TD 16 : SÉRIES ENTIÈRES

PSI 1 2024-2025 **vendredi 24 janvier 2025**

16.1 <u>*OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 228II*</u>

a. Montrer que Arcsin est développable en série entière sur un intervalle $]-a;a[$ et donner cette série.
b. Montrer que $f : t \mapsto (\text{Arcsin}(t))^2$ est développable en série entière sur $]-a;a[$.
c. Trouver une équation différentielle vérifiée par f' et en déduire ce développement.

16.2 <u>*OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 104II*</u>

Si R est le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, quel est le mode de convergence de f sur $]-R;R[$?
On note p_n le nombre de partitions de $[\![1;n]\!]$ (rappel : $\{U_1,\ldots,U_p\}$ est une partition de $[\![1;n]\!]$ si et seulement si les U_k sont deux à deux disjointes, non vides, et si leur réunion vaut $[\![1;n]\!]$). On pose $p_0 = 1$. Montrer que $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$; montrer que f a un rayon $R \geqslant 1$ puis calculer $f(x)$.

16.3 <u>*ENS Ulm/Cachan PSI 2018*</u> Gauthier Crosio et Nicolas Ziegler I Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}$. L'objectif est de calculer $L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k}$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
a. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$. Montrer que L existe et est finie.
b. Montrer que $\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ dont on précisera coefficients et rayon.
c. Déterminer $\ln(f(x))$ pour $x \in]0;1[$. En déduire la valeur de L.

16.4 <u>*CCP PSI 2018*</u> Lucie Jandet I Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n$.

16.5 <u>*CCP PSI 2018*</u> Titouan Sancier II Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}}$ converge et calculer sa somme.

16.6 <u>*X PSI 2020*</u> Matthieu Darius I Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.
a. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$.
b. On suppose que $\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f^{(n)}(x)| \leqslant 1$. Que peut-on dire de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$?

16.7 <u>*Mines PSI 2021*</u> Clotilde Cantini II Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^n}{3n+1}$.

16.8 <u>*Mines PSI 2016 et 2021*</u> Adrien Boudy I et Alexandre Marque I

On appelle involution d'un ensemble E toute application $f : E \to E$ telle que $f \circ f = \text{id}_E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des involutions de l'ensemble $[\![1;n]\!]$ et $I_n = \text{card}(A_n)$ avec la convention $I_0 = 1$.
a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.
b. Montrer que $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ est de rayon de convergence $R \geqslant 1$. On définit $\varphi :]-1;1[\to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.
c. Montrer que $\forall x \in]-1;1[,\ \varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$.
d. En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
e. En déduire une expression de I_n sous forme de somme.

16.9 <u>*CCINP PSI 2021*</u> Clément Lérou I Soit $F : x \mapsto -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ et $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
a. Déterminer le domaine de définition D de F.
b. Montrer que $\forall x \in [-1;1],\ F(x) = S(x)$, puis que $\forall x \in]0;1[,\ F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$.

16.10 *Centrale Maths1 PSI 2023* Paul Bats   Soit $f : I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)+1}{\cos(x)}$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{N}[X]$ tel que $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$.

b. Montrer que la série de TAYLOR de f converge sur I.

c. Montrer que f est développable en série entière sur I.

16.11 *Centrale Maths1 PSI 2023* Mathys Bureau et Pierre Dobeli   On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2}\,dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Pour $x \in D$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2}\,dt$. Montrer que g est développable en série entière sur D.

c. Montrer que f est développable en série entière sur D.

16.12 *Centrale Maths1 PSI 2023* Fares Keraudren   Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ ait un rayon de convergence $R = +\infty$. On définit alors l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

a. Montrer que $\forall r > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{2\pi} f\big(re^{it}\big)e^{-ipt}\,dt = 2\pi\, a_p r^p$.

b. Si f est bornée sur $\mathbb{C}$, montrer que $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall r > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ |a_p| \leqslant \dfrac{M}{r^p}$. En déduire que f est constante.

c. S'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant \alpha|z|^q + \beta$, montrer que f est polynomiale.

d. Si $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant e^{\mathrm{Re}\,(z)}$, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = ke^z$.

16.13 *Mines PSI 2023* Arthur Melnitchenko II   Soit $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

a. Montrer (C) : pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k \underset{+\infty}{\sim} n\ell$.

b. Déterminer un équivalent de u_n et en déduire le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.

c. Calculer $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

16.14 *Mines PSI 2023* Paul Picard II   Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{th}\,(t)}{t^2}\,dt$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$.

b. f est-elle continue en -1 si on pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$? Montrer que $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\ln(1-x)$.

16.15 *Mines PSI 2023* Elae Terrien I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note v_n le nombre de n-uplets $(a_1,\cdots,a_n)$ tels que :

$$\bullet\ \forall k \in [\![1;n]\!],\ a_k = \pm 1 \quad \bullet\ \sum_{k=1}^{n} a_k = 0 \quad \bullet\ \forall p \in [\![1;n]\!],\ \sum_{k=1}^{p} a_k \geqslant 0.$$

a. Justifier que $v_{2n+1} = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Par convention, on pose $v_0 = u_0 = 1$. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_{2n}$.

b. Calculer u_1, u_2, u_3.

c. Trouver, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation liant $u_{n+1}, u_n, \cdots, u_1, u_0$.

d. En s'intéressant à $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$, trouver une expression simple de u_n.

16.16 *CCINP PSI 2023* Rémi Darrieumerle I et Chloé Vagner I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition. Déterminer un équivalent de f en 1^-.