TD 15 : ESPACES PRÉHILBERTIENS

PSI 1 2024-2025 **vendredi 17 janvier 2025**

15.1 <u>*OdlT 2013/2014 Centrale PSI planche 120II*</u>

Soit $U_1, \cdots, U_p$ des parties non vides et 2 à 2 distinctes de $[\![1;n]\!]$ telles que $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $\text{card}\,(U_i \cap U_j) = a$.
On définit $\alpha_k = \text{card}\,(U_k)$ pour $k \in [\![1;p]\!]$ et la matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ par $a_{i,j} = 1$ si $j \in U_i$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

a. Calculer $A\,{}^tA$ en fonction de a et α_k.
b. Que peut-on dire du cardinal de $E = \{k \in [\![1;p]\!] \mid a = \alpha_k\}$?
c. En déduire que $A\,{}^tA$ est inversible. Montrer que $p \leqslant n$.

15.2 <u>*OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 212II abordable dès la 1ère année*</u>

On munit $E = C^2([0;1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $< f, g >= \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,dt$.

a. Montrer que (ch, sh) est une base de $A = \{y \in E \mid y'' = y\}$.
b. Montrer que $\forall f \in A,\ \forall g \in E,\ < f, g >= f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$. Calculer $< \text{sh}, \text{ch} >$, $||\text{ch}||^2$ et $||\text{sh}||^2$.
c. Montrer que si $f \in A$ et $g \in B = \{y \in E \mid y(1) = y(0) = 0\}$, alors $< f, g >= 0$.
d. Pour $f \in H = \{y \in E \mid y(1) = 1,\ y(0) = \text{ch}\,1\}$, calculer $< f, \text{sh} >$ et $< f, \text{ch} >$.
e. Déterminer les coordonnées dans (sh, ch) du projeté orthogonal de $f \in H$ sur A ?
f. En déduire $M = \displaystyle\mathop{\text{Inf}}_{f \in H} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right) dt$.

15.3 <u>*OdlT 2016/2017 EIVP PSI planche 245II abordable dès la 1ère année*</u>

Dans un espace E euclidien de dimension n, soit deux familles $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de vecteurs de E et $F = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ et $G = \text{Vect}(y_1, \ldots, y_n)$. On suppose que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \big(x_i|x_j\big) = (y_i|y_j)$.

a. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si et seulement si $(y_1, \ldots, y_n)$ est libre.
b. Montrer que F et G sont de même dimension.

15.4 <u>*Mines PSI 2018*</u> Lucie Jandet II

a. Montrer que $\theta : (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \text{Tr}\,({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b. Montrer que $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}\,(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner $\dim(H)$.
c. Calculer $d(J, H)$ si $J = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

15.5 <u>*Mines PSI 2018*</u> Charlotte Nivelle II

Soit E un espace euclidien, un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leqslant \dim(E)$ et $(v_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille de vecteurs de E.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in E,\ ||x||^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} (x|v_k)^2$ (ii) $\forall x \in E,\ x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} (x|v_k)v_k$ (iii) $(v_1, \cdots, v_p)$ est une b.o.n. de E

15.6 <u>*Centrale Maths1 PSI 2019*</u> Mathis Chénet

a. Soit E un espace préhilbertien réel. Rappeler l'inégalité de Bessel.
Soit a et b deux réels tels que $a < b$, $E = C^0([a;b], \mathbb{R})$ et $K : [a;b]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Pour $f \in E$, on définit $T(f) = g : [a;b] \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in [a;b],\ g(x) = \displaystyle\int_a^b K(x,y)f(y)dy$.

b. Montrer que $\varphi : (u, v) \mapsto \displaystyle\int_a^b u(t)v(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.
c. Montrer que T est un endomorphisme de E.
Prenons $\lambda \in \text{Sp}(T)$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille orthonormée de $E_\lambda(T)$.
d. Montrer que $\forall x \in [a;b],\ \lambda^2 \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (f_i(x))^2 \leqslant \int_a^b K(x,y)^2 dy$.

15.7 *Centrale Maths1 PSI 2021* Paul Jaïs

Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = e^{-x^2}$ et $(.|.)$ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}\,dx$.

a. Montrer que Φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier n, il existe un polynôme réel P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi^{(n)}(x) = P_n(x)\Phi(x)$. Quel est le degré de P_n ?
b. Montrer que $(.|.)$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
c. Montrer que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.
d. Montrer que P_n n'admet que des racines réelles simples pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

15.8 *Mines PSI 2021* Robin De Truchis I

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale p sur le plan $P : x+y+z = 0$.

15.9 *Centrale Maths1 PSI 2023* Maxence Prieur On pose $< P, Q >= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$.

a. Montrer que $< ., . >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
b. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\big((X-1)^k\big)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
c. Déterminer $(\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

15.10 *Centrale Maths1 PSI 2023* Marie-Lys Ruzic

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et le vecteur $b = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ associé à B. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, on lui associe canoniquement le vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
On définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pas $f(x) = ||u(x) - b||^2$.

a. L'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet-elle une solution ?
b. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$.
c. Ce minimum est-il atteint en un unique point de $\mathbb{R}^3$?
d. Montrer l'équivalence entre (i) : $u(x) - b \in (\mathrm{Im}\,(u))^\perp$ et (ii) : $A^TAX = A^TB$.
e. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f admette son minimum en $x \in \mathbb{R}^3$.

15.11 *CCP PSI 2019 et CCINP PSI 2023* Perrine Hoffmann II et Paul-Antoine Baury-Carpentier I

Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\,(A^TB)$ et $\Sigma = \left\{M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

a. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b. Montrer que Σ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Exhiber une base orthonormale de $\Sigma^\perp$.
c. Trouver la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $\Sigma^\perp$. Et celle de M à Σ ?

15.12 *CCP PSI 2018 et CCINP PSI 2023* Benoit Souillard I et Rémi Darrieumerle II

a. Calculer $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$ en distinguant selon la parité de n. On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.
b. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
c. Déterminer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

15.13 *CCINP PSI 2023* Marius Desvalois II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(\,.\,|\,.\,) : \mathbb{R}_n[X]^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(P|Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k$ si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$.

a. Montrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
b. Calculer $d(1, H)$ où $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.