DEVOIR 17 : ESPACES PRÉHILBERTIENS

PSI 1 2024-2025 **mardi 21 janvier 2025**

QCM

1 *Orthogonaux : soit* E *un espace préhilbertien réel et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E

1.1 $F \subset G \Longrightarrow F^\perp \subset G^\perp$

1.2 $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$

1.3 $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

1.4 $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$

2 *Projection orthogonale : soit* E *un espace préhilbertien réel dont* F *est un sous-espace de dimension finie avec une base orthonormale* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *;* x *un vecteur de* E, *on note* $p_F(x)$ *le projeté orthogonal de* x *sur* F *et* $d(x,F)$ *la distance de* x *à* F. *On prend aussi* $D = \text{Vect}(a)$ *une droite de* E *(donc* $a \neq 0_E$*) et on pose* $H = D^\perp$

2.1 $d(x,F) = ||p_F(x)||$

2.2 $p_H(x) = \dfrac{(a|x)}{||a||}a$

2.3 Si $y \in F$, $y = p_F(x) \Longleftrightarrow \big(\forall k \in [\![1;n]\!],\ (y|e_k) = (x|e_k)\big)$

2.4 $p_F(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k$

3 *Formes linéaires : soit* E *un espace euclidien et* φ *une forme linéaire sur* E

3.1 $\exists! a \in E,\ \forall x \in E,\ \varphi(x) = (x|a)$

3.2 $\forall \psi \in E^*,\ \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi) \Longleftrightarrow \varphi = \psi$

3.3 $\exists a \in E,\ \text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(a)^\perp$

3.4 $\exists! a \in E,\ \text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(a)^\perp$

4 *Majoration, minoration : soit* $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon* R, $r \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $z_0 \in \mathbb{C}$

4.1 $\big(\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ converge$\big) \Longleftrightarrow R > |z_0|$

4.2 $\big(\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ diverge$\big) \Longrightarrow R \leqslant |z_0|$

4.3 $\big(\forall \rho \in [0;r],\ (a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée$\big) \Longrightarrow r \leqslant R$

4.4 $r \leqslant R \Longrightarrow \big(\forall \rho \in [0;r],\ (a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée$\big)$

Énoncé Énoncer le théorème concernant l'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT.

Preuve Soit E un espace euclidien et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur E.
Montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\forall x \in E,\ \varphi(x) = (a|x)$ (théorème de représentation).

Exercice 1 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose, pour $(P,Q) \in E^2$, $(P|P) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ et on admet que ceci définit un produit scalaire sur E. Déterminer l'orthonormalisée de GRAM-SCHMIDT de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

Exercice 2 Calculer $d = \underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\text{Inf}} \left(\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (2x-y-1)^2}\right)$. On interprétera cette valeur d comme la distance d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique à un plan vectoriel P de $\mathbb{R}^3$.

DEVOIR 17 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 17	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i\cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1		X	X		
2			X	X	
3	X		X		
4		X	X		

1.1 Faux : l'orthogonal inverse les inclusions **1.2** et **1.3** Vrais : du cours **1.4** Faux : on a juste $\subset$.
2.1 Faux : c'est $d(x,F) = ||x - p_F(x)||$ **2.2** Faux : la norme est au carré au dénominateur **2.3** Vrai : car la condition à droite caractérise $y - x \in F^{\perp}$ **2.4** Vrai : car $\mathcal{B}$ est BON de F.
3.1 Vrai : théorème de représentation **3.2** Faux : $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi) \Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \varphi = \alpha\psi$ **3.3** Vrai : $a = 0_E$ si $\varphi = 0$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan si $\varphi \neq 0$ **3.4** Faux : a n'est défini qu'à une constante non nulle près.
4.1 Faux : on n'a que $R \geqslant |z_0|$ **4.2** Vrai : $|z_0| \in E$ dont la borne supérieure vaut R **4.3** Vrai : $[0;r] \subset E$ donc $\mathrm{Sup}([0;r]) = r \leqslant \mathrm{Sup}(E) = R$ **4.4** Faux : on ne peut rien dire de la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Énoncé Soit E un espace préhilbertien et $\mathcal{B} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille libre de E : il existe $(e_1, \cdots, e_n) \in E^n$ telle que :

- $\forall p \in [\![1;n]\!],\ \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$.
- $\mathcal{B}' = (e_1, \cdots, e_n)$ est une famille orthonormale de E.
- $\forall k \in [\![1;n]\!],\ (x_k|e_k) > 0$ (ceci amène aussi l'unicité).

Preuve Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E (il en existe), alors pour tout vecteur $x \in E$, on a $\varphi(x) = \varphi\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x|e_k)\varphi(e_k) = (a|x)$ où $a = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(e_k)e_k$ (existence).
Si $\forall x \in E,\ \varphi(x) = (b|x)$, $(a|x) = (b|x) \Longleftrightarrow (a-b|x)$. En prenant $x = a-b$, $||a-b||^2 = 0 \Longrightarrow a = b$ (unicité).

Exercice 1 On orthogonalise d'abord $P_0 = 1$, puis, comme $(1|X) = 0$ car $\displaystyle\int_{-1}^{1} t\,dt = 0$, on a $P_1 = X$, et enfin $P_2 = X^2 - \dfrac{(1|X^2)}{||1||^2}1 - \dfrac{(X|X^2)}{||X||^2}X$. On a encore $(X|X^2) = 0$, par contre $||1||^2 = 2$ et $(1|X^2) = \dfrac{2}{3}$ donc $P_2 = X^2 - \dfrac{1}{3}$.
On norme : $||X||^2 = \dfrac{2}{3}$ et $||P_2||^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \Big(t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}\Big)dt = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$ donc l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ est la base $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ où $Q_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}X$ et $Q_2 = \sqrt{\dfrac{45}{8}}\Big(X^2 - \dfrac{1}{3}\Big)$.

Exercice 2 Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, le vecteur $v = (x, y, 2x-y)$ décrit le plan P d'équation $2x - y - z = 0$ tel que $P = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(v_3)^{\perp}$ avec $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (0,1,-1)$ et $v_3 = (2,-1,-1)$. Avec $w = (3,-1,1)$, on a $\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (2x-y-1)^2} = ||v - w||$ (produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$ par hypothèse). Ainsi : $d = \underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} ||(x,y,2x-y) - w|| = \underset{v\in P}{\mathrm{Inf}} ||v - w|| = d(w, P)$. On sait d'après le cours qu'alors $d = ||w - p_P(w)||$ où $p_P(w)$ est le projeté orthogonal de w sur le plan P. En notant $p_P(w) = (x_0, y_0, 2x_0 - y_0)$, on doit donc avoir $\big((w - p_P(w)|v_1) = (w - p_P(w)|v_2) = 0\big) \Longleftrightarrow \big(x_0 + 4x_0 - 2y_0 = 5,\ 2y_0 - 2x_0 = -2\big) \Longleftrightarrow (x_0 = 1,\ y_0 = 0)$.
Ainsi $p_P(w) = (1,0,2)$ et $d = ||w - p_P(w)|| = \sqrt{6}$.
On pouvait aussi utiliser la formule (car P est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$) : $d = \dfrac{|(w|v_3)|}{||v_3||} = \dfrac{6+1-1}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.