi $\displaystyle\int_0^1 t^2 f^2(t) = 0$ implique $\forall t \in [0;1]$, $t^2 f^2(t) = 0$ donc $\forall t \in]0;1]$, $f(t) = 0$. Par continuité de f en 0, f est nulle sur $[0;1]$. Ainsi, $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^n \ln(t)$ est continue sur $]0;1]$, on a $f_0(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées donc f_0 est intégrable sur $]0;1]$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN et $\lim\limits_{t \to 0^+} f_n(t) = 0$ si $n \geqslant 1$ toujours par croissances comparées donc f_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t) dt$ converge. Pour $n \geqslant 0$, avec $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$, les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $]0;1]$ et comme $u(1)v(1) = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t) dt = -\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)} \times \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}$ par intégration par parties.

c. La fonction $f = f_1$ ainsi prolongée est continue sur le segment $[0;1]$ donc $f \in E$. En notant g le projeté orthogonal de f sur F, puis $p_0 : x \mapsto 1$ et $p_1 : x \mapsto x$ de sorte que $F = \mathrm{Vect}(p_0, p_1)$, on a $g \in F$ donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g = ap_1 + bp_0$. Par définition d'une projection orthogonale, $f - g \in F^{\perp}$ donc $(f-g|p_0) = (f-g|p_1) = 0$ ce qui se traduit par le système $I_3 - (a/4) - (b/3) = I_4 - (a/5) - (b/4) = 0$ qui se résout en $a = \frac{11}{20}$ et $b = -\frac{3}{5}$. Ainsi, $g : x \mapsto \frac{11}{20}x - \frac{3}{5}$. On a besoin de $J_n = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.

d. En posant $f_{a,b} : x \mapsto ax+b$, $||g_{a,b}|| = ||f - f_{a,b}||$ est la distance entre le vecteur $f_{a,b}$ de F et le vecteur f de E. Quand (a,b) parcourt $\mathbb{R}^2$, $f_{a,b}$ parcourt F. Ainsi, $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} ||g_{a,b}|| = d(f,F) = ||f-g||$ d'après le cours. Or, comme $f = (f-g)+g$ avec $f - g \perp g$, on a $||f||^2 = ||f-g||^2 + ||g||^2$ donc $d(f,F) = \sqrt{||f||^2 - ||g||^2}$. Or, en posant $u : x \mapsto \frac{x^5}{5}$ et $v : x \mapsto (\ln(x))^2$ qui sont C^1 sur $]0;1]$ et vérifient $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)v(x) = u(1)v(1) = 0$ par croissances comparées, $||f||^2 = \int_0^1 x^4(\ln(x))^2 dx = \left[\frac{x^5}{5}(\ln(x))^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^5}{5}.\frac{2\ln(x)}{x} dx = -\frac{2}{5}I_4 = \frac{2}{125}$ par intégration par parties. De plus, $||g||^2 = \frac{121}{400}||p_1||^2 - \frac{33}{50}(p_0|p_1) + \frac{9}{25}||p_0||^2$ et $||p_1||^2 = J_4 = \frac{1}{5}$, $(p_0|p_1) = J_3 = \frac{1}{4}$ et $||p_0||^2 = J_2 = \frac{1}{3}$ donc $||g||^2 = \frac{31}{2000}$. Ainsi, $d(f,F) = \sqrt{\frac{32}{2000} - \frac{31}{2000}} = \frac{1}{\sqrt{2000}} = \frac{1}{20\sqrt{5}}$ d'où $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} ||g_{a,b}|| = \frac{1}{20\sqrt{5}} \sim 0,02$.

9.50 **a.** Pour $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est finie puisqu'en notant $d = \mathrm{Max}(\deg(P), \deg(Q))$, $\forall k > d$, $P^{(k)}(1) = Q^{(k)}(1) = 0$. Ceci assure l'existence de $< P, Q >$. Soit $(P,Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$:

Symétrie : $< P, Q >= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} Q^{(k)}(1)P^{(k)}(1) =< Q, P >$.

Bilinéarité : $< \lambda P + \mu Q, R >= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (\lambda P + \mu Q)^{(k)}(1)R^{(k)}(1) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (\lambda P^{(k)}(1) + \mu Q^{(k)}(1))R^{(k)}(1)$ par linéarité de la dérivation, d'où $< \lambda P + \mu Q, R >= \lambda \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)R^{(k)}(1) + \mu \sum\limits_{k=0}^{+\infty} Q^{(k)}(1)R^{(k)}(1) = \lambda < P, R > +\mu < Q, R >$ donc $< .,. >$ est linéaire en la première variable donc, par symétrie, aussi en la seconde.

Aspect défini positif : $< P, P >= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(P^{(k)}(1)\right)^2 \geqslant 0$ et, si $< P, P >= 0$, comme la somme d'une somme de quantités positives n'est nulle que s'ils sont tous nuls, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}(1) = 0$ donc, avec la formule de Taylor, $P = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = 0$.

Par conséquent, $< .,. >$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Si on pose $P_p = (X-1)^p$ pour $p \in \mathbb{N}$, on a $P_p^{(k)} = 0$ si $k > p$ et $P_p^{(k)} = \frac{p!}{(p-k)!}(X-1)^{p-k}$ si $k \in [\![0;p]\!]$. Ainsi, si $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et $p < q$, on a $< P_p, P_q >= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P_p^{(k)}(1)P_q^{(k)}(1) = P_p^{(p)}(1)P_q^{(p)}(1) + P_p^{(q)}(1)P_q^{(q)}(1) = 0$ car $P_q^{(p)}(1) = P_p^{(q)}(1) = 0$. Ceci montre que la famille $(P_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$. En particulier, $\mathcal{B} = (P_0, \cdots, P_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ donc elle est libre car elle ne contient par le polynôme nul. De plus, comme son cardinal vaut $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, on en déduit que $\mathcal{B} = \left(1, X-1, \cdots, (X-1)^n\right)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace de dimension finie dans l'espace préhilbertien $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $< .,. >$, ce sous-espace admet un supplémentaire d'après le cours.

($\subset$) Soit $P = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} a_p(X-1)^p$, comme $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\forall p \geqslant n+1$, $< (X-1)^k, (X-1)^p >= 0$, on a donc $< P, (X-1)^k >= 0$ par linéarité du produit scalaire selon la première variable donc $P \in (\mathbb{R}_n[X])^{\perp}$. Ainsi, on a l'inclusion $\mathrm{Vect}\left((X-1)^k \mid k > n\right) \subset (\mathbb{R}_n[X])^{\perp}$.

($\supset$) Réciproquement, soit $P \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$ qu'on écrit $P = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p(X-1)^p$ avec $a_p = \dfrac{P^{(p)}(1)}{p!}$ d'après la formule de TAYLOR. Puisque $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $<(X-1)^k, P>= 0 = a_k||(X-1)^k||^2$, ceci impose $a_k = 0$ donc $P = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p(X-1)^p$. Ainsi, on a l'inclusion $(\mathbb{R}_n[X])^\perp = \mathrm{Vect}\big((X-1)^k \mid k > n\big)$.

Par double inclusion, on a $\mathrm{Vect}\big((X-1)^k \mid k > n\big) = (\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

Ainsi, si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = Q+R$ d'après la formule de TAYLOR si on définit $Q = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k \in \mathbb{R}_n[X]$ et $R = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

9.51 **a.** L'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet une solution si et seulement si $b \in \mathrm{Im}\,(u)$ car $AX = B$ équivaut à $u(x) = b$. La matrice A est clairement de rang 2 car ses deux premières colonnes sont non colinéaires et la troisième est l'opposé de la deuxième. Ainsi, $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (-1,0,1)$ et $v_2 = (1,-1,0)$ car d'après le cours $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et b n'est pas combinaison linéaire de $u(e_1)$ et $u(e_2)$. L'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ n'admet pas de solution.

b. Quand x parcourt $\mathbb{R}^3$, $u(x)$ parcourt $\mathrm{Im}\,(u)$ par définition donc $\underset{x\in\mathbb{R}^3}{\mathrm{Inf}}\, ||u(x)-b||$ est la distance de b à $\mathrm{Im}\,(u)$ et, d'après le cours, cette quantité est un minimum atteint quand $u(x)$ est le projeté orthogonal de b sur $\mathrm{Im}\,(u)$, noté $p(b)$. Ainsi, f admet un minimum sur $\mathbb{R}^3$ qui vaut $||p(b)-b||^2$.

c. D'après ce qui précède, ce minimum est atteint dès que $u(x) = p(b)$. Comme $p(b) \in \mathrm{Im}\,(u)$ par construction, il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(x_0) = p(b)$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^3$, on a l'équivalence $u(x) = p(b) \iff u(x) = u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \mathrm{Ker}(u)$. Comme $\mathrm{Ker}(u)$ est clairement la droite $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}((0,1,1))$, il y a donc une infinité de vecteurs x dans $\mathbb{R}^3$ tels que $\underset{\mathbb{R}^3}{\mathrm{Min}}(f) = f(x)$.

d. <u>(i) $\Longrightarrow$ (ii)</u> Supposons que $u(x) - b \in (\mathrm{Im}\,(u))^\perp$, alors $\forall y \in \mathbb{R}^3$, $u(y) \in \mathrm{Im}\,(u)$ et $(u(x)-b|u(y)) = 0$, ce qui donne matriciellement $(AX-B)^T(AY) = ((AX-B)^TA)Y = 0$. Comme ceci est vrai pour tout $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a donc $(AX-B)^TA = 0$ donc $A^T(AX-B) = 0$ en transposant et $A^TAX = A^TB$.

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (i)</u> Supposons $A^TAX = A^TB$, c'est-à-dire $(AX-B)^TA = 0$, alors pour $y \in \mathbb{R}^3$, $(AX-B)^TAY = 0$ ce qui se traduit par $(u(x)-b|u(y)) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in \mathbb{R}^3$, $u(x) - b \in (\mathrm{Im}\,(u))^\perp$.

Par double implication, pour $x \in \mathbb{R}^3$, on a donc $u(x) - b \in (\mathrm{Im}\,(u))^\perp \iff A^TAX = A^TB$.

e. On a vu en question **c.** que f admet son minimum absolu en $x \in \mathbb{R}^3$ si et seulement si $u(x) = p(b)$ où p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(u)$. Par construction, $p(b) \in \mathrm{Im}\,(u)$ donc il existe α_1, α_2 deux réels tels que $p(b) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (\alpha_2 - \alpha_1, -\alpha_2, \alpha_1)$ et $p(b) - b \in \mathrm{Im}\,(u)^\perp$ donc $(p(b)-b|v_1) = (p(b)-b|v_2) = 0$ ce qui montre que $\alpha_1 - \alpha_2 + 1 + \alpha_1 - 1 = \alpha_2 - \alpha_1 - 1 + 1 + \alpha_2 = 0$ d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Par conséquent, $p(b) = 0$. f admet donc son minimum absolu en x si et seulement si $u(x) = 0$ donc si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}((0,1,1))$. Ce minimum vaut donc $\underset{\mathbb{R}^3}{\mathrm{Min}}(f) = f(0) = ||b||^2 = 3$.

9.52 **a.** C'est une question de cours ; en général même, $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}\,(A^TB)$ un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, la linéarité de la trace montre la linéarité en la seconde variable de φ. De plus, $\varphi(B,A) = \text{Tr}\ (B^T A) = \text{Tr}\ ((B^T A)^T) = \text{Tr}\ (A^T B) = \varphi(A,B)$ donc φ est symétrique et donc aussi linéaire en la première variable. Ainsi, φ est déjà bilinéaire symétrique. Par le calcul, en notant $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $\varphi(A,A) = \text{Tr}\ (A^T A) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 \geqslant 0$. Si $\varphi(A,A) = 0$, comme une somme de termes positifs n'est nulle que si tous ses termes sont nuls, on a $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = 0$ donc $A = 0$. φ est donc bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Par définition, $M \in \Sigma \iff (\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = aI_2 + bJ)$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\Sigma = \text{Vect}(I_2, J)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de comme la famille (I_2, J) est libre, c'est une base de Σ.

c. $\Sigma^\perp$ étant un supplémentaire du plan Σ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4, on a aussi $\dim(\Sigma^\perp) = 4 - 2 = 2$. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Sigma^\perp \iff (M \perp I_2 \text{ et } M \perp J)$ donc, après calculs, $M \in \Sigma^\perp \iff (a + d = b - c = 0)$. Les matrices de $\Sigma^\perp$ sont donc celles de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, d'où $\Sigma^\perp = \text{Vect}(K, L)$ avec $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Or $K^T L = KL = J$ donc $\varphi(K,L) = \text{Tr}\ (J) = 0$. Il suffit donc de normer ces matrices pour avoir $\mathcal{B}_2 = \left(\frac{K}{\sqrt{2}}, \frac{L}{\sqrt{2}}\right)$ comme base orthonormale de $\Sigma^\perp$. De même, $\mathcal{B}_2 = \left(\frac{I_2}{\sqrt{2}}, \frac{J}{\sqrt{2}}\right)$ en est une de Σ.

d. D'après un théorème du cours, cette distance d_2 vérifie $d_2 = d(M, \Sigma^\perp) = ||M - p_2(M)||$ où p_2 est la projection orthogonale sur $\Sigma^\perp$. Or on sait que $p_2(M) = \varphi\Big(M, \frac{K}{\sqrt{2}}\Big)\frac{K}{\sqrt{2}} + \varphi\Big(M, \frac{L}{\sqrt{2}}\Big)\frac{L}{\sqrt{2}}$ car $\mathcal{B}_2$ est une base orthonormale de $\Sigma^\perp$. Ainsi, $p_2(M) = 0.\frac{K}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\frac{L}{\sqrt{2}} = L$ d'où $d = ||M - L|| = ||I_2|| = \sqrt{2}$. On peut faire de même avec $\mathcal{B}_1$ ou, en notant p_1 la projection orthogonale sur Σ et en notant d_1 la distance de M à Σ, se rendre compte que $d_1 = ||M - p_1(M)|| = ||p_2(M)||$ car $p_1 + p_2 = \text{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Puisque $d_2 = ||M - p_2(M)|| = ||p_1(M)||$ et par PYTHAGORE, $||M||^2 = ||p_1(M)||^2 + ||p_2(M)||^2 = d_1^2 + d_2^2 = 2$. Ainsi, on a aussi $d_1 = \sqrt{2}$.

9.53 **a.** D'après l'énoncé, $I_0 = \sqrt{\pi}$. De plus, $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt = \Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire ou impaire selon la parité de n, et $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées, ce qui fait que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après RIEMANN : I_n existe.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2}e^{-t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+1}(te^{-t^2})dt$. Si on pose $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2}$, alors u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} u(t)v(t) = 0$. Ainsi, par intégration par parties, $I_{n+2} = 0 + \frac{n+1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt = \frac{n+1}{2}I_n$.

Si n impair, comme $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est impaire, on a $I_n = 0$ (ou alors avec $I_1 = 0$ et la relation précédente).

Si $n = 2p$ est pair, alors $I_{2p} = \frac{2p-1}{2}I_{2p-2} = \cdots = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2^p}I_0 = \frac{(2p)!}{4^p p!}\sqrt{\pi} = \frac{n!}{2^n (n/2)!}\sqrt{\pi}$.

b. À nouveau, pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $g : t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, par croissances comparées, $g(t) \underset{-\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ et $g(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ donc g est intégrable sur $\mathbb{R}$. L'application φ est donc bien définie.

Par linéarité de l'intégrale, φ est bilinéaire et symétrique car $PQ = QP$. $\varphi(P,P) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt \geqslant 0$ et, comme $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R},\ P^2(t)e^{-t} = 0$ ainsi P est nulle sur $\mathbb{R}$. Mais si P s'annule sur $\mathbb{R}$, P admet une infinité de racines donc $P = 0$. Ainsi, $(P|P) = 0 \iff P = 0$. $(.|.)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c. D'après le cours, $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = ||X^3 - p(X^3)||$ si p est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X, X^2)$, sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel. Ainsi, il existe un triplet $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $p(X^3)=a+bX+cX^2$. On a donc $(X^3-p(X^3)|1)=(X^3-p(X^3)|X)=(X^3-p(X^3)|X^2)=0$ ce qui donne le système 3 équations 3 inconnues suivant : $aI_0+cI_2=aI_2+cI_4=bI_2-I_4=0$. On en déduit que $a=c=0$ et $b=3/2$, donc que $d(X^3,\ \mathbb{R}_2[X])=||X^3-(3/2)X||=\sqrt{\dfrac{I_6-3I_4+(9/4)I_2}{\pi}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sim 0,87$ (après calculs).

9.54 **a.** Pour $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(P,Q,R)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$, si $P=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k$, $Q=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kX^k$ et $R=\sum\limits_{k=0}^{n}c_kX^k$:

Symétrie : on a $(P|Q)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_k=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_k=(Q|P)$ donc $(\,.\,|\,.\,)$ est symétrique.

Bilinéarité : on a $(\lambda P+R|Q)=\sum\limits_{k=0}^{n}(\lambda a_k+c_k)b_k=\lambda\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_k+\sum\limits_{k=0}^{n}c_kb_k=\lambda(P|Q)+(R|Q)$ donc, avec la symétrie établie ci-dessus, $(\,.\,|\,.\,)$ est bilinéaire.

Définie positivité : on a $(P|P)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k^2\geqslant 0$. Dé plus, si $(P|P)=0$, comme une somme de termes positifs n'est nulle que si tous ses termes sont nuls, $a_0=\cdots,a_n=0$ donc $P=0$. Ainsi, $(\,.\,|\,.\,)$ est définie positive.

Ainsi, $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Soit $\varphi:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(P)=P(1)$, alors φ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}_n[X]$ car $\varphi(1)=1$ donc $H=\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan $\mathbb{R}_n[X]$. Alors, d'après le cours, $d(1,H)$ est bien définie comme la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien et on sait que $d(1,H)=||1-p_H(1)||$ où p_H est la projection orthogonale sur H. Plus précisément, comme $P(1)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$ on a l'équivalence $P\in H\iff\sum\limits_{k=0}^{n}a_k=0\iff(P|1)=0$ donc $H=\mathrm{Vect}(1)^{\perp}$. Comme $H^{\perp}=\mathrm{Vect}(1)$ est un droite, on sait d'après le cours qu'alors $\forall P\in\mathbb{R}_n[X]$, $p_{H^\perp}(P)=\dfrac{(P|1)}{||1||^2}1$ donc $d(1,H)=||1-p_H(1)||=||p_{H^\perp}(1)||=\dfrac{|(P|1)|}{||1||}=\dfrac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\right|}{\sqrt{n}}$.

9.5 Officiel de la Taupe

9.55 • Si $a=0$, les parties $U_1,\cdots,U_p$ sont disjointes et non vides donc $\forall k\in[\![1;p]\!]$, $\mathrm{card}\,(U_k)\geqslant 1$ et, comme on a clairement $U_1\cup\cdots\cup U_p\subset[\![1;n]\!]$, il vient $p\leqslant\sum\limits_{k=1}^{p}\mathrm{card}\,(U_k)\leqslant n$ d'où $p\leqslant n$.

• De même, si $p=1$, alors $U_1\subset[\![1;n]\!]$ donc $n\geqslant 1$ car U_1 est non vide donc $p=1\leqslant n$.

On peut donc supposer dans la suite que l'on a $a>0$ et $p\geqslant 2$.

a. Notons la matrice $B=A^tA=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par définition du produit matriciel, pour $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$, $b_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i,k}a_{j,k}$ car la case (k,j) de ${}^tA$ contient $a_{j,k}$. Or, par définition de A, on a $a_{i,j}=\mathbb{1}_{U_i}(j)$ ce qui donne, puisque l'on sait que $\mathbb{1}_{U_i\cap U_j}=\mathbb{1}_{U_i}\mathbb{1}_{U_j}$ sur les fonctions indicatrices, la relation $b_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{U_i}(k)\mathbb{1}_{U_j}(k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{U_i\cap U_j}(k)=\mathrm{card}\,(U_i\cap U_j)$. D'après l'énoncé, $b_{i,j}=\mathrm{card}\,(U_i\cap U_j)=a$ si $i\neq j$ et $b_{i,i}=\mathrm{card}\,(U_i\cap U_i)=\mathrm{card}\,(U_i)=\alpha_i$ sinon. Par conséquent, $B=\begin{pmatrix}\alpha_1&a&\cdots&a\\ a&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\ a&\cdots&a&\alpha_n\end{pmatrix}$.

b. Si $\mathrm{card}\,(E)\geqslant 2$, $\exists(i,j)\in[\![1;p]\!]^2$ tel que $i\neq j$ et $\alpha_i=\alpha_j=a$ donc $\mathrm{card}\,(U_i)=\mathrm{card}\,(U_j)=\mathrm{card}\,(U_i\cap U_j)$

ce qui impose $U_i = U_j = U_i \cap U_j$ (car $U_i \cap U_j \subset U_i$ et on a égalité des cardinaux donc $U_i = U_i \cap U_j$ par exemple) contrairement à l'hypothèse. Ainsi, on en déduit que $\mathrm{card}(E) \leqslant 1$ donc card $(E) \in \{0, 1\}$.

c. Méthode 1 : Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \in \mathrm{Ker}(A^tA)$, alors $A^tAX = 0$, on considère classiquement ${}^tXA^tAX$ et il vient ${}^tXA^tAX = 0 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big(\alpha_k x_k + \sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} a x_i\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big((\alpha_k - a)x_k + \sum\limits_{i=1}^{p} a x_i\Big)$. On obtient donc $a\Big(\sum\limits_{k=1}^{p} x_k\Big)^2 + \sum\limits_{k=1}^{p}(\alpha_k - a)x_k^2 = 0 \Longrightarrow \Big(\sum\limits_{k=1}^{p} x_k = 0 \text{ et } \forall k \in [\![1;p]\!],\ (\alpha_k - a)x_k^2 = 0\Big)$ car $\alpha_k - a \geqslant 0$ puisque $U_k \cap U_i \subset U_k$ si $i \neq k$. Or un seul des $\alpha_k - a$ peut être non nul donc tous les x_k sauf au plus un doivent être nuls et comme leur somme est nulle : ils sont tous nuls ! $A^tAX = 0 \Longrightarrow X = 0$ et l'endomorphisme canoniquement associé à A^tA est injectif donc est inversible puisqu'on est en dimension finie. En fait, on a établi que $(X, Y) \mapsto {}^tXA^tAY$ est un produit scalaire. On verra plus tard dans l'année que la matrice ${}^tAA$ s'appelle une matrice symétrique définie positive.

Méthode 2 : on peut aussi calculer $\det(A^tA)$ par multilinéarité sur les colonnes en décomposant chaque colonne C_j de A comme la colonne V_a ne contenant que des a et celle contenant des 0 partout sauf en ligne j où on a $\alpha_j - a$. On pose donc, pour $j \in [\![1;p]\!]$, $C_j = V_a + D_j$ ou ${}^tV_a = (a, \cdots, a)$ et ${}^tD_j = (0, \cdots, 0, \alpha_j - a, 0, \cdots, 0)$. On développe $\det(A^tA) = \det(D_1, \cdots, D_p) + \det(V_a, D_2, \cdots, D_p) + \cdots + \det(V_a, \cdots, V_a)$ (somme de 2^p déterminants) mais dès que dans un déterminant il y a 2 fois le vecteur V_a, celui-ci est nul par alternance. Or, en développant par rapport à la j-ième ligne ou en voyant cette matrice comme une matrice triangulaire par blocs avec un bloc en haut à gauche de taille $j \times j$ ou en effectuant les opérations $\forall i \neq j$, $L_i \longleftarrow L_i - L_j$, on a $\det(D_1, D_{j-1}, V_a, D_{j+1}, \cdots, D_p) = a \prod\limits_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{p}(\alpha_k - a)$ et on conclut $\det(A^tA) = \prod\limits_{k=1}^{p}(\alpha_k - a) + \sum\limits_{k=1}^{p} a \prod\limits_{j\neq k}(\alpha_j - a) > 0$ car $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $\alpha_k - a \geqslant 0$ et qu'il ne peut exister au plus qu'un entier k tel que $\alpha_k - a = 0$.

Méthode 3 : on peut résoudre le système linéaire ${}^tAAX = 0$ qui s'écrit $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $(\alpha_i - a)x_i + a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$. Puisqu'on a imposé $a \neq 0$, on a $s = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = -\dfrac{\alpha_i - a}{a}x_i$. Traitons deux cas :

- si $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\alpha_i > a$, alors $x_i = -\dfrac{as}{\alpha_i - a}$ sont de signe opposé à s. Mais comme $s = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, on a forcément $s = 0 = x_1 = \cdots = x_n$.
- s'il existe un seul $k \in [\![1;n]\!]$ tel que $\alpha_k = a$, on a $s = 0$ donc $\forall i \in [\![1;n]\!] \setminus \{k\}$, $x_i = -\dfrac{as}{\alpha_i - a} = 0$ donc $x_k = s = 0$ et on a aussi $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

On a prouvé dans les deux cas de la question **b.** que $X = 0$ si ${}^tAAX = 0$ donc $\mathrm{Ker}({}^tAA) = \{0\}$.

Quelle que soit la méthode, A^tA inversible donc $p = \mathrm{rang}\,(A^tA) \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \leqslant n$.

9.56 • Si $a_0, \cdots, a_n$ ne sont pas distincts deux à deux, par exemple si $a_0 = a_1$, le polynôme $P = \prod\limits_{k=1}^{n}(X - a_k)$ appartient à E et vérifie $\sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$ donc φ n'est pas un produit scalaire : il n'y a pas l'aspect défini.

• Si $a_0, \cdots, a_n$ sont distincts deux à deux, on vérifie facilement la symétrie, la bilinéarité et l'aspect positif. De plus, si $\sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$, on a $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $P(a_k) = 0$ donc P admet $n+1$ racines distinctes alors que $\deg(P) \leqslant n$, le cours nous confirme alors que $P = 0$. L'application proposée est alors bien un produit scalaire.

• Une base orthonormale de E pour ce produit scalaire est la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ des polynômes d'interpolation de LAGRANGE : $P_k = \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n} \dfrac{X - a_j}{a_k - a_j}$ car ces polynômes vérifient classiquement $P_k(a_j) = \delta_{j,k}$.

• F ainsi défini est bien un sous-espace vectoriel de E, c'en est même un hyperplan car $P \in F \Longleftrightarrow \varphi(P, 1) = 0$ donc F est le noyau d'une forme linéaire non nulle et $F = \text{Vect}(1)^\perp$ donc $F^\perp = \text{Vect}(1)$ (polynômes constants).

• D'après le cours, $d(X^n, F) = ||X^n - p_F(X^n)||$ où $p_F(X^n)$ est le projeté orthogonal de X^n sur F. Si $p_1(X^n)$ est le projeté orthogonal de X^n sur $F^\perp = \text{Vect}(1)$, on a $X^n = p_F(X^n) + p_1(X^n)$ et, ces deux derniers vecteurs étant orthogonaux, $||X^n - p_F(X^n)|| = ||p_1(X^n)||$. Or $p_1(X^n) = \dfrac{(X^n|1)}{||1||^2}1$ donc $d(X^n, F) = \dfrac{|(X^n|1)|}{||1||} = \dfrac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^n\right|}{\sqrt{n+1}}$.

9.57 La symétrie, la bilinéarité et la positivité de Φ (bien définie) sont claires. De plus, si $f \in E$ et $\Phi(f, f) = 0$, alors $f(0)^2 + \int_{-1}^{1} f'(t)^2 dt = 0$ donc $f(0) = 0$ et f' est nulle sur $[-1; 1]$ donc $f = 0$ car $[-1; 1]$ est un intervalle.

$F = \text{Vect}(X, X^2)$. Posons $Q = X^2 - \dfrac{(X|X^2)}{||X||^2}X$ qui est orthogonal par construction à X. Comme $(X|X^2) = 0$, $Q = X^2$. De plus $||X^2||^2 = 4\int_{-1}^{1} t^2 dt = \dfrac{8}{3}$: une base orthonormée de F est $\left(\dfrac{X}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{3}X^2}{2\sqrt{2}}\right)$.

9.58 **a.** Déjà $f : x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(x) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc l'intégrale $(P|Q)$ converge. La symétrie, la bilinéarité, la positivité sont claires. Si $(P|P) = 0$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$, $f : x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x^2}$ continue, positive et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$, on sait qu'alors $f = 0$ sur $\mathbb{R}$ donc P est nulle sur $\mathbb{R}$ ce qui fait une infinité de racines de P donc $P = 0$ dans $\mathbb{R}[X]$ et on a bien un produit scalaire.

b. Il suffit d'orthonormaliser la base canonique $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et de rendre les polynômes unitaires plutôt que normé, on a donc les formules de récurrence $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_k = X^k - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dfrac{(X^k|P_i)}{||P_i||^2}P_i$ qui assure l'orthogonalité.

c. Par récurrence, comme $P_0 = 1$ et $P_1 = X$ (car $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = 0$ par imparité). Si la parité de P_k est celle de k jusqu'au rang $n - 1 \geqslant 1$, alors par changement de variables $t = -x$ dans l'intégrale, on a $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $(P_n(X)|P_k(X)) = (P_n(-X)|P_k(-X)) = \pm(P_n(-X)|P_k(X)) = 0$. Si par exemple n est pair, $\dfrac{P_n(-X) + P_n(X)}{2}$ est aussi un polynôme unitaire de degré n qui est orthogonal à tous les $P_0, \cdots, P_{n-1}$, il est égal à P_n par l'unicité de la question **a.** : $P_n(-X) = P_n(X)$ donc P_n est pair. De même si n est impair. Par récurrence, si n est pair (resp. impair), P_n est pair (resp. impair).

d. Soit $\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$ les racines réelles d'ordre impair de P_n dans $\mathbb{R}_+^*$ et $Q = \prod\limits_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)$. Alors $(P|Q) > 0$ puisque toutes les racines réelles de PQ dans $\mathbb{R}_+^*$ sont d'ordre pairs donc il n'y a pas de changement de signe de PQ sur $\mathbb{R}_+$. Donc $P = Q$ et on en déduit que toutes les racines de P_n sont simples dans l'intérieur de $\mathbb{R}_+^*$.

9.59 **a.** La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont simples à vérifier. Ne reste que l'aspect défini.

Si les $a_0, \cdots, a_n$ ne sont pas distincts deux à deux, par exemple si $a_0 = a_1$, $P = \prod\limits_{k=1}^{n}(X - a_k) \in \mathbb{R}_n[X]$, est non nul et pourtant $(P|P) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$ ce qui est impossible : ce n'est pas un produit scalaire.

Par contre si les $a_0, \cdots, a_n$ sont distincts deux à deux, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $(P|P) = 0$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$ donc $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $P(a_k) = 0$ et P admet donc $n + 1$ racines distinctes donc $P = 0$.

$(P|Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ ssi les $a_0, \cdots, a_n$ sont distincts deux à deux.

b. Les polynômes d'interpolation de LAGRANGE : $(L_0, \cdots, L_n)$ avec $L_k = \prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} \left(\dfrac{X - a_i}{a_k - a_i}\right)$ et $L_k(a_i) = \delta_{i,k}$.

c. $\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \Longleftrightarrow (P|1) = 0$ donc $F = \text{Vect}(1)^{\perp}$ et on sait que $d(X^n, F) = \dfrac{|(X^n|1)|}{||1||} = \dfrac{\left|\sum_{k=0}^{n} a_k^n\right|}{\sqrt{n+1}}$.

9.60 **a.** Par le théorème spectral, $A = PD^tP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ $(0 \leqslant \lambda_1 \cdots \leqslant \lambda_n)$ et $P \in O(n)$.

Alors $\text{Tr }(AB) = \text{Tr }(PD^tPB) = \text{Tr }(DC)$ en posant $C = {}^tPBP$ qui est aussi symétrique (c'est clair) mais aussi positive car ${}^tX^tPBPX = {}^tYBY \geqslant 0$ avec $Y = PX$. Par conséquent $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $c_{k,k} = {}^tE_kCE_k \geqslant 0$.

Alors $\text{Tr }(AB) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_{k,k} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} c_{k,k}\Big)$ (tous les termes sont positifs).

b. On se rappelle que $(M|N) = \text{Tr }({}^tMN)$ définit un produit scalaire (canonique) sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, alors $||MN||^2 = \text{Tr }(t(MN)(MN)) = \text{Tr }({}^tN^tMMN) = \text{Tr }({}^tMMN^tN)$ et on applique **a.** aux matrices symétriques $A = {}^tMM$ et $B = N^tN$: $||MN||^2 \leqslant \text{Tr }({}^tMM)\text{Tr }(N^tN) = ||M||^2||N||^2$.
On passe à la racine et le tour est joué.

9.61 **a.** Classique en décomposant de manière unique $M = \dfrac{M + {}^tM}{2} + \dfrac{M - {}^tM}{2}$. On a même $\dim(S) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(A) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. De plus, l'énoncé définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $(M|N) = \text{Tr }({}^tMN)$, c'est même le produit scalaire canonique en ce sens que la base canonique est une base orthonormale pour ce produit scalaire. Si $(M, N) \in S \times A$, on a $(M|N) = \text{Tr }({}^tMN) = \text{Tr }(MN)$ et $(N|M) = \text{Tr }({}^tNM) = \text{Tr }(-NM) = -\text{Tr }(NM) = -\text{Tr }(MN)$. Ainsi $(M|N) = 0$ et on a bien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus^{\perp} A$.
b. Puisque $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (c_{i,j} - m_{i,j})^2 = ||C - M||^2$, on a $d = d(C, S)^2$ donc $d = ||C - p_S(C)||^2$ par théorème mais $C = \dfrac{C + {}^tC}{2} + \dfrac{C - {}^tC}{2}$ avec $\dfrac{C + {}^tC}{2} \in S$ et $\dfrac{C - {}^tC}{2} \in A$ donc $C - p_S(C) = \dfrac{C - {}^tC}{2}$.

Par conséquent : $d = \left|\left|\dfrac{C - {}^tC}{2}\right|\right|^2 = \dfrac{1}{4} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (c_{i,j} - c_{j,i})^2 = \dfrac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (c_{i,j} - c_{j,i})^2$.

9.62 **a.** Si cette famille n'était pas génératrice, il existerait $x \neq 0_E$ dans $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_n)^{\perp}$ et en lui appliquant la relation de l'énoncé, on aurait $||x||^2 = 0$ ce qui est impossible. Ainsi $(e_1, \cdots, e_n)$ est génératrice.
Soit un vecteur non nul $v_k \in \text{Vect}(e_i \mid i \neq k)^{\perp} = H_k$ (hyperplan de E). Alors en appliquant la relation à v_k, on trouve $||v_k||^2 = (e_k|v_k)^2$. Or en appliquant la relation à e_k, on a $||e_k||^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_k|e_i)^2 \geqslant ||e_k||^4$ donc $||e_k|| \leqslant 1$. On arrive néanmoins par Cauchy-Schwarz à $||v_k|| = |(e_k|v_k)| \leqslant ||e_k||\,||v_k||$ donc $||e_k|| = 1$ et le cas d'égalité nous montre que e_k et v_k sont colinéaires donc e_k est orthogonal à tous les autres vecteurs de la base. Comme ceci est vrai pour toute valeur de k, la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de E.
b. Comme avant la famille est génératrice et comme elle est supposée libre, c'est déjà une base de E qui est euclidien (car admettant une base finie). On conclut comme en **a.**.

9.63 **a.** M est par hypothèse la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de u_i dans $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, on sait que $\forall j \in [\![1;n]\!], u_j = \sum_{i=1}^{n} (u_j|e_i)e_i$ ce qui montre que $M = ((u_j|e_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Si on note ${}^tMM = (g_{i,j})$, la définition du produit matriciel montre que $g_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (e_k|u_i)(e_k|u_j)$ d'où $g_{i,j} = (u_i|u_j)$ car, à nouveau, $\mathcal{B}$ est orthonormale. Par conséquent, $G = {}^tMM$.
b. On en déduit que $\det(G) = \det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = \det(M)^2 \geqslant 0$. De plus, si $\mathcal{B}' = (u_1, \cdots, u_n)$ est une base, la matrice M est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ donc, d'après le cours, M est inversible et G aussi en tant que produit de deux matrices inversibles.
Par contre, si $\mathcal{B}'$ est liée, l'un de ses vecteurs (dont l'une des colonnes de M) s'écrit comme combinaison linéaire des autres donc M n'est pas inversible et G non plus car $\det(G) = 0^2 = 0$. On a bien l'équivalence.
c. Cette fois-ci, on généralise : $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille de E euclidien muni d'une base orthonormée

$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et on pose $G = \big((u_i|u_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

• Si $p > n$, alors $(u_1, \ldots, u_p)$ est forcément liée car cette famille de vecteurs a un cardinal strictement plus grand que la dimension de l'espace E et, avec les mêmes notations que dans la question **a.**, $G = {}^tMM$ avec $M = ((u_j|e_i))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ donc rang $(G) =$ rang $({}^tMM) \leqslant$ rang $(M) \leqslant \mathrm{Min}(p, n) = n$ donc G n'est pas inversible car rang $(G) < p$ d'où $\det(G) = 0$. On a bien réalisé : $\det(G) = 0 \Longleftrightarrow (u_1, \ldots, u_n)$ est liée

• Enfin, on en vient au cas général la $p < n$ et on pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$ qui est un espace euclidien (sous-espace d'un espace euclidien muni du produit scalaire induit).

$(\Longrightarrow)$ Si $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre, alors c'est une base de F, et on peut utiliser le résultat précédent car le nombre p de vecteurs est égal à la dimension p de l'espace F et la matrice de Gram de cette famille ne dépend pas de l'espace dans lequel on la considère (E ou F) : il est donc strictement positif d'après ce qui précède.
$(\Longleftarrow)$ Réciproquement, si $G = ((u_i|u_j))_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ et $\det(G) > 0$, comme $G = {}^tAA$ avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ qui contient en colonnes les coordonnées dans B de $u_1, \cdots, u_p$, rang $({}^tAA) = p$. Or rang $({}^tAA) \leqslant$ rang $(A) \leqslant p$ donc rang $(A) = p$ ce qui garantit la liberté de $(u_1, \cdots, u_p)$.

Au final, on a l'équivalence $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre si et seulement si $\det(G) > 0$ ou, ce qui est synonyme, l'autre équivalence $(u_1, \cdots, u_p)$ est liée si et seulement si $\det(G) = 0$.

9.64 On revient aux applications linéaires canoniquement associées et cela revient à montrer que si E, F, G sont des espaces de dimensions finies et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f \in \mathcal{L}(F, G)$, alors rang $(f \circ g) \leqslant \mathrm{Min}($rang (f), rang $(g))$. Ceci découle de Im $(f \circ g) \subset$ Im (f) et de $\mathrm{Ker}(f \circ g) \supset \mathrm{Ker}(g)$ avec la formule du rang : classique !
Soit X un vecteur colonne tel que $AX = 0$, alors $||AX||^2 = {}^tX{}^tAAX = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant m} a_{i,j}x_ix_j = 0$ or il vient :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} a_{i,j}x_ix_j = \sum_{i=1}^m b_ix_i^2 + a\sum_{i\neq j} x_ix_j = \sum_{i=1}^m (b_i - a)x_i^2 + a\sum_{i,j} x_ix_j = a\Big(\sum_{i=1}^m x_i\Big)^2 + \sum_{i=1}^m (b_i - a)x_i^2 = 0.$$

Ainsi, comme tout est positif : $\sum\limits_{i=1}^m x_i = 0$ et $\forall i \geqslant 2,\ x_i = 0$ car $b_i - a > 0$. On en déduit que $x_1 = \cdots = x_m = 0$ donc $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ donc A est inversible.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i \in B_j$ et $a_{i,j} = 0$ sinon : ${}^tAA = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et $b_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j} = a$ si $i \neq j$ et $b_{i,i} =$ card (B_i). D'après ce qui précède, comme il existe au plus un indice i tel que $b_{i,i} = a$ (sinon $b_{i,i} = b_{j,j} = a$ avec $i \neq j$ implique $F_i = F_j$: NON) la matrice ${}^tAA$ est inversible donc $m =$ rang $({}^tAA) \leqslant$ rang $(A) \leqslant \mathrm{Min}(n, m)$ et on a bien $m \leqslant n$.

9.65 La vérification que $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire est classique. Pour l'aspect défini, $(P|P) = 0 \Longleftrightarrow \int_{-1}^1 P^2(t)dt = 0$ donc P^2 (continue et positive) est nulle sur $[-1; 1]$, le polynôme P possède donc une infinité de racines : il est donc nul. De plus, ϕ est clairement linéaire et $\phi^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]}$ car $\phi^2(P)(X) = P(-(-X)) = P(X) = P$: ϕ est donc une symétrie de $\mathbb{R}[X]$. Pour montrer qu'elle est orthogonale, il suffit de montrer qu'elle est symétrique ou de montrer que $\mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{id}) \perp \mathrm{Ker}(\phi + \mathrm{id})$.
• $E_1(\phi) = \mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{id}) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X) = P(-X)\} = \mathbb{R}[X^2]$ est le sous-espace des polynômes pairs et on a aussi $E_{-1}(\phi) = \mathrm{Ker}(\phi + \mathrm{id}) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X) = -P(-X)\} = X\mathbb{R}[X^2]$ est le sous-espace des polynômes impairs. Soit P pair et Q impair, alors PQ est impair et $\int_{-1}^1 PQ = 0$ en effectuant le changement de variable $u = -t$ ou géométriquement. Ainsi $\mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{id}) \perp \mathrm{Ker}(\phi + \mathrm{id})$ et, comme on a déjà la somme $\mathbb{R}[X] = \mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{id}) + \mathrm{Ker}(\phi + \mathrm{id})$: $\mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{id}) = (\mathrm{Ker}(\phi + \mathrm{id}))^\perp$ et la projection est bien orthogonale.
• Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $(P|\phi(Q)) = \int_{-1}^1 P(t)Q(-t)dt = \int_{-1}^1 P(-u)Q(u)du = (\phi(P)|Q)$ avec le changement de

variable $u = -t$ donc ϕ est symétrique et on a vu dans le cours que cela signifiait que ϕ était orthogonale (c'est suffisant comme méthode mais ça ne donne pas les éléments caractéristiques de la symétrie).

9.66 Même si ce n'est pas explicitement demandé, il faut vérifier que $(f,g) \mapsto < f, g >$ est un produit scalaire sur $E = C^2([0;1], \mathbb{R})$. Pour $(f,g) \in E^2$, $fg + f'g'$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc $< f, g >= \int_0^1 (fg + f'g')$ existe. De plus, pour $(f,g,h) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de la dérivation et de l'intégrale, on a la relation $< f, g+\lambda h >= \int_0^1 (f(g+\lambda h)+f'(g'+\lambda h')) = \int_0^1 (fg+f'g')+\lambda \int_0^1 (fh+f'h') =< f, g > +\lambda < f, h >$ donc $< .,. >$ est linéaire en la seconde variable. Comme le produit des réels est commutatif, la fonction $< .,. >$ est aussi symétrique donc bilinéaire. De plus, si $f \in E$, alors $< f, f >= \int_0^1 (f^2 + f'^2) \geqslant 0$ car $0 < 1$ et $f^2 + f'^2 \geqslant 0$. Enfin, si $< f, f >= 0$, comme la fonction $f^2 + f'^2$ est une fonction positive et continue, on déduit que $f^2 + f'^2 = 0$ du fait que $\int_0^1 (f^2 + f'^2) = 0$. Par conséquent, il vient $f^2 = 0$ donc $f = 0$.

Au final, $< .,. >$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, en résumé un produit scalaire sur E.

a. D'après le cours sur les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, si $f_1 : x \mapsto e^x$ et $f_2 : x \mapsto e^{-x}$, on a $A = \text{Vect}(f_1, f_2)$ car l'équation caractéristique associée à cette équation est $z^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont ± 1. Mais $\text{ch} = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$ et $\text{sh} = \dfrac{f_1 - f_2}{2}$ d'où $f_1 = \text{ch} + \text{sh}$ et $f_2 = \text{ch} - \text{sh}$ et on a aussi $A = \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh})$. Comme la famille (ch, sh) est clairement libre, c'est une base de A.

b. Soit $f \in A$ et $g \in E$ alors $< f, g >= \int_0^1 fg + \int_0^1 f'g' = \int_0^1 fg + [f'g]_0^1 - \int_0^1 f''g$ par une intégration par parties facile à justifier donc $< f, g >= \int_0^1 fg + [f'g]_0^1 - \int_0^1 fg = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$ car $f \in A$ donc $f'' = f$. Comme $(\text{sh}, \text{ch}) \in A^2$ et que $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$, la formule précédente nous permet de déterminer les valeurs de $< \text{sh}, \text{ch} >= \text{ch}^2(1) - 1 = \text{sh}^2(1)$ et $||\text{ch}||^2 = ||\text{sh}||^2 = \text{sh}(1)\text{ch}(1) = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{4} = a^2$ avec $a > 0$.

c. La formule de **b.** montre que si $f \in A$ et $g \in B \subset E$, $< f, g >= f'(1)g(1) - f'(0)g(0) = 0$ car $g(0) = g(1) = 0$.

d. À nouveau, si $f \in H$, comme $\text{sh} \in A$: $< f, \text{sh} >=< \text{sh}, f >= \text{sh}'(1)f(1) - \text{sh}'(0)f(0) = \text{ch}(1) - \text{ch}(1) = 0$.
De même, si $f \in H$, comme $\text{ch} \in A$: $< f, \text{ch} >=< \text{ch}, f >= \text{ch}'(1)f(1) - \text{ch}'(0)f(0) = \text{sh}(1)$.

e. Le projeté orthogonal de $f \in H$ sur $A = \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh})$ s'écrit $f_0 = \alpha\text{ch} + \beta\text{sh}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Il est caractérisé par les orthogonalités $< f - f_0, \text{ch} >=< f - f_0, \text{sh} >= 0$ ce qui donne, avec les questions **b.** et **e.**, les équations $< f - f_0, \text{sh} >= 0 = -\alpha < \text{ch}, \text{sh} > -\beta < \text{sh}, \text{sh} >= -\alpha\text{sh}^2(1) - \beta\text{sh}(1)\text{ch}(1)$ donc $\beta = -\alpha\text{th}(1)$ et $< f - f_0, \text{ch} >= 0 = \text{sh}(1) - \alpha < \text{ch}, \text{ch} > -\beta < \text{sh}, \text{ch} >= \text{sh}(1) - \alpha\text{sh}(1)\text{ch}(1) - \beta\text{sh}(1)^2$. Après calculs, on trouve $\alpha = \text{ch}(1)$ et $\beta = -\text{sh}(1)$ donc $f_0(t) = \text{ch}(1)\text{ch}(t) - \text{sh}(1)\text{sh}(t) = \text{ch}(t-1)$.

On constate que ce projeté orthogonal de f sur A ne dépend pas de f. C'est normal car H est un sous-espace affine orthogonal à A : en effet, on sait déjà d'après **c.** que $A \perp B$ et, si $f \in E$, alors à l'équivalence suivante $f \in H \iff (f(1) = 1,\ f(0) = \text{ch}(1)) \iff (f(1) = f_0(1),\ f(0) = f_0(0)) \iff ((f - f_0)(0) = (f - f_0)(1) = 0)$ qui prouve que $f \in H \iff f - f_0 \in B$ donc H est un espace affine de direction B passant par $f_0 \in H \cap A$, ce qu'on écrit $H = f_0 + B$. Si on note p la projection orthogonale sur A, ce qu'on peut définir d'après le cours car A est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors $p(H) = p(f_0) + p(B) = p(f_0) = f_0$ car $B \subset A^{\perp}$ et $f_0 \in A$. C'est comme si on projetait une droite verticale sur le plan $z = 0$, ça donne un point !

f. Pour $f \in H$, en écrivant $f = f - f_0 + f_0$, comme $f - f_0 \in B$ et $f_0 \in A$, on a $< f - f_0, f_0 >= 0$ donc, par Pythagore : $||f||^2 = \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right) dt = ||f - f_0||^2 + ||f_0||^2 \geqslant ||f_0||^2$ avec égalité uniquement si $f = f_0$.
Ainsi : $M = \underset{f \in H}{\text{Inf}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right) dt = \underset{f \in H}{\text{Min}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right) dt = ||f_0||^2 = \int_0^1 (\text{ch}^2(t-1) + \text{sh}^2(t-1))dt$.

Or $\text{ch}^2(t-1)+\text{sh}^2(t-1)=\text{ch}(2(t-1))$ donc $M=\int_0^1 \text{ch}(2(t-1))dt=\Big[\frac{\text{sh}(2(t-1))}{2}\Big]_0^1=\frac{\text{sh}(2)}{2}$.

9.67 **a.** Supposons $(x_1,\ldots,x_n)$ libre et soit $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k y_k=0_E$, alors par hypothèse :

$$||\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k||^2=\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\Big|\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j\Big)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j(y_i|y_j)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j(x_i|x_j)=||\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k||^2=0.$$

Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k x_k=0_E$ d'où $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$ par liberté de $(x_1,\cdots,x_n)$. Alors $(y_1,\cdots,y_n)$ est aussi libre.

Par symétrie entre les deux familles : $(x_1,\ldots,x_n)$ est libre si et seulement si $(y_1,\ldots,y_n)$ est libre.

b. Par exemple si $\dim(F)=r$, quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que $(x_1,\cdots,x_r)$ est une base de F (et donc que les vecteurs $x_{r+1},\cdots,x_n$ sont engendrés par $x_1,\cdots,x_r$). Alors on montre comme précédemment que $(y_1,\cdots,y_r)$ est libre donc que le sous-espace $G=\text{Vect}(y_1,\cdots,y_n)$ est au moins de dimension r car il existe dans G une famille libre de cardinal r.

Ainsi, $\dim(G)\geqslant\dim(F)$. Par symétrie, $\dim(F)\geqslant\dim(G)$ et on a enfin $\dim(F)=\dim(G)$.

9.68 La bilinéarité de $(.|.)$ provient de la linéarité des dérivées k-ièmes d'un polynôme, la symétrie du fait que le produit est commutatif dans $\mathbb{R}$. De plus, si $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $(P|P)=\sum\limits_{k=0}^n P^{(k)}(1)^2\geqslant 0$ et l'équivalence $(P|P)=0\iff\forall k\in[\![0;n]\!],\ P^{(k)}(1)=0\iff P=\sum\limits_{k=0}^n\frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k=0$ (avec la formule de Taylor et car une somme de quantités positives est nulle si et seulement si elles sont toutes nulles) donc $(.|.)$ est aussi défini positif. Par conséquent, $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
$\varphi: P\mapsto P(1)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et elle est non nulle car $\varphi(1)=1$. Ainsi, comme par construction $E=\text{Ker}(\varphi)$, E est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ donc un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\dim(E)=n+1-1=n$.
Si $P\in E$, on a $P=\sum\limits_{k=1}^n\frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k$ (toujours d'après la formule de Taylor car $P^{(0)}(1)=P(1)=0$) donc $E=\text{Vect}(X-1,(X-1)^2,\cdots,(X-1)^n)$. Mais on vérifie sans peine que $\mathcal{B}=\Big(1,X-1,\frac{(X-1)^2}{2},\cdots,\frac{(X-1)^n}{n!}\Big)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $(.|.)$. Ainsi, $E=\text{Vect}(1)^\perp$.
Le cours nous apprend alors que $d(1,E)=\frac{|(1|1)|}{||1||}=1$ (car $\mathcal{B}$ est une bon).

9.69 On vérifie facilement (classiquement) la symétrie, la bilinéarité et l'aspect positif de $(.|.)$. De plus, si $\sum\limits_{k=0}^n P(a_k)^2=0$, on a $\forall k\in[\![1;n]\!],\ P(a_k)=0$ (car si une somme nulle de quantités positives est nulle, toutes les quantités le sont) donc P admet $n+1$ racines distinctes alors que $\deg(P)\leqslant n$, le cours nous confirme alors que $P=0$. L'application proposée est alors bien un produit scalaire.

Une base orthonormale de E pour ce produit scalaire est la famille $(P_0,\cdots,P_n)$ des polynômes d'interpolation de Lagrange : $P_k=\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^n\frac{X-a_j}{a_k-a_j}$ car ces polynômes vérifient classiquement $P_k(a_j)=\delta_{j,k}$.

F ainsi défini est bien un sous-espace vectoriel de E, c'en est même un hyperplan car $P\in F\iff(P|1)=0$ donc F est le noyau d'une forme linéaire non nulle $(P\mapsto(P|1))$ et $F=\text{Vect}(1)^\perp$ donc $F^\perp=\text{Vect}(1)=\mathbb{R}_0[X]$.

D'après le cours, $d(X^n,F)=||X^n-p_F(X^n)||$ où $p_F(X^n)$ est le projeté orthogonal de X^n sur F. Si $p_1(X^n)$ est le projeté orthogonal de X^n sur $F^\perp=\text{Vect}(1)$, on a $X^n=p_F(X^n)+p_1(X^n)$ et, ces deux derniers vecteurs étant orthogonaux, $||X^n-p_F(X^n)||=||p_1(X^n)||$. Or $p_1(X^n)=\frac{(X^n|1)}{||1||^2}1$ donc $d(X^n,F)=\frac{|(X^n|1)|}{||1||}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big|\sum\limits_{k=0}^n a_k^n\Big|$.

9.70 On a $P = \text{Vect}(n)^\perp$ en posant $n = (1, -2, 1)$ (bien entendu on a pris le produit scalaire canonique pour munir $\mathbb{R}^3$ d'une structure d'espace euclidien). En notant p cette projection orthogonale, $\forall v \in \mathbb{R}^3,\ p(v) = v - \dfrac{(v|n)}{||n||^2}n$ donc, si $v = (x, y, z)$, on a $p(x, y, z) = (x, y, z) - \dfrac{x - 2y + z}{6}(1, -2, 1) = \dfrac{1}{6}(5x + 2y - z, 2x + 2y + 2z, -x + 2y + 5z)$.

Ainsi, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(p) = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

9.71 **a.** Si $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, la fonction $t \mapsto e^{-t}P(t)Q(t)$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissance comparée, on a $e^{-t}P(t)Q(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ donc l'intégrale $(P|Q)$ converge. La symétrie, la bilinéarité et la positivité se montrent classiquement. Si $P \in E$ vérifie $(P|P) = 0$, alors $(P|P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)^2 dt = 0 \Longrightarrow \forall t \geqslant 0,\ P(t) = 0$ car $t \mapsto e^{-t}P(t)^2$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. P admet donc une infinité de racines, on en déduit que $P = 0$ donc que $(.|.)$ est bien un produit scalaire sur E.

b. Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, en notant $P = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k X^k$, on a $f(x_1, \cdots, x_n) = ||1 - P||^2 = d(1, P)^2$. En notant $H = X\,\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'hyperplan de E constitué des polynômes de valuation supérieure ou égale à 1, d'après le cours f est minimale en $P = p_H(1)$ où p_H est la projection orthogonale sur H : $\underset{\mathbb{R}^n}{\text{Min}}(f) = d(1, H)^2 = ||p_H(1) - 1||^2$.

c. Soit $k \in [\![1; n]\!]$, $(X^k|1 - P) = 0$ car $P = p_H(1)$ et $H = \text{Vect}(X, \cdots, X^n)$. Par récurrence ou parce qu'on connaît bien la fonction Γ d'Euler, on a $\forall j \in [\![1; n]\!]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{j+k}e^{-t}dt = \Gamma(j + k + 1) = (j + k)!$. Ainsi, en développant $(X^k|1) - (X^k|P) = 0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt - \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j t^{j+k}e^{-t}dt$, on obtient $k! - \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(j + k)! = 0$.

On divise par $k!$ et on a $1 - \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \dfrac{(j + k)!}{k!} = 0 = 1 - \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \prod\limits_{i=1}^{j}(k + i) = Q(k) = 0$.

d. Ainsi $m = ||1 - p_H(1)||^2 = (1|1 - p_H(1))$ car $p_H(1) \perp (1 - p_H(1))$ donc $m = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k k! = Q(0)$. Or $Q(-1) = 1$ assez clairement donc, comme Q est de degré inférieur ou égal à n, on a $Q = \alpha \prod\limits_{k=1}^{n}(X - k)$ et on trouve α avec la valeur en -1 d'où $Q = \dfrac{(-1)^n}{(n + 1)!}\prod\limits_{k=1}^{n}(X - k)$. Alors $m = Q(0) = \dfrac{1}{n + 1}$.

9.72 • Si $a_0, \cdots, a_n$ ne sont pas distincts deux à deux, par exemple si $a_0 = a_1$, le polynôme $P = \prod\limits_{k=1}^{n}(X - a_k)$ appartient à E et vérifie $\sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$ donc φ n'est pas un produit scalaire : il n'y a pas l'aspect défini.

• Si $a_0, \cdots, a_n$ sont distincts deux à deux, on vérifie facilement la symétrie, la bilinéarité et l'aspect positif. De plus, si $\sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$, on a $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $P(a_k) = 0$ donc P admet $n + 1$ racines distinctes alors que $\deg(P) \leqslant n$, le cours nous confirme alors que $P = 0$. L'application proposée est alors bien un produit scalaire.

• Une base orthonormale de E pour ce produit scalaire est la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ des polynômes d'interpolation de Lagrange : $P_k = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \dfrac{X - a_j}{a_k - a_j}$ car ces polynômes vérifient classiquement $P_k(a_j) = \delta_{j,k}$.

• F ainsi défini est bien un sous-espace vectoriel de E, c'en est même un hyperplan car $P \in F \Longleftrightarrow \varphi(P, 1) = 0$ donc F est le noyau d'une forme linéaire non nulle et $F = \text{Vect}(1)^\perp$ donc $F^\perp = \text{Vect}(1)$ (polynômes constants).

• D'après le cours, $d(X^n, F) = ||X^n - p_F(X^n)||$ où $p_F(X^n)$ est le projeté orthogonal de X^n sur F. Si $p_1(X^n)$ est le projeté orthogonal de X^n sur $F^\perp = \text{Vect}(1)$, on a $X^n = p_F(X^n) + p_1(X^n)$ et, ces deux derniers vecteurs étant orthogonaux, $||X^n - p_F(X^n)|| = ||p_1(X^n)||$. Or $p_1(X^n) = \dfrac{(X^n|1)}{||1||^2}1$ donc $d(X^n, F) = \dfrac{|(X^n|1)|}{||1||} = \dfrac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^n\right|}{\sqrt{n+1}}$.