# TD 17 : VARIABLES ALÉATOIRES

**PSI 1 2024-2025** **jeudi 06 février 2025**

**17.1** *Centrale Maths1 PSI 2016* Marie Rebière Soit $X$, $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in ]0;1[$. On pose $q = 1 - p$, $T = \mathrm{Min}(X, Y)$ et $Z = |X - Y|$.

**a.** Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(T \geqslant k)$. En déduire la loi de $T$.

**b.** Donner $\mathbb{E}(X)$. Calculer $\mathbb{E}\big(1/X\big)$.

**c.** Calculer $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z)$. Indication : on pourra dissocier les cas $z = 0$ et $z \geqslant 1$.

**d.** En déduire que $T$ et $Z$ sont indépendantes.

**17.2** *CCP PSI 2018* Titouan Sancier I

On considère une urne à $n \geqslant 2$ boules. On réalise des tirages avec remise.
On note $X_n$ le premier rang tel qu'une autre boule que la première soit tirée.
**a.** Montrer que $X_n$ est une variable aléatoire discrète et déterminer la loi de $X_n$.
**b.** Montrer que $X_n$ admet une espérance. La calculer. Trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.
Soit $Y_n$ le premier rang tel que toutes les boules de l'urne aient été tirées au moins une fois.
**c.** Déterminer la loi de $Y_2$. Déterminer la loi de $Y_3$.

**17.3** *CCP PSI 2018 et 2019* Martin Gros II et Thomas Méot II

Soit $A_1, A_2, A_3$ trois personnes qui rentrent dans une poste qui contient deux guichets. $A_1$ et $A_2$ sont servis en premier et $A_3$ patiente. On note $X_i$ (pour $i \in [\![1;3]\!]$) la variable aléatoire qui compte le temps que met une personne à être servie. On donne la loi de chaque $X_i$ : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_i = k) = (1-p)p^k$ avec $p \in ]0;1[$.
On note $Y$ la variable aléatoire qui compte le temps qu'un des deux guichets met à se libérer (temps pour que $A_3$ accède au guichet) et $Z$ la variable aléatoire qui compte le temps que $A_3$ met à sortir de la poste.
**a.** Déterminer la fonction de répartition de $Y$, puis déterminer sa loi de probabilité.
Indication : on pourra s'intéresser à $\mathbb{P}(Y > k)$.
**b.** Déterminer $Z$ en fonction de $X_3$ et $Y$. En déduire la loi de $Z$.
**c.** Déterminer le temps moyen que $A_3$ met à sortir de la poste.

**17.4** *ENS Cachan PSI 2021* Guillaume Touly On définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et qui sont mutuellement indépendantes.

- On définit $T$ tel que $T = n$ si $n$ est le plus petit entier tel que $X_n = 0$ et $T = +\infty$ s'il n'existe aucun entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $X_p = 0$.
- On définit $T'$ tel que $T' = n$ si $n$ est le plus petit entier strictement positif tel que $X_n = X_{n-1} = 1$ et $T' = +\infty$ s'il n'existe aucun entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_p = X_{p-1} = 1$.

**a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(T = n)$ et $\mathbb{P}(T > n)$. Calculer $\mathbb{P}(T = +\infty)$. Calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.

**b.** Calculer $\mathbb{P}(T' = k)$ pour $k \in [\![1;4]\!]$. Montrer, pour $n \geqslant 2$, que $\mathbb{P}(T' > n) \leqslant \dfrac{3\,\mathbb{P}(T' > n-2)}{4}$.

**c.** Montrer que $T'$ est presque sûrement finie ; c'est-à-dire que $\mathbb{P}(T' = +\infty) = 0$.

**d.** Montrer, pour $n \geqslant 2$, que $\mathbb{P}(T' = n) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(T' = n-1) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(T' = n-2)$.

**e.** Montrer que $T'$ est d'espérance finie et calculer cette espérance (sans calculer $\mathbb{P}(T' = n)$).

**17.5** *Centrale Maths1 PSI 2023* Olivier Farje Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et une urne avec initialement $N$ boules rouges. On tire successivement dans l'urne : - si on tire une boule rouge, on la remplace par une verte - si on tire une boule verte, on la remet dans l'urne.
On note $X_p$ le nombre de boules rouges dans l'urne à l'issue du $p$-ième tirage. On pose $X_0 = N$. On note $Y$ le rang où on enlève la dernière boule rouge ($Y = 0$ si ce rang n'existe pas).
**a.** Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ \forall k \geqslant 0,\ \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k+1)$.
**b.** En déduire une relation entre $\mathbb{E}(X_{n+1})$ et $\mathbb{E}(X_n)$.
**c.** Donner $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de $n$ et $N$ et en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ et de $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X_N)}{N}$.
**d.** Montrer que $(Y = 0) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1)$, puis en déduire la valeur de $\mathbb{P}(Y = 0)$.

**17.6** *Centrale Maths1 PSI 2023* Gabriel Hofman On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \;\middle|\; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
**a.** Quelles sont les matrices de $F$ qui sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ?
**b.** Quelles sont les matrices de $F$ dont l'endomorphisme canoniquement associé est un projecteur orthogonal ?
Soit $X, Y, Z$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[\![1; 6]\!]$.
**c.** Quelle est la probabilité que $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & X \end{pmatrix}$ soit inversible ?

**17.7** *Centrale Maths1 PSI 2023* Antoine Vallade

Soit $\lambda > 0$ et $X$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé et suivant toutes la loi de $X$. On pose $N = \mathrm{Inf}\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n > X_0\}$ si $\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n > X_0\} \neq \emptyset$ et $N = +\infty$ sinon..
**a.** Montrer à l'aide de la formule de Taylor reste intégral que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X > k) \leqslant \dfrac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$.
**b.** La variable aléatoire $N$ admet-elle une espérance finie ? Montrer que $N$ est presque sûrement finie.

**17.8** *Mines PSI 2023* Lilian Dupouy II

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à une urne contenant $n$ boules non discernables numérotées de $1$ à $n$. On effectue des tirages et, à chaque tirage, on supprime de l'urne les boules dont le numéro est supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note $X_n$ le nombre de tirages nécessaires pour vider entièrement l'urne.
**a.** Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$. Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$.
**b.** Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**17.9** *CCINP PSI 2023* Marius Desvalois I

Soit $\alpha \in ]0; 1[$, $\lambda > 0$ et $X, Y$ deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on ait $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!}$ si $0 \leqslant j \leqslant i$ et $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0$ sinon. On pose $Z = X - Y$.
**a.** Déterminer la loi de $X$. Déterminer la loi de $Y$. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
**b.** Déterminer la loi de $Z$. Pour $(j, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y = j)$. Conclure.

**17.10** *CCINP PSI 2023* Jonathan Filocco I

Soit $X$ la variable aléatoire correspondant au nombre de boules (numéros de $1$ à $X$) dans une urne, telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ avec $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = i) = \frac{i}{2^{i+1}}$. On procède à un tirage et on note $Y$ le numéro de la boule tirée.
**a.** Montrer que la définition de la loi de $X$ est cohérente. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
**b.** Déterminer la loi conjointe de $X$ et $Y$. Calculer la loi de $Y$ et son espérance.