CHAPITRE 12
ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

⊙ Après une première étude des espaces préhilbertiens dans lesquels le produit scalaire permettait d'avoir certaines propriétés des familles de vecteurs (familles orthogonales, bases orthonormées...) et des sous-espaces (projections orthogonales sur des sous-espaces de dimension finie, distance entre un sous-espace de dimension finie et un vecteur,...), on va imposer la dimension finie pour avoir des espaces euclidiens et se focaliser sur l'étude des endomorphismes de ces espaces, spécifiquement ceux qui permettent d'avoir des invariants.

Dans un premier temps, on va étudier les endomorphismes qui conservent la norme (ou la distance) et donc appelés isométries. Ce sont des opérations sur les objets de l'espace (l'étude affine dont on a besoin dans le monde réel est cachée derrière l'aspect vectoriel) qui garantissent leur déplacement et leur non-déformation (translation, rotation, vissage, réflexions). On en fera une étude plus détaillée pour l'application en physique et en sciences de l'ingénieur dans le plan et dans l'espace donc en dimensions 2 et 3.

Dans une seconde partie, on traitera des endomorphismes qui vérifient une propriété de symétrie des produits scalaires : $\forall (x, y) \in E^2,\ \big(u(x)|y\big) = \big(x|u(y)\big)$. Ces endomorphismes dits symétriques sont notamment utiles aux physiciens à travers les matrices d'inertie (tenseurs d'inertie) d'un solide, la matrice de Lorentz associée à la transformation du même nom en relativité, les états en mécanique quantique, etc...

Le théorème spectral, dans ces contextes, précise la réduction de ces endomorphismes et permet de montrer les relations entre les axes principaux d'inertie d'un solide, de "visualiser" le cône de lumière en relativité, de déterminer les opérateurs décrivant les atomes et les molécules, etc...

TABLE DES MATIÈRES

PROGRAMME

Cette section vise les objectifs suivants :

- *étudier les isométries vectorielles et matrices orthogonales, et les décrire en dimension deux et trois en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *approfondir la thématique de réduction des endomorphismes dans le cadre euclidien en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral ;*
- *introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, qui trouvera notamment son application au calcul différentiel d'ordre 2.*

La notion d'adjoint est hors programme.

1 : Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Contenus	Capacités & Commentaires
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.	Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions.
Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	

2 : Matrices orthogonales

Contenus	Capacités & Commentaires
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^T A = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie "automorphisme orthogonal", tout en lui préférant celle d'"isométrie vectorielle".
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation. Bases orthonormées directes.	

3 : Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base orthonormée directe : produit mixte.	Notations $[u, v]$, $[u, v, w]$. Interprétation géométrique comme aire ou volume.
Produit vectoriel. Calcul dans une base orthonormée directe.	
Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien orienté de dimension 3.	

4 : Isométries vectorielles d'un plan euclidien

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Description des matrices de $O_2(\mathbb{R})$, de $SO_2(\mathbb{R})$.	Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$.
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	

5 : Isométries d'un espace euclidien de dimension 3

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Description des matrices de $SO_3(\mathbb{R})$.	
Rotation vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 3.	Axe et mesure de l'angle d'une rotation.

6 : Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien.	Notation $S(E)$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie “endomorphisme symétrique”, tout en lui préférant celle d'“endomorphisme autoadjoint”.
Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.	La démonstration n'est pas exigible. Forme matricielle du théorème spectral.
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.	Caractérisation spectrale. Notations $S^+(E)$, $S^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $S_n^+(\mathbb{R})$, $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

⊙ E est ici un espace euclidien, le produit scalaire est noté $(\,.\,|\,.\,)$ et la norme euclidienne associée $||\,.\,||$.

PARTIE 12.1 : ISOMÉTRIES VECTORIELLES

12.1.1 : Automorphismes orthogonaux

DÉFINITION 12.1 :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$*, on dit que* u *est une* **isométrie vectorielle** *de* E *ou un* **automorphisme orthogonal** *de* E *si* u *conserve la norme, c'est-à-dire si* $\forall x \in E,\ ||u(x)|| = ||x||$.
Soit $O(E)$ *l'ensemble des automorphismes orthogonaux de* E*,* $O(E)$ *est appelé le* **groupe orthogonal** *de* E.

EXEMPLE 12.1 *:* Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u(x,y,z) = \left(\dfrac{z-x}{\sqrt{2}}, y, \dfrac{x+z}{\sqrt{2}}\right)$.
Vérifier que $u \in O(\mathbb{R}^3)$. Déterminer u^2. Que déduire sur u ?

THÉORÈME DE CARACTÉRISATION DES ISOMÉTRIES 12.1 :
Soit u un endomorphisme de E, les propositions suivantes sont équivalentes :

- **(i)** u **est une isométrie vectorielle.**
- **(ii)** u **conserve le produit scalaire :** $\forall (x,y) \in E^2,\ \big(u(x)|u(y)\big) = (x|y)$.
- **(iii)** u **transforme toute base orthonormale de** E **en une base orthonormale de** E.
- **(iv)** u **transforme une base orthonormale de** E **en une base orthonormale de** E.

REMARQUE 12.1 : Si E *est de dimension* 1 *:* $O(E) = \{-\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_E\}$.

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE DE $O(E)$ 12.2 :
$O(E)$ **est un sous-groupe de** $GL(E)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 12.2 : Si $u \in O(E)$ *et* F *stable par* u*, alors* $u_F \in O(F)$.

PROPOSITION SUR LA STABILITÉ DE L'ORTHOGONAL PAR UNE ISOMÉTRIE 12.3 :
Soit $u \in O(E)$**,** F **un sous-espace vectoriel de** E **:** $\big(F$ **est stable par** $u\big) \Longleftrightarrow \big(F^\perp$ **est stable par** $u\big)$.

DÉFINITION 12.2 :
Soit F *un sous-espace de* E*, la* **symétrie orthogonale par rapport à** F *est la symétrie* s_F *par rapport à* F *parallèlement à* $F^\perp$*. Une* **réflexion** *est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de* E.

REMARQUE 12.3 : • $\big(s$ *est une symétrie orthogonale*$\big) \Longleftrightarrow \big(s^2 = \mathrm{id}_E$ *et* $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \perp \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)\big)$.
- *Si* p_F *est la projection orthogonale sur* F *alors* $s_F = 2p_F - \mathrm{id}_E$.
- *Si* $H = \big(\mathrm{Vect}(e)\big)^\perp$ *est un hyperplan de* E *alors* $s_H : x \mapsto x - 2\dfrac{(e|x)}{||e||^2}\, e$ *(réflexion d'hyperplan* H*).*

PROPOSITION DE CARACTÉRISATION DES SYMÉTRIES ORTHOGONALES 12.4 :
Si s est une symétrie de E : $\big(s$ **est orthogonale**$\big) \Longleftrightarrow \big(s$ **est une isométrie**$\big)$.

REMARQUE 12.4 : Une projection orthogonale, autre que id_E*, n'est pas un automorphisme orthogonal.*

12.1.2 : Matrices orthogonales

DÉFINITION 12.3 :
Soit $n \geqslant 1$*, une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est appelée une* **matrice orthogonale** *si* $A^T A = I_n$.

REMARQUE 12.5 : En notant $C_1, \cdots, C_n$ *les colonnes de* A*, qui forment une famille de* n *vecteurs de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *(ou* $\mathbb{R}^n$*), le calcul des matrices de* GRAM *montre que* $A^T A = \big((C_i|C_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$*. Ainsi,* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est orthogonale si et seulement si* $(C_1, \cdots, C_n)$ *est une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLE 12.2 : Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

Quel est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A ?

REMARQUE 12.6 : Soit E *un espace euclidien et* $\mathcal{B}$ *une base orthonormale,* $\mathcal{B}'$ *une base quelconque, on note* P *la matrice de passage entre* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$*. Alors* P *est orthogonale ssi* $\mathcal{B}'$ *est une base orthonormale.*

PROPOSITION DE CARACTÉRISATION DES MATRICES ORTHOGONALES 12.5 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ **et** $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**, les propriétés suivantes sont équivalentes :**

- **(i)** $M^T M = I_n$ **(**M **est orthogonale).**
- **(ii)** $M M^T = I_n$**.**
- **(iii)** M **est inversible et** $M^{-1} = M^T$**.**
- **(iv) Les vecteurs lignes de** M **forment une base orthonormée de** $\mathbb{R}^n$ **euclidien canonique.**
- **(v) Les vecteurs colonnes de** M **forment une base orthonormée de** $\mathbb{R}^n$ **eucl. canon..**

DÉFINITION 12.4 :
On note $O_n(\mathbb{R})$ *ou* $O(n)$ *l'ensemble des matrices orthogonales de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*.*
Cet ensemble $O_n(\mathbb{R})$ *est appelé le* **groupe orthogonal d'ordre** n.

EXEMPLE 12.3 : La matrice de HADAMARD $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $O_4(\mathbb{R})$.

THÉORÈME DE CARACTÉRISATION D'UNE ISOMÉTRIE PAR SA MATRICE DANS UNE BASE ORTHONORMALE (ÉNORME) 12.6 :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ **et** $\mathcal{B}$ **une base orthonormée de** E**, alors :** $u \in O(E) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$**.**

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE DE $O_n(\mathbb{R})$ **12.7 :**
$O_n(\mathbb{R})$ **est un sous-groupe de** $GL_n(\mathbb{R})$**.**
De plus, si $M \in O_n(\mathbb{R})$ **alors** $\det(M) = \pm 1$**.**

DÉFINITION 12.5 :
Soit $SO_n(\mathbb{R}) = \big\{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\big\}$ *(ou* $SO(n)$*) le* **groupe spécial orthogonal d'ordre** n.

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE DE $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ 12.8 :
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ **est un sous-groupe de** $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ **(donc de** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$**).**

REMARQUE 12.7 :

- *(HP) Avec les hypothèses du théorème, l'application* $\tilde{\theta} : \mathrm{O}(E) \to \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *définie par* $\tilde{\theta}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *est un isomorphisme de groupes qui est la restriction de* $\theta : \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *qui en était déjà un.*
- *Soit* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases orthonormées d'un espace euclidien* E, u *un endomorphisme de* E *et* $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *la matrice de passage de la base* $\mathcal{B}$ *à la base* $\mathcal{B}'$ *:*
  - *(i)* $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *donc* $P^{-1} = P^T$.
  - *(ii)* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^T \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\, P$.

REMARQUE FONDAMENTALE 12.8 : Grâce à GRAM-SCHMIDT, *on a une décomposition des matrices inversibles : soit* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, *il existe un unique couple* (Q, R) *ou* Q *est orthogonale et* R *triangulaire supérieure avec des termes strictement positifs sur la diagonale tel que* $A = QR$ *(***décomposition QR***).*

EXEMPLE 12.4 : Décomposer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sous cette forme.

12.1.3 : Isométries vectorielles directes

REMARQUE 12.9 : On rappelle que dans un espace euclidien E, *une orientation de* E *est le choix d'une base* $\mathcal{B}_0$ *de référence qu'on dira directe et que pour tout autre base* $\mathcal{B}$ *de* E *:*

- $\mathcal{B}$ *est directe si* $\det(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}) > 0$.
- $\mathcal{B}$ *est indirecte si* $\det(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}) < 0$.

"Avoir la même orientation" est une relation d'équivalence sur les bases de E *avec* 2 *classes d'équivalence.*

Dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$ *munis de leur produit scalaire canonique, on choisira la base canonique comme base directe de référence et on dira que* E *est euclidien orienté canonique.*

PROPOSITION CONCERNANT LE DÉTERMINANT D'UNE ISOMÉTRIE 12.9 :
Si $u \in \mathrm{O}(E)$**, on a** $\det(u) = \pm 1$**.**

DÉFINITION 12.6 :
$\mathrm{SO}(E) = \{u \in \mathrm{O}(E) \mid \det(u) = 1\}$ *est appelé le* **groupe spécial orthogonal** *de* E *ou* **groupe des rotations** *de* E. *Les éléments de* $\mathrm{SO}(E)$ *sont aussi appelées* **isométries directes** *(vectorielles).*

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE DE $\mathrm{SO}(E)$ 12.10 :
$\mathrm{SO}(E)$ **est un sous-groupe de** $\mathrm{O}(E)$ **(donc de** $\mathrm{GL}(E)$**).**

REMARQUE 12.10 : Pour les isométries directes dans un espace euclidien orienté :

(i) $u \in \mathrm{SO}(E)$.
(ii) u *transforme toute base orthonormale directe de* E *en une base orthonormale directe de* E.
(iii) u *transforme une base orthonormale directe de* E *en une base orthonormale directe de* E.
(iv) la matrice de u *dans une base orthonormale de* E *est dans* $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

<u>REMARQUE FONDAMENTALE 12.11</u> : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $A \in O(n)$.

- *Si λ est une valeur propre réelle de A, alors $\lambda = \pm 1$.*
- *Si λ est une valeur propre complexe de A, alors $|\lambda| = 1$.*
- *Si n est impair, ± 1 est une valeur propre de A.*
- *Si n est impair et $A \in SO(n)$, alors 1 est valeur propre de A.*
- *Si n est impair et $A \in O(n) \setminus SO(n)$, alors -1 est valeur propre de A.*
- *A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A^2 = I_n$.*

12.1.4 : Espaces euclidiens orientés de dimension 2 ou 3

PROPOSITION SUR L'INVARIANCE DU DÉTERMINANT D'UNE FAMILLE DANS UNE BASE ORTHONORMÉE DIRECTE 12.11 :
Soit $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension n, alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ ne dépend pas de la base orthonormale directe $\mathcal{B}$ choisie.

DÉFINITION 12.7 :
La valeur commune du déterminant de la famille $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ dans n'importe quelle base orthonormale directe de E est appelée **le produit mixte** *de $\mathcal{F}$, et noté $[v_1, \cdots, v_n]$.*

⊙ Le programme se restreint aux espaces euclidiens orientés de dimension 2 et 3 pour la définition du produit mixte mais cette notion est générale.

<u>REMARQUE 12.12</u> :

- *Dans un plan euclidien E orienté : soit deux vecteurs $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ (coordonnées dans une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (a, b)$ du plan E), alors $[u, v] = xy' - x'y$.*
- *Dans le plan : $\big|[u, v]\big|$ est l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs u et v.*
- *Dans un espace euclidien E orienté : soit $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ et $w = (x'', y'', z'')$ (coordonnées dans une B.O.N.D. $\mathcal{B} = (a, b, c)$), alors $[u, v, w] = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z$. Dans l'espace, on montre que $\big|[u, v, w]\big|$ est le volume du parallélépipède formé par u, v et w.*

⊙ Dans la suite de ce paragraphe, E désignera un espace euclidien orienté de dimension 3.

<u>REMARQUE 12.13</u> : Soit $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $P = \mathrm{Vect}(e_2, e_3) = D^\perp$ une droite et un plan dans E :

- *On définit une orientation dans P si "on oriente D par e_1", en disant que $\mathcal{B}' = (e_2, e_3)$ est directe dans P si et seulement si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est directe dans E : cette orientation de P est dite* **orientation induite dans P par celle de D.**
- *On définit une orientation dans D si "on oriente P par $\mathcal{B}' = (e_2, e_3)$" directe, en disant que (e_1) est directe dans D (ou e_1 dirige D) si et seulement si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est directe dans E : cette orientation de D est dite* **orientation induite dans D par celle de P.**

DÉFINITION 12.8 :
Soit a et b deux vecteurs de E, on appelle **produit vectoriel** *de a et b, qu'on note $a \wedge b$, l'unique vecteur de E qui vérifie $\forall x \in E,\ [a, b, x] = [b, x, a] = [x, a, b] = (a \wedge b | x) = (x | a \wedge b)$.*

PROPOSITION SUR LES PROPRIÉTÉS DU PRODUIT VECTORIEL 12.12 :
L'application produit vectoriel est bilinéaire antisymétrique donc alternée :

(i) $\forall (a, a') \in E^2,\ \forall b \in E,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda a + \mu a') \wedge b = \lambda a \wedge b + \mu a' \wedge b$.

(ii) $\forall a \in E,\ \forall (b, b') \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ a \wedge (\lambda b + \mu b') = \lambda a \wedge b + \mu a \wedge b'$.

(iii) $\forall (a, b) \in E^2,\ a \wedge b = -b \wedge a$.

(iv) $\forall (a, b) \in E^2,\ a \wedge b = 0_E \iff (a, b)$ **liée.**

(v) $\forall (a, b) \in E^2,\ a \wedge b \in \big(\mathrm{Vect}(a, b)\big)^{\perp}$.

Soit maintenant $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ **une base orthonormée directe de** E **:**

(vi) Soit $a = xv_1 + yv_2 + zv_3$, $b = x'v_1 + y'v_2 + z'v_3$, $a \wedge b$ **dans la base** $\mathcal{B}$ **est donné par :**
$$a \wedge b = (yz' - zy')v_1 + (zx' - xz')v_2 + (xy' - yx')v_3 = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} v_1 - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} v_2 + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} v_3.$$

(vii) On a aussi les produits vectoriels : $v_1 \wedge v_2 = v_3$, $v_2 \wedge v_3 = v_1$ **et** $v_3 \wedge v_1 = v_2$.

REMARQUE 12.14 : Soit (a, b) une famille libre de vecteurs de E :

- *La famille $(a, b, a \wedge b)$ est une base directe de E.*
- *Si k est un vecteur unitaire qui oriente la droite $D = \big(\mathrm{Vect}(a, b)\big)^{\perp}$, alors on a $a \wedge b = ||a||\,||b||\,\sin(\theta) k$ où θ est l'angle orienté (pour l'orientation induite dans le plan $P = D^{\perp} = \mathrm{Vect}(a, b)$ par k) $\theta = (a, b)$.*
- *Si (e_1, e_2) est une famille orthonormale de E, $(e_1, e_2, e_1 \wedge e_2)$ est une base orthonormale directe de E.*

PROPOSITION SUR D'AUTRES PROPRIÉTÉS DU PRODUIT VECTORIEL 12.13 :
Soit a, b **et** c **trois vecteurs de** E, **alors on a les formules :**

(i) $||a \wedge b|| = ||a||\,||b||\,|\sin(\theta)|$ **(norme du produit vectoriel).**

(ii) $a \wedge (b \wedge c) = (a|c)b - (a|b)c$ **et** $(a \wedge b) \wedge c = (a|c)b - (b|c)a$ **(double produit vectoriel).**

(iii) $(a|b)^2 + ||a \wedge b||^2 = ||a||^2\,||b||^2$ **(identité de LAGRANGE).**

REMARQUE HP 12.15 : Dans un espace euclidien orienté de dimension n quelconque, on dispose d'une définition équivalente de produit vectoriel mais il faut $n-1$ vecteurs $x_1, \cdots, x_{n-1}$ de E pour qu'il existe un unique vecteur de E, noté $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$, qui vérifie : $\forall x \in E,\ [x_1, \cdots, x_{n-1}, x] = \big(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} | x\big)$.

12.1.5 : Isométries d'un espace euclidien de dimension 2

⊙ Dans ce paragraphe, E désignera un plan euclidien orienté.

PROPOSITION SUR LA DESCRIPTION DE $O(2)$ **12.14 :**

Soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ **et** $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. **Soit** A **une matrice de** $O(2)$ **:**

- **Si** $A \in SO_2(\mathbb{R})$, **il existe** $\theta \in \mathbb{R}$ **tel que** $A = R_\theta$.
- **Si** $A \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$, **il existe** $\theta \in \mathbb{R}$ **tel que** $A = S_\theta$.

REMARQUE 12.16 : • $\forall \theta \in \mathbb{R},\ S_\theta^2 = I_2$. *Ainsi :* $\forall \theta \in \mathbb{R},\ S_\theta^{-1} = S_\theta$.

- $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2,\ R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$. *Comme* $R_0 = I_2$, *on a :* $\forall \theta \in \mathbb{R},\ R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.
- $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2,\ S_\theta S_{\theta'} = R_{\theta-\theta'}$. *Ou encore :* $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2,\ S_\theta R_{\theta'} = S_{\theta-\theta'}$ *et* $R_\theta S_{\theta'} = S_{\theta+\theta'}$.

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE PARTICULIÈRE DE $SO(2)$ **12.15 :**
$SO_2(\mathbb{R})$ **est un groupe abélien.**

REMARQUE 12.17 : • Attention : $O_2(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif !

- *Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est même isomorphe à $\mathbb{U}$. "C'est pas faux !"*

PROPOSITION SUR L'INVARIANCE DE LA MATRICE D'UNE ROTATION DANS TOUTE BASE ORTHONORMÉE DIRECTE 12.16 :
Toute rotation u de E (c'est-à-dire $u \in SO(E)$) a la même matrice dans toute base orthonormée directe : R_θ avec $\theta \in \mathbb{R}$ défini modulo 2π qu'on choisit souvent dans $[0; 2\pi[$ (ou dans $]-\pi; \pi]$).

REMARQUE 12.18 : Si la matrice de $u \in SO(E)$ est R_θ dans une base orthonormée directe alors la matrice de u dans toute base orthonormée indirecte est $R_{-\theta}$.

DÉFINITION 12.9 :
*Si $u \in SO(E)$, le réel θ défini ci-dessus est appelé l'***angle de la rotation** u.

PROPOSITION SUR LA COMPOSÉE DE DEUX ROTATIONS 12.17 :
La composée de la rotation d'angle θ et de la rotation d'angle θ' est la rotation d'angle $\theta + \theta'$.

REMARQUE 12.19 :

- *Soit u la rotation de E d'angle θ et $a \in E$ unitaire : $\cos(\theta) = \big(a|u(a)\big)$ et $\sin(\theta) = \big[a, u(a)\big]$.*
- *Si on prend deux vecteurs non nuls a et b de E, l'angle orienté θ entre a et b est l'unique θ (dans $[0; 2\pi[$) par exemple) tel que la rotation d'angle θ transforme $\dfrac{a}{||a||}$ en $\dfrac{b}{||b||}$.*
  Alors on a les relations : $(a|b) = ||a||\,||b||\,\cos(\theta)$ et $[a, b] = ||a||\,||b||\,\sin(\theta)$.

PROPOSITION CARACTÉRISANT UNE RÉFLEXION PAR SA MATRICE 12.18 :
Les isométries indirectes u de E sont les réflexions. Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ une base orthonormée de E, alors si $S_\theta = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ où u est une réflexion, alors elle se fait par rapport à la droite engendrée par le vecteur unitaire $a = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)v_1 + \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)v_2$.

REMARQUE 12.20 : Toute rotation r est d'une infinité de manières la composée de deux réflexions :

- *Soit s une réflexion, il existe une unique réflexion s' de E telle que $r = s \circ s'$.*
- *Soit s une réflexion, il existe une unique réflexion s'' de E telle que $r = s'' \circ s$.*

PROPOSITION SUR LES GÉNÉRATEURS DU GROUPE DES ISOMÉTRIES 12.19 :
Le groupe $O(E)$ est engendré par les réflexions et toute isométrie de E est la composée de 0 (identité), 1 (réflexion) ou 2 réflexions (rotation).

REMARQUE 12.21 : On peut "modéliser" ces isométries vectorielles en complexe par (on se donne une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ pour identifier vecteurs et affixes) :

- *$z \mapsto e^{i\theta}z$ pour la rotation d'angle θ.*
- *$z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$ pour la réflexion par rapport à la droite engendrée par $a = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e_1 + \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e_2$ (HP).*

THÉORÈME DE CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DU PLAN 12.20 :
Classification des isométries d'un plan euclidien orienté E ($E_1 = E_1(A)$ et $E_{-1} = E_{-1}(A)$) :

isométrie	$\dim(E_1)$	$\dim(E_{-1})$	nb de réfl.	$\det(A)$	$\in SO(E)$	$\mathrm{tr}(A)$
identité : rotation d'angle 0	2	0	0	1	OUI	2
réflexion	1	1	1	-1	NON	0
(vraie) rotation d'angle $\pm\theta \in]0;\pi[$	0	0	2	1	OUI	$2\cos\theta$
symétrie centrale (rotation d'angle π)	0	2	2	1	OUI	-2

EXEMPLE 12.5 : • Qu'est l'application canoniquement associée à $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$?

• Qu'est l'application canoniquement associée à $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

12.1.6 : Isométries d'un espace euclidien de dimension 3

⊙ Dans ce paragraphe, E désignera un espace euclidien orienté de dimension 3.

REMARQUE 12.22 :

- *Soit $u \in O(E)$ une isométrie de E, alors 1 ou -1 est valeur propre de u.*
- *Soit $u \in SO(E)$ une rotation, alors 1 est valeur propre de u.*

THÉORÈME : DESCRIPTION D'UNE ROTATION SPATIALE (ÉNORME) 12.21 :
Soit $u \in SO(E)$ une isométrie directe (une rotation de E), on a deux cas :

(i) Si $\dim\big(E_1(u)\big) = 3$ alors $u = \mathrm{id}_E$.

(ii) Si $\dim\big(E_1(u)\big) = 1$ alors $D = E_1(u) = \mathrm{Vect}(a)$ avec a unitaire, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormée directe $\mathcal{B} = (a, b, c)$ de E : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

REMARQUE 12.23 : Il faut absolument orienter la droite D pour que l'orientation induite dans le plan orthogonal nous permette de déterminer l'angle θ sans ambiguïté.

DÉFINITION 12.10 :
Si $u \in SO(E)$ vérifie $u \neq \mathrm{id}_E$, on dit que la (vraie) rotation u admet la droite D pour **axe de la rotation u** *(qu'on oriente par a) et θ est appelé l'***angle de la rotation u***.*

PROPOSITION SUR LE CALCUL DE L'ANGLE D'UNE ROTATION SPATIALE 12.22 :
Soit la rotation u d'axe D orienté par a unitaire et d'angle θ, alors, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ avec $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe :

- $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{tr}(A) - 1}{2}$ **puisque $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(u) = 1 + 2\cos\theta$.**
- $\sin\theta$ **est du même signe que $[x, u(x), a] = [a, x, u(x)]$ si $x \notin D$.**

<u>REMARQUE 12.24</u> : • Ceci nous permet de déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation.

• Comme souvent u est donnée par sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on prend habituellement pour x un des vecteurs de la base canonique.

<u>ORAL BLANC 12.6</u> : Centrale PSI 2013 Romain

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A \in O(3)$ et déterminer la nature de u ainsi que ses éléments caractéristiques.

PROPOSITION : ÉCRITURE VECTORIELLE D'UNE ROTATION SPATIALE 12.23 :
(HP) Soit la rotation u d'axe D orienté par a unitaire et d'angle θ, vectoriellement :

$$\forall x \in E,\ u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(a \wedge x) + (1 - \cos\theta)(a|x)a.$$

<u>REMARQUE 12.25</u> : En particulier, si $x \in D^\perp$, la formule se réduit à $u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(a \wedge x)$ ce qui nous donne les relations : $\big(x|u(x)\big) = (\cos\theta)||x||^2$ et $x \wedge u(x) = (\sin\theta)||x||^2 a$.

<u>EXEMPLE 12.7</u> : Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe D orienté par $a = (1, 0, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

<u>REMARQUE HP 12.26</u> : Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ une base orthonormée directe de E, u la rotation d'axe D orienté par $a = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ unitaire et d'angle θ, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, $A - A^T = 2\sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$: on peut donc déterminer a et $\sin\theta$; bien sûr on a toujours recours à $\mathrm{tr}(A)$ pour découvrir $\cos\theta$.

<u>EXEMPLE 12.8</u> : Caractériser u canoniquement associé à $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION SUR LA RECONNAISSANCE D'UNE SYMÉTRIE ORTHOGONALE DE L'ESPACE PAR SA TRACE 12.24 :
Si $\mathcal{B}$ est orthonormée de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_3(\mathbb{R})$ et $A^T = A$: u est une symétrie orthogonale :

(i) $\mathrm{tr}(A) = -3 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 0 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 3 \iff u = -\mathrm{id}_E$ **(symétrie centrale).**

(ii) $\mathrm{tr}(A) = -1 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 1 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 2 \iff u$ **est un demi-tour.**

(iii) $\mathrm{tr}(A) = 1 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 2 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 1 \iff u$ **est une réflexion de plan** $E_1(u)$**.**

(iv) $\mathrm{tr}(A) = 3 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 3 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 0 \iff u = \mathrm{id}_E$**.**

<u>REMARQUE 12.27</u> : Il reste les isométries indirectes $u \in O(E) \setminus SO(E)$ qui ne sont pas des réflexions :

• On sait qu'alors $-u \in SO(E)$ donc il existe un axe $D = \mathrm{Vect}(a)$ avec a unitaire et un angle $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormée directe $\mathcal{B} = (a, b, c)$, on ait $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

• u est la composée commutative de la rotation d'axe D et d'angle θ et de la réflexion de plan $D^\perp$.

• On détermine $\cos(\theta)$ avec la trace : $\mathrm{tr}(A) = -1 + 2\cos(\theta)$.

• On détermine de même le signe de $\sin(\theta)$ qui est égal au signe de $[a, x, u(x)]$ où $x \notin D$.

<u>REMARQUE HP 12.28</u> : Une isométrie indirecte de la forme précédente (si $\theta = 0$ u est une réflexion et si $\theta = \pi$ on a $u = -\mathrm{id}_E$) est appelée une **rotation-miroir** *autour de la droite D orientée par le vecteur unitaire a et d'angle θ. Comme pour les rotations, on montre que :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(a \wedge x) - (1+\cos\theta)(a|x)a.$$

THÉORÈME CLASSIFIANT LES ISOMÉTRIES DE L'ESPACE (ÉNORME) 12.25 :
Classification des isométries d'un espace euclidien orienté E de dimension 3 (en adoptant à nouveau les abréviations $E_1 = E_1(A)$ et $E_{-1} = E_{-1}(A)$):

isométrie	$\dim(E_1)$	$\dim(E_{-1})$	nb de réfl.	$\det(A)$	$\in SO(3)$	$\mathrm{tr}(A)$
identité	3	0	0	1	OUI	3
réflexion	2	1	1	-1	NON	1
rotation d'angle $\pm\theta \in]0;\pi[$	1	0	2	1	OUI	$1+2\cos\theta \in]-1;3[$
demi-tour, retournement	1	2	2	1	OUI	-1
symétrie centrale	0	3	3	-1	NON	-3
rotation-miroir	0	1	3	-1	NON	$-1+2\cos\theta \in]-3;1[$

EN PRATIQUE : Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$ et u canoniquement associée à A :

- *Si $A = I_3$ alors $u = \mathrm{id}_E$ (identité).*
- *Si $A = -I_3$ alors $u = -\mathrm{id}_E$ (symétrie centrale).*
- *Si $A \neq \pm I_3$ et $A = A^T$ alors u est une symétrie orthogonale et $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(u) = \pm 1$.*
  - ◇ *Si $\mathrm{tr}(A) = 1$ alors u est la réflexion par rapport au plan $\mathrm{Ker}(A - I_3)$.*
  - ◇ *Si $\mathrm{tr}(A) = -1$ alors u est le demi-tour autour de la droite $\mathrm{Ker}(A+I_3)^\perp = \mathrm{Ker}(A - I_3)$.*
- *Si $A \neq A^T$ et $\det(A) = 1$ (c'est le cas si $\mathrm{tr}(A) > 1$) alors u est une "vraie" rotation.*
  - ◇ *L'axe de u est la droite $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ qu'on oriente par un vecteur a unitaire.*
  - ◇ *L'angle θ de u vérifie $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{tr}(A)-1}{2}$, $\mathrm{sgn}\big(\sin(\theta)\big) = \mathrm{sgn}\big([a,x,u(x)]\big)$ ((x,a) libre).*
- *Si $A \neq A^T$ et $\det(A) = -1$ (c'est le cas si $\mathrm{tr}(A) < -1$) alors u est une "vraie" rotation-miroir.*
  - ◇ *L'axe de u est la droite $\mathrm{Ker}(A + I_3)$ qu'on oriente par un vecteur a unitaire.*
  - ◇ *L'angle θ de u vérifie $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{tr}(A)+1}{2}$, $\mathrm{sgn}\big(\sin(\theta)\big) = \mathrm{sgn}\big([a,x,u(x)]\big)$ ((x,a) libre).*

<u>EXEMPLE 12.9</u> : Reconnaître u canoniquement associée à $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

12.1.7 : (HP) Matrices et déterminants de Gram

<u>REMARQUE HP 12.29</u> : Dans un espace préhilbertien réel E, on se donne une famille finie de p vecteurs de E notée $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_p)$. On appelle **matrice de** Gram *de $\mathcal{F}$ la matrice $G = \big((v_i|v_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.*

- *On a l'équivalence : $\big(\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_p)$ est libre $\big) \Longleftrightarrow G \in GL_p(\mathbb{R})$.*
- *Si $\mathcal{F}$ est libre, soit $v \in E$, on note $d = d(v, F)$ la distance de v à $F = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p)$. Alors en notant $G(v_1, \cdots, v_p)$ le déterminant (dit de Gram) de la matrice de G : $d^2 = \dfrac{G(v_1, \cdots, v_p, v)}{G(v_1, \cdots, v_p)}$.*

<u>EXEMPLE 12.10</u> : Calculer la distance de $v = (1,2,3)$ au plan P d'équation $2x - y + z = 0$.

PARTIE 12.2 : ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS ET MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES

12.2.1 : Endomorphismes autoadjoints

DÉFINITION 12.11 :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$*, on dit que* u *est un* **endomorphisme autoadjoint** *si* $\forall (x,y) \in E^2,\ \big(u(x)|y\big) = \big(x|u(y)\big)$.
On note $S(E)$ *l'ensemble des endomorphismes autoadjoints.*

REMARQUE 12.30 : • *On dit aussi que* u *autoadjoint est* **symétrique** *(ancienne terminologie).*
• *Cette autre appellation justifie la notation* $S(E)$.
• *Si* u *est endomorphisme autoadjoint de* E *et* F *un sous-espace vectoriel de* E *stable par* u*, alors* u_F *est aussi un endomorphisme autoadjoint de* F.

ORAL BLANC 12.11 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire classique $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.
a. Montrer que $u : P \mapsto 2XP'(X) + (X^2-1)P''(X)$ est un endomorphisme symétrique de E.
b. Déterminer le spectre de u.
On pose $\forall k \in [\![0;n]\!],\ U_k = (X^2-1)^k$ de sorte que $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.
c. Grâce à la formule de Leibniz, justifier que $L_k = U_k^{(k)}$ est vecteur propre de u. Montrer (sans IPP) que $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base orthogonale de vecteurs propres de u.

THÉORÈME DE CARACTÉRISATION DES ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS PAR LEURS MATRICES DANS LES BASES ORTHONORMÉES (ÉNORME) 12.26 :
Soit E **euclidien de dimension** n**,** $u \in \mathcal{L}(E)$ **et** $\mathcal{B}$ **une base orthonormale de** E**, alors :**
u **est un endomorphisme autoadjoint de** $E \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ **est une matrice symétrique de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**.**

REMARQUE 12.31 : Le terme "endomorphisme symétrique" devient plus clair avec cette caractérisation. Les endomorphismes autoadjoints de E *forment un sous-espace vectoriel de dimension* $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

PROPOSITION SUR LES PROJECTEURS ET SYMÉTRIES AUTOADJOINTS 12.27 :
Soit p **un projecteur de** E **:** $\big(p$ **est un projecteur orthogonal**$\big) \iff \big(p$ **est autoadjoint**$\big)$**.**
Soit s **une symétrie de** E **:** $\big(s$ **est une symétrie orthogonale**$\big) \iff \big(s$ **est autoadjoint**$\big)$**.**

EXEMPLE 12.12 : Qu'est u dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$?

PROPOSITION SUR LA STABILITÉ DE L'ORTHOGONAL PAR UN ENDOMORPHISME AUTOADJOINT 12.28 :
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ **est autoadjoint et si** F **est un sous-espace vectoriel de** E **stable par** u**, alors le sous-espace** $F^{\perp}$ **est aussi stable par** u**.**

REMARQUE HP 12.32 : Soit E *un espace euclidien :*

- *On dit que* $u \in \mathcal{L}(E)$ *est* **antisymétrique** *si et seulement si :* $\forall x \in E,\ \big(x|u(x)\big) = 0$.
- *Soit* $\mathcal{B}$ *une base orthonormée de* E *:* u *antisymétrique* $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *antisymétrique.*
- *Les endomorphismes antisymétriques de* E *forment un sous-espace vectoriel de dimension* $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
- *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est antisymétrique, alors* $\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$ *(imaginaires purs).*
- *On a l'équivalence :* u *antisymétrique* $\Longleftrightarrow \Big(\forall (x,y) \in E^2,\ \big(u(x)|y\big) = -\big(x|u(y)\big)\Big)$.
- *Si* E *euclidien orienté de dimension 3 et* u *endomorphisme antisymétrique de* E, *alors il existe un unique vecteur* a *de* E *tel que :* $\forall x \in E,\ u(x) = a \wedge x$.

PROPOSITION SUR L'ORTHOGONALITÉ ENTRE DEUX SOUS-ESPACES PROPRES POUR UN ENDOMORPHISME AUTOADJOINT 12.29 :
Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de u autoadjoint, $E_{\lambda_1}(u) \perp E_{\lambda_2}(u)$.

12.2.2 : Le théorème spectral

THÉORÈME SPECTRAL VERSION VECTORIELLE (ÉNORME) 12.30 :
Soit u un endomorphisme autoadjoint de E, alors χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$.
Il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.
Autrement dit, u est diagonalisable dans une base orthonormale et donc $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u)$.

PROPOSITION SUR L'ORTHOGONALITÉ ENTRE IMAGE ET NOYAU POUR UN ENDOMORPHISME autoadjoint 12.31 :
Si E est euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$ **(le noyau et l'image de u sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre).**

THÉORÈME SPECTRAL VERSION MATRICIELLE (ÉNORME) 12.32 :
Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T AP$ soit diagonale réelle.

REMARQUE 12.33 : • *On dit que la matrice* A *est* **orthosemblable** *à une matrice diagonale.*
- *La réciproque est vraie : si la matrice* P *est orthogonale et si* $P^T AP$ *est diagonale alors* $A \in S_n(\mathbb{R})$.

EXEMPLE 12.13 : Diagonaliser $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 23 & 2 & -4 \\ 2 & 26 & 2 \\ -4 & 2 & 23 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.

REMARQUE 12.34 : Les matrices symétriques complexes ne sont pas forcément diagonalisables !

EXEMPLE FONDAMENTAL 12.14 : Soit la matrice symétrique complexe $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.
Justifier que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

ORAL BLANC 12.15 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

On pose $\lambda_{Min} = \mathrm{Min}(\mathrm{Sp}\,A)$ et $\lambda_{Max} = \mathrm{Max}(\mathrm{Sp}\,A)$. Montrer $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \lambda_{Min} \leqslant a_{i,i} \leqslant \lambda_{Max}$.

12.2.3 : Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs

DÉFINITION 12.12 :
Soit E *un espace euclidien et* $u \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme autoadjoint.*

- *On dit que* u *est un* **endomorphisme autoadjoint positif** *si* $\forall x \in E,\ \big(u(x)|x\big) \geqslant 0$.
- *On dit que* u *est un* **endomorphisme autoadjoint défini positif** *si* $\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \big(u(x)|x\big) > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique.*

- *On dit que* A *est une* **matrice symétrique positive** *si* $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^TAX \geqslant 0$.
- *On dit que* A *est une* **matrice symétrique définie positive** *si* $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^TAX > 0$.

<u>*REMARQUE 12.35*</u> *: Soit* E *euclidien de base orthonormée* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, $(E_1, \cdots, E_n)$ *base canonique (donc bon) de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *avec* $u \in \mathcal{L}(E)$ *:* $a_{i,j} = E_i^TAE_j = \big(e_i|u(e_j)\big)$.

DÉFINITION 12.13 :
On note $S^+(E)$ *(resp.* $S^{++}(E)$*) l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs (resp. définis positifs).*
On note $S_n^+(\mathbb{R})$ *(resp.* $S_n^{++}(\mathbb{R})$*) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives).*

<u>*REMARQUE FONDAMENTALE 12.36*</u> *: Trois équivalences essentielles :*

- *Si* $\mathcal{B}$ *est une base orthonormale de* E, $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *avec* $n = \dim(E)$, *alors* $u \in S^+(E) \Longleftrightarrow A \in S_n^+(\mathbb{R})$ *car* $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$ *et, bien sûr, on a aussi* $u \in S^{++}(E) \Longleftrightarrow A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- *Si* u *est un endomorphisme de* E, *on a l'équivalence :*

$$u \in S^{++}(E) \Longleftrightarrow \big(\varphi : (x,y) \mapsto \big(u(x)|y\big) \text{ est un produit scalaire sur } E\big).$$

THÉORÈME CARACTÉRISANT LES AUTOADJOINTS DÉFINIS POSITIFS 12.33 :
Soit u un endomorphisme autoadjoint de E, il y a équivalence entre :

$$\textbf{(i)}\ \forall x \in E,\ \big(u(x)|x\big) \geqslant 0 \quad \textbf{et} \quad \textbf{(ii)}\ \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+,$$

mais aussi entre les deux assertions :

$$\textbf{(i)}\ \forall x \in E,\ x \neq 0_E \Longrightarrow \big(u(x)|x\big) > 0 \ \textbf{et} \ \textbf{(ii)}\ \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

THÉORÈME CARACTÉRISANT LES MATRICES SYMÉTRIQUES POSITIVES 12.34 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, il y a équivalence entre :

$$\textbf{(i)}\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^TAX \geqslant 0 \quad \textbf{(ii)}\ \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \quad \textbf{(iii)}\ \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \textbf{(ou } S_n^+(\mathbb{R})\textbf{)},\ A = B^TB.$$

mais aussi entre les trois assertions :

$$\textbf{(i)}\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^TAX > 0 \ \textbf{(ii)}\ \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \ \textbf{(iii)}\ \exists B \in GL_n(\mathbb{R})\ \textbf{(ou } S_n^{++}(\mathbb{R})\textbf{)},\ A = B^TB.$$

REMARQUE FONDAMENTALE 12.37 : Si A est une matrice symétrique positive, alors il existe une unique matrice B symétrique positive telle que $A = B^2$. On appelle cette matrice la **racine carrée** *de A.*

EXERCICE CONCOURS 12.16 : Mines PSI 2013 Gérémy
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $B = SAS$.
Montrer que : $B \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \big(S$ inversible et $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})\big)$.

REMARQUE 12.38 : Si $u \in S^+(E)$ (resp. $u \in S^{++}(E)$) : $\mathrm{tr}(u) \geqslant 0$ et $\det(u) \geqslant 0$ (resp. $\mathrm{tr}(u), \det(u) > 0$).

REMARQUE HP 12.39 : $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists!(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.
C'est la **décomposition polaire** *d'une matrice inversible de $GL_n(\mathbb{R})$.*

EXEMPLE 12.17 : Trouver O et S si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

COMPÉTENCES

- Étudier l'image d'une base orthonormée pour savoir si on a affaire à une isométrie.
- Vérifier sur la matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée que c'est une isométrie.
- Savoir reconnaître géométriquement les symétries orthogonales.
- Connaître la structure de groupes des matrices orthogonales ou des isométries vectorielles.
- Maîtriser la définition et les propriétés du produit vectoriel dans l'espace.
- Réviser les différentes isométries vectorielles du plan et leur classification.
- Apprendre l'algorithme de caractérisation d'une isométrie directe (une rotation) de l'espace.
- Se familiariser avec le même algorithme (même si hors programme) pour les isométries indirectes.
- En particulier, savoir facilement reconnaître géométriquement une symétrie orthogonale de l'espace.
- Savoir établir qu'un endomorphisme est autoadjoint.
- Utiliser le théorème spectral pour la recherche des éléments propres d'un endomorphisme autoadjoint.
- Être à l'aise avec les différentes caractérisations des matrices symétriques positives.