# CHAPITRE 12
# ENDOM. D'UN ESPACE EUCLIDIEN

## PARTIE 12.1 : ISOMÉTRIES VECTORIELLES

**THÉORÈME 12.1 :**
**Soit $u$ un endomorphisme de $E$ euclidien, les propositions suivantes sont équivalentes :**
**(i)** $\forall x \in E,\ ||u(x)|| = ||x||$ **($u$ est appelée isométrie vectorielle ou automorphisme orthogonal).**
**(ii)** $u$ **conserve le produit scalaire :** $\forall (x,y) \in E^2,\ \big(u(x)|u(y)\big) = (x|y)$.
**(iii)** $u$ **transforme une (ou toute) base orthonormale de $E$ en une base orthonormale de $E$.**
**On note $O(E)$ (groupe orthogonal de $E$) l'ensemble des automorphismes orthogonaux de $E$.**

*REMARQUE 12.1 :* • *Si* $u \in O(E)$ *et* $F$ *stable par* $u$*, alors* $u_F \in O(F)$.
• *Soit* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases orthonormées d'un espace euclidien* $E$, $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $P$ *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$*. Alors* $P \in O_n(\mathbb{R})$ *donc* $P^{-1} = P^T$ *et* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^T\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\,P$.

**PROPOSITION 12.2 :**
**Soit $u \in O(E)$, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ :** $\big(F$ **est stable par** $u\big) \Longleftrightarrow \big(F^{\perp}$ **est stable par** $u\big)$.

**PROPOSITION 12.3 :**
**Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :**
**(i)** $M^TM = I_n$ **($M$ est dite orthogonale).** **(ii)** $MM^T = I_n$. **(iii)** $M$ **inversible et** $M^{-1} = M^T$.
**(iv) Les vecteurs lignes de $M$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.**
**(v) Les vecteurs colonnes de $M$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ eucl. canon..**
**On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (groupe orthogonal d'ordre $n$).**

**THÉORÈME ÉNORME 12.4 :**
**Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $E$, alors :** $u \in O(E) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$.

*REMARQUE 12.2 :* $O(E)$ *est un sous-groupe de* $GL(E)$. $O_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{R})$.
*Si* $u \in O(E)$*, on a* $\det(u) = \pm 1$. *Si* $M \in O_n(\mathbb{R})$ *alors* $\det(M) = \pm 1$.

**DÉFINITION 12.1 :**
$SO(E) = \big\{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\big\}$ *est appelé le* **groupe spécial orthogonal** *de* $E$ *ou* **groupe des rotations** *de* $E$*. Les éléments de* $SO(E)$ *sont aussi appelées* **isométries directes** *(vectorielles).*
*Soit* $SO_n(\mathbb{R}) = \big\{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\big\}$ *(ou* $SO(n)$*) le* **groupe spécial orthogonal d'ordre** $n$.

*REMARQUE 12.3 :* • $SO(E)$ *est un sous-groupe de* $O(E)$. $SO_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $O_n(\mathbb{R})$.
• *Soit* $n$ *un entier naturel supérieur ou égal à* $1$ *et* $A \in O(n)$.
- *Si* $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$*, alors* $|\lambda| = 1$. *Ainsi, si* $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$*,alors* $\lambda = \pm 1$.
- *Si* $n$ *est impair,* $A \in SO(n) \Longrightarrow 1 \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$ *et* $A \in O(n) \setminus SO(n) \Longrightarrow -1 \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$.
- $A$ *est donc diagonalisable dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *si et seulement si* $A^2 = I_n$.

**PROPOSITION 12.5 :**
**Si $s$ est une symétrie de $E$ :** $\big(s$ **est orthogonale**$\big) \Longleftrightarrow \big(s$ **est une isométrie**$\big)$.

*REMARQUE 12.4 : Dans un espace euclidien* $E$*, une orientation de* $E$ *est le choix d'une base* $\mathcal{B}_0$ *de référence qu'on dira directe. Pour toute autre base* $\mathcal{B}$ *de* $E$ *:*
• $\mathcal{B}$ *est dite directe si* $\det(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}) > 0$. • $\mathcal{B}$ *est dite indirecte si* $\det(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}) < 0$.

**DÉFINITION 12.2 :**
*Soit* $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ *une famille de* $n$ *vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension* $n$*, alors* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ *ne dépend pas de la base orthonormale directe* $\mathcal{B}$ *choisie. On note alors* $[v_1, \cdots, v_n] = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n)$ *(si* $\mathcal{B}$ *b.o.n.d.) appelé* **le produit mixte** *de* $\mathcal{F}$*.*

*REMARQUE 12.5 : Soit* $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ *une droite et* $P = \mathrm{Vect}(e_2, e_3) = D^{\perp}$ *dans* $E$ *de dimension* $3$ *:*

- *On définit une orientation dans* $P$ *si "on oriente* $D$ *par* $e_1$*", en disant que* $\mathcal{B}' = (e_2, e_3)$ *est directe dans* $P$ *ssi* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *est directe dans* $E$ *(***orientation induite dans** $P$ **par celle de** $D$.
- *On définit une orientation dans* $D$ *si "on oriente* $P$ *par* $\mathcal{B}' = (e_2, e_3)$*" directe, en disant que* $(e_1)$ *est directe dans* $D$ *ssi* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *est directe dans* $E$ *(***orientation induite dans** $D$ **par celle de** $D$.

**DÉFINITION 12.3 :**
*Soit* $a$ *et* $b$ *deux vecteurs de* $E$ *de dimension* $3$*, on appelle* **produit vectoriel** *de* $a$ *et* $b$*, qu'on note* $a \wedge b$*, l'unique vecteur de* $E$ *qui vérifie* $\forall x \in E,\ [a, b, x] = [b, x, a] = [x, a, b] = (a \wedge b | x) = (x | a \wedge b)$.

**PROPOSITION 12.6 :**
**Le produit vectoriel est bilinéaire, antisymétrique, alternée. Soit** $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ **b.o.n.d de** $E$ **:**

**(i)** $\forall (a, a') \in E^2,\ \forall b \in E,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda a + \mu a') \wedge b = \lambda a \wedge b + \mu a' \wedge b$.
**(ii)** $\forall a \in E,\ \forall (b, b') \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ a \wedge (\lambda b + \mu b') = \lambda a \wedge b + \mu a \wedge b'$.
**(iii)** $\forall (a, b) \in E^2,\ a \wedge b = -b \wedge a$. **(iv)** $a \wedge b = 0_E \Longleftrightarrow (a, b)$ **liée.** **(v)** $a \wedge b \in \big(\mathrm{Vect}(a, b)\big)^{\perp}$.
**(vi) Soit** $a = xe_1 + ye_2 + ze_3,\ b = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3,\ a \wedge b$ **dans la base** $\mathcal{B}$ **est donné par :**
$$a \wedge b = (yz' - zy')e_1 + (zx' - xz')e_2 + (xy' - yx')e_3 = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} e_3.$$
**(vii) On a aussi les produits vectoriels :** $e_1 \wedge e_2 = e_3,\ e_2 \wedge e_3 = e_1$ **et** $e_3 \wedge e_1 = e_2$.

**PROPOSITION 12.7 :**
**Soit** $a$, $b$ **et** $c$ **trois vecteurs de** $E$**, alors on a les formules :**

**(i)** $||a \wedge b|| = ||a||\,||b||\,|\sin(\theta)|$ **(norme du produit vectoriel).**
**(ii)** $a \wedge (b \wedge c) = (a|c)b - (a|b)c$ **et** $(a \wedge b) \wedge c = (a|c)b - (b|c)a$ **(double produit vectoriel).**
**(iii)** $(a|b)^2 + ||a \wedge b||^2 = ||a||^2\,||b||^2$ **(identité de LAGRANGE).**

**PROPOSITION 12.8 :**
**Si** $A \in O_2(\mathbb{R})$**,** $\det(A) = 1 \Longrightarrow A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ **; sinon,** $A = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
$SO_2(\mathbb{R})$ **est un groupe abélien (même isomorphe à** $\mathbb{U}$**).**

*REMARQUE 12.6 :* $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2,\ S_\theta^2 = I_2$ *et* $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$ *donc* $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$*. De plus,* $S_\theta S_{\theta'} = R_{\theta-\theta'}$.

**PROPOSITION 12.9 :**
**Toute rotation** $u$ **(c'est-à-dire** $u \in SO(E)$**) de** $E$ **de dimension** $2$ **a la même matrice dans toute base orthonormée directe :** $R_\theta$ **avec** $\theta \in \mathbb{R}$ **défini modulo** $2\pi$ **qu'on choisit souvent dans** $[0; 2\pi[$ **(ou dans** $]-\pi; \pi]$**). Le réel** $\theta$ **ainsi défini est appelé l'angle de la rotation** $u$**.**
**La composée de la rotation d'angle** $\theta$ **et de la rotation d'angle** $\theta'$ **est la rotation d'angle** $\theta + \theta'$**.**

**PROPOSITION 12.10 :**
**Les isométries indirectes** $u$ **de** $E$ **de dimension** $2$ **sont les réflexions. Soit** $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ **une base orthonormée de** $E$**, alors si** $S_\theta = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ **où** $u$ **est une réflexion, alors elle se fait par rapport à la droite engendrée par le vecteur unitaire** $a = \cos(\theta/2)e_1 + \sin(\theta/2)e_2$**.**

**THÉORÈME ÉNORME 12.11 :**
**Classification des isométries d'un plan euclidien orienté $E$ ($E_1 = E_1(A)$ et $E_{-1} = E_{-1}(A)$) :**

| isométrie | $\dim(E_1)$ | $\dim(E_{-1})$ | nb de réfl. | $\det(A)$ | $\in SO(E)$ | $\mathrm{tr}(A)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| identité : rotation d'angle $0$ | $2$ | $0$ | $0$ | $1$ | OUI | $2$ |
| réflexion | $1$ | $1$ | $1$ | $-1$ | NON | $0$ |
| (vraie) rotation d'angle $\pm\theta \in ]0;\pi[$ | $0$ | $0$ | $2$ | $1$ | OUI | $2\cos\theta$ |
| symétrie centrale (rotation d'angle $\pi$) | $0$ | $2$ | $2$ | $1$ | OUI | $-2$ |

**THÉORÈME ÉNORME 12.12 :**
**Soit $u \in SO(E)$ une isométrie directe (une rotation de $E$) de $E$ de dimension $3$, on a deux cas :**

**(i) Si $\dim\big(E_1(u)\big) = 3$ alors $u = \mathrm{id}_E$.**

**(ii) Si $\dim\big(E_1(u)\big) = 1$ alors $D = E_1(u) = \mathrm{Vect}(a)$ avec $a$ unitaire, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormée directe $\mathcal{B} = (a,b,c)$ de $E$ : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.**
**La droite $D$ est l'axe de la rotation $u$ (orienté par $a$) et $\theta$ est l'angle de la rotation $u$.**

**PROPOSITION 12.13 :**
**Soit la rotation $u$ d'axe $D$ orienté par $a$ unitaire et d'angle $\theta$, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ avec $\mathcal{B}$ b.o.n :**

- $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{tr}(A) - 1}{2}$ **puisque** $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(u) = 1 + 2\cos\theta$.
- $\sin\theta$ **est du même signe que** $[x, u(x), a] = [a, x, u(x)]$ **si** $x \notin D$.

<u>*REMARQUE 12.7*</u> *: (HP) Soit la rotation $u$ d'axe $D$ orienté par $a$ unitaire et d'angle $\theta$ :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(a \wedge x) + (1 - \cos\theta)(a|x)a.$$

*En particulier, si $x \in D^\perp$, la formule se réduit à $u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(a \wedge x)$ ce qui nous donne les relations : $\big(x|u(x)\big) = (\cos\theta)||x||^2$ et $x \wedge u(x) = (\sin\theta)||x||^2 a$.*

**PROPOSITION 12.14 :**
**Si $\mathcal{B}$ est orthonormée, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_3(\mathbb{R})$ et $A^T = A$ : $u$ est une symétrie orthogonale :**

**(i)** $\mathrm{tr}(A) = -3 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 0 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 3 \iff u = -\mathrm{id}_E$ **(symétrie centrale).**

**(ii)** $\mathrm{tr}(A) = -1 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 1 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 2 \iff u$ **est un demi-tour.**

**(iii)** $\mathrm{tr}(A) = 1 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 2 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 1 \iff u$ **est une réflexion de plan** $E_1(u)$.

**(iv)** $\mathrm{tr}(A) = 3 \iff \dim\big(E_1(u)\big) = 3 \iff \dim\big(E_{-1}(u)\big) = 0 \iff u = \mathrm{id}_E$.

**THÉORÈME ÉNORME 12.15 :**
**Classification des isométries d'un espace euclidien orienté $E$ de dimension $3$ (en adoptant à nouveau les abréviations $E_1 = E_1(A)$ et $E_{-1} = E_{-1}(A)$):**

| isométrie | $\dim(E_1)$ | $\dim(E_{-1})$ | nb de réfl. | $\det(A)$ | $\in SO(3)$ | $\mathrm{tr}(A)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| identité | $3$ | $0$ | $0$ | $1$ | OUI | $3$ |
| réflexion | $2$ | $1$ | $1$ | $-1$ | NON | $1$ |
| rotation d'angle $\pm\theta \in ]0;\pi[$ | $1$ | $0$ | $2$ | $1$ | OUI | $1 + 2\cos\theta \in ]-1;3[$ |
| demi-tour, retournement | $1$ | $2$ | $2$ | $1$ | OUI | $-1$ |
| symétrie centrale | $0$ | $3$ | $3$ | $-1$ | NON | $-3$ |
| rotation-miroir | $0$ | $1$ | $3$ | $-1$ | NON | $-1 + 2\cos\theta \in ]-3;1[$ |

*REMARQUE HP 12.8 : Dans un espace préhilbertien réel* $E$, *on se donne une famille finie de* $p$ *vecteurs de* $E$ *notée* $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_p)$. *On appelle* **matrice de** GRAM *de* $\mathcal{F}$ *la matrice* $G = \big((v_i|v_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

- *On a l'équivalence :* $\big(\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_p)$ *est libre* $\big) \iff G \in GL_p(\mathbb{R})$.
- *Si* $\mathcal{F}$ *est libre, soit* $v \in E$, *on note* $d = d(v, F)$ *la distance de* $v$ *à* $F$. *Alors en notant* $G(v_1, \cdots, v_p)$ *le déterminant (dit de* GRAM*) de la matrice de* $G$ *:* $d^2 = \dfrac{G(v_1, \cdots, v_p, v)}{G(v_1, \cdots, v_p)}$.

## PARTIE 12.2 : ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS ET MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES

**THÉORÈME ÉNORME 12.16 :**
**Soit** $u \in \mathcal{L}(E)$**, les propriétés suivantes sont équivalentes :**
**(i)** $\forall (x, y) \in E^2,\ \big(u(x)|y\big) = \big(x|u(y)\big)$ **(**$u$ **est dit autoadjoint et on note** $u \in S(E)$**).**
**(ii) Il existe une base orthonormée** $\mathcal{B}$ **de** $E$ **telle que** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ **est symétrique.**
**(iii) Dans toute base orthonormée** $\mathcal{B}$ **de** $E$**, on a** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$**.**

*REMARQUE 12.9 : Soit* $\lambda_1$ *et* $\lambda_2$ *deux valeurs propres de* $u$ *symétrique, alors* $E_{\lambda_1}(u) \perp E_{\lambda_2}(u)$.

**PROPOSITION 12.17 :**
**Soit** $p$ **un projecteur de** $E$ **:** $\big(p$ **est un projecteur orthogonal**$\big) \iff \big(p$ **est autoadjoint**$\big)$**.**
**Soit** $s$ **une symétrie de** $E$ **:** $\big(s$ **est une symétrie orthogonale**$\big) \iff \big(s$ **est autoadjoint**$\big)$**.**

**PROPOSITION 12.18 :**
**Si** $u \in S(E)$ **et si** $F$ **est un sous-espace vectoriel de** $E$ **stable par** $u$**, alors** $F^\perp$ **est aussi stable par** $u$**.**

**THÉORÈME ÉNORME 12.19 :**
**Soit** $u$ **un endomorphisme autoadjoint de** $E$**, alors** $\chi_u$ **est scindé sur** $\mathbb{R}$ **et il existe une bon de** $E$ **formée de vecteurs propres de** $u$**. Autrement dit,** $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ **(sevs orthogonaux** $2$ **à** $2$**).**
**Si** $A \in S_n(\mathbb{R})$ **alors il existe** $P \in O_n(\mathbb{R})$ **telle que** $D = P^T A P$ **soit diagonale (**$A$ **et** $D$ **orthosemblables).**

***EXEMPLE FONDAMENTAL 12.1*** *:* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$. $A$ est symétrique et non DZ.

**DÉFINITION 12.4 :**
*Soit* $E$ *un espace euclidien et* $u \in \mathcal{L}(E)$*, on dit que .*
- $u$ *est un* **endomorphisme autoadjoint positif** *si* $\forall x \in E,\ \big(u(x)|x\big) \geqslant 0$ *(*$u \in S^+(E)$*).*
- $u$ *est un* **endom. autoadjoint défini positif** *si* $\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \big(u(x)|x\big) > 0$ *(*$u \in S^{++}(E)$*).*

*REMARQUE FONDAMENTALE 12.10 : Si* $u$ *est un endomorphisme de* $E$*, on a l'équivalence :*
$u \in S^{++}(E) \iff \big(\varphi : (x, y) \mapsto \big(u(x)|y\big)$ *est un produit scalaire sur* $E\big)$.

**THÉORÈME 12.20 :**
**Soit** $u$ **un endom. autoadjoint de** $E$**,** $u \in S^+(E) \iff Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$ **et** $u \in S^{++}(E) \iff Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$**.**
**Soit** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **une matrice symétrique alors :**
$\big(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A X \geqslant 0\big) \iff Sp(A) \subset \mathbb{R}_+ \iff \big(\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = B^T B\big)$ $\quad (A \in S_n^+(\mathbb{R}))$**.**
$\big(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0 \Longrightarrow X^T A X > 0\big) \iff Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^* \iff \big(\exists B \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = B^T B\big)$ $\quad (A \in S_n^{++}(\mathbb{R}))$**.**

*REMARQUE 12.11 :* • *Si* $u \in S^+(E)$ *(resp.* $u \in S^{++}(E)$*),* $\mathrm{tr}(u) \geqslant 0$ *et* $\det(u) \geqslant 0$ *(resp.* $\mathrm{tr}(u), \det(u) > 0$*).*
• $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}),\ \exists!(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}),\ A = OS$ *(décomposition polaire).*