TD 18 : VARIABLES ALÉATOIRES

PSI 1 2024-2025 **vendredi 07 février 2025**

18.1 *Mines PSI 2016* Alexandre Janot II Une urne contient initialement b jetons blancs et a jetons d'autres couleurs. On tire successivement des jetons sans les remettre dans l'urne jusqu'à obtenir tous les jetons blancs. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages pour arrêter l'expérience.

a. Montrer que $\sum\limits_{k=p}^{q}\binom{k}{p}=\binom{q+1}{p+1}$.

b. Trouver la loi de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

18.2 *E3A PSI 2016* Antoine Badet III Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p\in]0;1[$. Déterminer la loi de $Y=\left\lfloor\dfrac{X+1}{2}\right\rfloor$.

18.3 *Mines PSI 2015 et ENS Cachan PSI 2017* Ludovic Péron et Tom Huix I

Soit $p\in]0;1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $Y_n=X_nX_{n+1}$ et $Z_n=\sum\limits_{k=1}^{n}Y_k$.

a. Donner la loi de Y_n, son espérance, sa variance. Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?

b. Calculer $\mathbb{E}(Y_nY_m)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{Z_n}{n}\right)$. Montrer que : $\exists C\geqslant 0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{V}(Z_n)\leqslant Cn$.

c. En déduire que : $\forall\varepsilon>0,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{Z_n}{n}-p^2\right|\geqslant\varepsilon\right)=0$.

18.4 *Centrale Maths1 PSI 2017* Joseph Dumoulin

Soit $a_1,\cdots,a_n$ des réels et $X_1,\cdots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs 1 et -1 de manière équiprobable. On pose $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kX_k$.

a. Calculer l'espérance m_n et l'écart-type σ_n de la variable aléatoire S_n.

b. Montrer que pour tout réel t, on a $\operatorname{ch}(t)\leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.

c. En déduire que $\forall\lambda>0,\ \mathbb{E}(e^{\lambda S_n})\leqslant e^{\frac{\lambda^2\sigma_n^2}{2}}$.

d. En déduire la meilleure majoration possible de $\mathbb{P}(S_n\geqslant x)$ pour un réel $x>0$.

18.5 *CCP PSI 2017* Adrien Cassagne II

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

a. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X\leqslant n)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty}e^{-t}t^n\,dt$.

b. En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty}e^{-t}t^n\,dt$ quand n tend vers $+\infty$.

c. Donner la fonction génératrice G_X de X. Que valent $G_X(1)$ et $G_X(-1)$?

d. En déduire la probabilité que X soit paire.

e. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X suivant une loi uniforme sur $\{1,2\}$. Calculer $\mathbb{P}(XY \text{ paire})$.

18.6 *Mines PSI 2021* Maëva Berland I

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0;1[$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n=X_{n-1}X_n$ et $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i$.

a. Donner la loi de Y_n, son espérance, sa variance.

b. Exprimer la covariance Y_iY_j si $(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Les Y_n sont-ils deux à deux indépendants ?

c. Donner une majoration de $\mathbb{P}(|S_n-\mathbb{E}(S_n)|\geqslant\varepsilon)$ pour $\varepsilon>0$.

d. $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie-t-elle les hypothèses de la loi faible des grands nombres ? Satisfait-elle ses résultats ?

18.7 *CCINP PSI 2021* Mehdi Hamdaoui I

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui suivent la même loi, qui admettent une espérance et une variance finies, et telles que $Z = X+Y+1$ suive la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
a. Déterminer, en fonction de p, l'espérance et la variance de X.
b. Trouver la fonction génératrice de X. Déterminer la loi de X.

18.8 *ENS Cachan PSI 2021 et 2023* Aloïs Doucet et Lilian Dupouy

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2. On pose $E = \mathrm{Vect}(X_1, \cdots, X_n)$ et on définit $f : E^2 \to \mathbb{R}$ par $f(X,Y) = \mathbb{E}(XY)$.
On pose $G = \{X \in E \mid \mathbb{E}(X^2) = 0\}$ et on considère un sous-espace vectoriel F de E tel que $E = F \oplus G$.
a. Montrer que f est bilinéaire, symétrique et positive. Est-elle définie positive ?
b. La fonction $f|_{F^2}$ est-elle un produit scalaire sur F ?
c. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $(X,Y) \in F^2$.
d. Soit Z une variable aléatoire discrète réelle positive admettant un moment d'ordre 2 et telle que $\mathbb{E}(Z^2) > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(Z > 0) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(Z)^2}{\mathbb{E}(Z^2)}$.
On note G un graphe non orienté, S l'ensemble de ses sommets (numérotés de 1 à n). Chaque sommet peut être relié aux autres, de manière indépendante, la probabilité d'une liaison est $p_n \in]0;1[$. Soit i et j deux sommets distincts de ce graphe, on note $X_{i,j} = 1$ si une arête existe entre ces sommets et $X_{i,j} = 0$ sinon : la variable aléatoire $X_{i,j}$ suit donc une loi de Bernoulli de paramètre p_n. On note Z_n le nombre de sommets isolés (aucune arête ne part de ce sommet) : $Z_n = \mathrm{card}\big(\{i \in [\![1;n]\!] \mid \forall j \in [\![1;n]\!] \setminus \{i\},\ X_{i,j} = 0\}\big)$.
e. On prend un sommet i, quelle est la loi régissant le nombre d'arêtes issues de ce sommet ?
f. Montrer que $\mathbb{E}(Z_n) = n(1-p_n)^{n-1}$.
g. Comportement asymptotique de $\mathbb{E}(Z_n)$ quand n tend vers $+\infty$ en fonction de $c > 0$ tel que $p_n = c\dfrac{\ln(n)}{n}$.
h. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 0$ si $\exists c > 1,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ p_n \geqslant c\dfrac{\ln(n)}{n}$ (on écrit $p_n \gg \dfrac{\ln(n)}{n}$).
i. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 1$ si $\exists c < 1,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ p_n \leqslant c\dfrac{\ln(n)}{n}$ (on écrit $p_n \ll \dfrac{\ln(n)}{n}$).

18.9 *Centrale Maths1 PSI 2023* Juan Dupierris On étudie un dé équilibré avec quatre faces marquées 0, 1, 1, 2. On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois ce dé et on note X_n (resp. Y_n) le nombre de 1 (resp. 0) obtenus.
a. Donner les lois de X_n et Y_n. Quelles sont leurs espérances ?
b. Donner la loi de $X_n + Y_n$. Donner la loi de (X_n, Y_n). Donner la covariance de X_n et Y_n.

18.10 *Mines PSI 2023* Paul-Antoine Baury-Carpentier I Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lceil x \rceil$ le plus petit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \leqslant k$. Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive admettant une espérance finie et on pose $Y = \lceil X \rceil$.
a. Montrer que $0 \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.
b. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de variables aléatoires discrètes réelles positives telle que X_0 admet une espérance finie et telle que $\forall \omega \in \Omega,\ \lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n > k) = 0$.
c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$.

18.11 *CCINP PSI 2023* Sacha Meslier I On joue à pile ou face, avec une probabilité $p \in]0;1[$ de faire pile et $1-p$ de faire face. On effectue $n \geqslant 2$ lancers. On note N le nombre de séries obtenues. Par exemple $N = 3$ si, pour $n = 10$, on a les tirages PPPPFFFFPP et $N = 5$ si, pour $n = 10$, on tire FPPFFPPPFF. Pour $k \in [\![1;n-1]\!]$, on définit I_k telle que $I_k = 0$ si les lancers k et $k+1$ donnent des résultats identiques et $I_k = 1$ sinon.
a. Déterminer $N(\Omega)$. Calculer $\mathbb{P}(N = 1)$ et $\mathbb{P}(N = 2)$.
b. Pour $k \in [\![1;n-1]\!]$, donner la loi de I_k.
c. Écrire N en fonction des I_k. Déterminer l'espérance et la variance de N.