# DM 11 : DISTANCES ET ANGLES

**PSI 1 2024/2025** **pour le vendredi 24 janvier 2025**

## PARTIE 1 : GÉNÉRALITÉS

**1** En effectuant l'opération de Gauss (transvection) $C_1 \longleftarrow C_1 + \cdots + C_p$ on obtient des $a + (p-1)b$ dans la première colonne qu'on peut factoriser par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne.

Ainsi $\det(M(a,b)) = (a+(p-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ \vdots & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$. Ensuite, on réalise les opérations $C_j \longleftarrow C_j - bC_1$ pour $j \in [\![2;p]\!]$ et on obtient une matrice triangulaire inférieure donc le déterminant est le produit des termes diagonaux ; ainsi $\boxed{\det(M_{a,b}) = (a-b)^{p-1}(a+(p-1)b).}$

**2.1** Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (donc base orthonormale pour le produit scalaire canonique), ${}^tY = (y_1 \ \cdots \ y_n)$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ alors ${}^tYY = ||y||^2 = 0 \Longrightarrow y = 0_{\mathbb{R}^n}$ : $\boxed{{}^tYY = 0 \Longrightarrow Y = 0.}$

**2.2** Si $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$, ${}^tAAX = 0 \Longrightarrow {}^tX{}^tAAX = ||AX||^2 = 0 \Longrightarrow AX = 0$ et $X \in \mathrm{Ker}(A)$ : $\mathrm{Ker}({}^tAA) \subset \mathrm{Ker}(A)$.
Comme il est clair $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}({}^tAA)$ car $AX = 0 \Longrightarrow {}^tAAX = 0$, on a donc $\mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$. Mais avec la formule du rang, $p = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rang}\,(A) = \dim(\mathrm{Ker}({}^tAA)) + \mathrm{rang}\,({}^tAA)$ donc $\boxed{\mathrm{rang}\,({}^tAA) = \mathrm{rang}\,(A).}$

**3.1** Comme la base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est orthonormale, on sait que les coordonnées sont des produits scalaires avec les vecteurs de base donc : $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = (v_j|e_i).}$

**3.2** Si ${}^tAA = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$, on a $b_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} (v_i|e_k)(v_j|e_k)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, $b_{i,j} = (v_i|v_j) = g_{i,j}$ et on a bien $G(v_1, \cdots, v_p) = {}^tAA$. Par construction, on a $\mathrm{rang}\,(A) = \mathrm{rang}\,(v_1, \cdots, v_p)$ et, avec **2.2** : $\boxed{\mathrm{rang}\,\big(G(v_1, \cdots, v_p)\big) = \mathrm{rang}\,({}^tAA) = \mathrm{rang}\,(A) = \mathrm{rang}\,(v_1, \cdots, v_p).}$

**3.3** ($\Longrightarrow$) Si $(v_1, \cdots, v_p)$ est libre, alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_p)$ est de rang $p$ donc $\mathrm{rang}\,(A) = \mathrm{rang}\,({}^tAA) = p$ avec la question **2.2** donc ${}^tAA = G(v_1, \cdots, v_p) \in GL_p(\mathbb{R})$ et on a bien $\Gamma(v_1, \cdots, v_p) \neq 0$.
($\Longleftarrow$) Si $\Gamma(v_1, \cdots, v_p) \neq 0$, ${}^tAA$ est inversible donc $\mathrm{rang}\,({}^tAA) = \mathrm{rang}\,(A) = p$ donc $(v_1, \cdots, v_p)$ est libre.
On en conclut que : $\boxed{(v_1, \cdots, v_p) \text{ est libre si et seulement si } \Gamma(v_1, \cdots, v_p) \neq 0.}$

**3.4** Supposons que $p = n$, alors $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre $\Longleftrightarrow$ $(v_1, \cdots, v_n)$ est une base de $E$ $\Longleftrightarrow$ $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
Ainsi : $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow \det({}^tAA) = \det(A)^2 > 0 \Longleftrightarrow \Gamma(v_1, \cdots, v_n) > 0$.
On revient au cas général et on pose $F = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p)$ qui est un espace euclidien.
($\Longrightarrow$) Si $(v_1, \cdots, v_p)$ est libre c'est une base de $F$, on peut utiliser le résultat du début de la question car le nombre $p$ de vecteurs est égal à la dimension $p$ de l'espace $F$ et la matrice de Gram de cette famille ne dépend pas de l'espace dans lequel on la considère ($E$ ou $F$). Si $(v_1, \cdots, v_p)$ est libre on a $\Gamma(v_1, \cdots, v_p) > 0$.

On peut aussi prendre une base orthonormale $(v_{p+1},\cdots,v_n)$ de $F^\perp$ et considérer $\mathcal{B}=(v_1,\cdots,v_p,v_{p+1},\cdots,v_n)$ de $E$. D'après le début de la question $\Gamma(v_1,\cdots,v_n)>0$ car $\mathcal{B}$ est une base de $E$ adaptée à la décomposition $E=F\oplus F^\perp$. Or on peut écrire $G(v_1,\cdots,v_n)=\begin{pmatrix} G(v_1,\cdots,v_p) & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p}\end{pmatrix}$ par blocs par définition de $F^\perp$ et car $(v_{p+1},\cdots,v_n)$ est une famille orthonormale. Par blocs, on a donc $\Gamma(v_1,\cdots,v_p)=\Gamma(v_1,\cdots,v_n)>0$.

$(\Longleftarrow)$ Réciproquement, si $\Gamma(v_1,\cdots,v_p)>0$, alors $\Gamma(v_1,\cdots,v_p)\neq 0$ donc $(v_1,\cdots,v_p)$ est libre d'après **3.3**.

Au final : $\boxed{(v_1,\cdots,v_p) \text{ est libre si et seulement si } \Gamma(v_1,\cdots,v_p)>0.}$

# PARTIE 2 : ÉQUIDISTANCE

**4.1** Par exemple, $|t|=|(v_1|v_2)|\leqslant ||v_1||\,||v_2||$ par CAUCHY-SCHWARZ or les vecteurs $v_1$ et $v_2$ sont unitaires par hypothèse donc $|t|\leqslant 1$. Or $t\neq 1$ par hypothèse donc $t\in[-1;1[$. Par formule de polarisation, on a $||v_i-v_j||^2=||v_i||^2+||v_j||^2-2(v_i|v_j)$. Ainsi : $\boxed{\forall (i,j)\in[\![1;m]\!]^2,\ i\neq j \Longrightarrow ||v_i-v_j||=\sqrt{2(1-t)}.}$

**4.2** Comme $(v_1,\cdots,v_m)$ est une solution de $P(m,t)$, on a $G(v_1,\cdots,v_m)=M_{1,t}\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ donc, d'après la question **1** : $\boxed{\Gamma(v_1,\cdots,v_m)=(1-t)^{m-1}\big(1+(m-1)t\big).}$

**5.1** On sait aussi d'après la question **3.4** que puisque $(v_1,\cdots,v_m)$ est libre, on a $\Gamma(v_1,\cdots,v_m)>0$ donc $\big(1+(m-1)t\big)>0$ car on a déjà $(1-t)^{m-1}>0$. On en déduit que $t>\dfrac{-1}{m-1}$ et on a déjà $t<1$ d'après **4.1**. De plus, comme la famille $(v_1,\cdots,v_m)$ est libre dans un espace de dimension $n$, on a $m\leqslant n$.

En conclusion : $\boxed{\text{si } (v_1,\cdots,v_m) \text{ est libre alors } t\in\left]\dfrac{-1}{m-1};1\right[ \text{ et } m\leqslant n.}$

**5.2** $\Gamma(v_1,\cdots,v_m)=0$ d'après **3.3** car $(v_1,\cdots,v_m)$ est liée, et comme $t\neq 1$, on a $t=\dfrac{-1}{m-1}$ d'après **4.2**. De plus, $G(v_1,\cdots,v_{m-1})=M_{1,t}\in\mathcal{M}_{m-1}(\mathbb{R})$ donc $\Gamma(v_1,\cdots,v_{m-1})=(1-t)^{m-2}\big(1+(m-2)t\big)>0$ car $1-t>0$ et $1+(m-2)t=\dfrac{1}{m-1}>0$. Ainsi, d'après **3.4**, on en déduit que $(v_1,\cdots,v_{m-1})$ est libre donc que $m-1\leqslant n$ d'où $m\leqslant n+1$. En conclusion : $\boxed{\text{si } (v_1,\cdots,v_m) \text{ est liée, alors } t=\dfrac{-1}{m-1} \text{ et } m\leqslant n+1.}$

**6.1** Par identité de polarisation : $\forall (i,j)\in[\![1;p]\!]^2,\ i\neq j\Longrightarrow (v_i|v_j)=\dfrac{1}{2}\Big(||v_i||^2+||v_j||^2-||v_i-v_j||^2\Big)=1-\dfrac{d^2}{2}$.

En posant $t=1-\dfrac{d^2}{2}$, on a $t\neq 1$. Par définition : $\boxed{(v_1,\cdots,v_p) \text{ est solution du problème } P\Big(p,1-\dfrac{d^2}{2}\Big).}$

**6.2** Comme $p>n$, $(v_1,\cdots,v_p)$ est liée et $p=n+1$ d'après la question **4.2**. on en déduit $t=\dfrac{-1}{p-1}=-\dfrac{1}{n}$ donc $1-\dfrac{d^2}{2}=-\dfrac{1}{n}$ : $\boxed{p=n+1 \text{ et } d=\sqrt{\dfrac{2(n+1)}{n}}.}$

## PARTIE 3 : FAMILLES OBTUSANGLES

**7** On prend $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (-1,1)$ et $v_3 = (-1,-2)$ de sorte que $(v_1|v_2) = (v_1|v_3) = (v_2|v_3) = -1 < 0$.

$\boxed{\text{La famille } \big((1,0),(-1,1),(-1,-2)\big) \text{ est obtusangle dans } \mathbb{R}^2 \text{ euclidien canonique.}}$

**8** Soit $E = \mathrm{Vect}(e)$ euclidien de dimension 1 (c'est-à-dire $e \neq 0_E$) et $(v_1, \cdots, v_p)$ obtusangle avec $p \geqslant 3$ dans $E$, alors $(v_1, v_2, v_3)$ est clairement obtusangle dans $E$. Or $v_1 = \lambda_1 e$, $v_2 = \lambda_2 e$ et $v_3 = \lambda_3 e$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ et $(v_1|v_2) = \lambda_1\lambda_2||e||^2 < 0$ implique $\lambda_1\lambda_2 < 0$. De même $\lambda_1\lambda_3 < 0$ et $\lambda_2\lambda_3 < 0$. Ceci signifie que les trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ont des signes opposés deux à deux, ce qui est difficilement réalisable !!!! Si $p \geqslant 3$ et si $(v_1, \cdots, v_p)$ est obtusangle, alors il est clair que $(v_1, v_2, v_3)$ est aussi obtusangle ce qui contredit ce qui vient d'être fait. Par l'absurde une famille obtusangle dans $E$ a au maximum $p = 2 \leqslant 1 + 1$ vecteurs : $\boxed{\mathcal{P}_1 \text{ est vraie.}}$

**9.1** Comme par hypothèse on a $p \geqslant 2$ et donc $(v_1|v_p) < 0$, il est clair que $\boxed{v_p \neq 0_E.}$ Alors $\mathrm{Vect}(v_p)$ est une droite et son supplémentaire orthogonal $F$ est donc un hyperplan de $E$ : $\boxed{\dim(F) = n - 1.}$

**9.2** Comme on projette un vecteur sur un hyperplan dont $v_p$ est un vecteur normal non nul, on sait d'après les relations du cours que $\boxed{w_k = v_k - \dfrac{(v_k|v_p)}{||v_p||^2}v_p}$ $\left(\text{en effet } \left(\dfrac{v_p}{||v_p||}\right) \text{ est une base orthonormale de } F^\perp\right)$

On peut le prouver simplement car $v_k = v_k - \dfrac{(v_k|v_p)}{||v_p||^2}v_p + \dfrac{(v_k|v_p)}{||v_p||^2}v_p$ et $\left(v_k - \dfrac{(v_k|v_p)}{||v_p||^2}v_p \middle| v_p\right) = 0$.

**9.3** Soit $(i,j) \in [\![1;p-1]\!]^2$ et $i \neq j$, alors en notant $n_i = \dfrac{(v_i|v_p)}{||v_p||^2}v_p \in F^\perp$ et $n_j = \dfrac{(v_j|v_p)}{||v_p||^2}v_p \in F^\perp$, on a $(v_i|v_j) = (n_i + w_i|n_j + w_j) = (n_i|n_j) + (w_i|w_j)$ car $(w_i, w_j) \in F^2$.
Or $(n_i|n_j) = \dfrac{(v_i|v_p)(v_j|v_p)}{||v_p||^2} > 0$ par hypothèse car $(v_i|v_p) < 0$ et $(v_j|v_p) < 0$ : $(w_i|w_j) = (v_i|v_j) - (n_i|n_j) < 0$.
Au final : $\boxed{(w_1, \cdots, w_{p-1}) \text{ est une famille obtusangle de vecteurs de } F.}$
On en déduit d'après $\mathcal{P}_{n-1}$ que $p - 1 \leqslant n - 1 + 1$ donc $p \leqslant n + 1$ et ainsi que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

**10** $\mathcal{P}_1$ est vraie (initialisation) d'après **8** et $\forall n \geqslant 2$, $\mathcal{P}_{n-1} \Longrightarrow \mathcal{P}_n$ (hérédité) d'après la question **9.3** donc, par principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n \text{ est vraie.}}$

**11.1** Soit $J = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne contenant que des 1. Comme on veut une famille liée telle que $M_{a,b} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n)$ et qui vérifie ${}^tM_{a,b}M_{a,b} = M_{a,b}^2 = M_{1,t}$, on a $M_{1,t}$ non inversible donc $t = -\dfrac{1}{n-1} < 0$ comme dans **5.2**. Ceci revient à $\left(a^2 + (n-1)b^2 = 1 \text{ et } 2ab + (n-2)b^2 = -\dfrac{1}{n-1}\right)$. Si $(a,b)$ est solution, en soustrayant les deux équations, on a $(a-b)^2 = \dfrac{n}{n-1}$ et comme $M_{a,b}^2 = M_{-a,-b}^2$, on peut choisir $a = b + \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$. On reporte dans l'autre équation pour avoir $\left(\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}\,a - 1\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow a = \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$ après simplification. On trouve alors $b = \sqrt{\dfrac{n-1}{n}} - \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$. Avec ces valeurs de $a$ et $b$ dépendant de $n$, $M_{a,b}^2 = M_{1,t}$ donc, si $(v_1, \cdots, v_n)$ a pour matrice $M_{a,b}$ dans la base orthonormale $\mathcal{B}$, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $||v_k|| = 1$ (voir sur la diagonale de $M_{1,t}$) et $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $i \neq j \Longrightarrow (v_i|v_j) = t = -\dfrac{1}{n-1} < 0$ donc $(v_1, \cdots, v_n)$ est une famille de vecteurs unitaires de $E$ qui forme une famille liée obtusangle.

On pouvait aussi constater que si $M_{a,b}^2 = M_{1,t}$ avec $t = -\dfrac{1}{n-1}$, alors $M_{a,b}$ n'étant pas inversible, on a d'après **1** $b = -\dfrac{a}{n-1}$ (clairement $a \neq b$) donc $M_{a,b} = aM_{1,t}$. Cela revient donc à trouver $a$ tel que $a^2M_{1,t}^2 = M_{1,t}$ or $M_{1,t} = tJ + (1-t)I_n$ donc $M_{1,t}^2 = (nt^2 + 2t(1-t))J + (1-t)^2 I_{n+1}$ qui nous conduit à prendre $\boxed{a = \sqrt{\dfrac{1}{1-t}} = \sqrt{\dfrac{n-1}{n}} \text{ et donc } b = -\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}} = \sqrt{\dfrac{n-1}{n}} - \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}.}$

**11.2** On donne une matrice "triangulaire supérieure" telle que les produits scalaires de deux de ses colonnes est strictement négatif ; par exemple $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w_1, \cdots, w_{n+1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n & -1 \end{pmatrix}$ et on vérifie que les produits scalaires de deux colonnes distinctes valent $-1 < 0$.