TD 16 : SÉRIES ENTIÈRES

PSI 1 2024-2025 **vendredi 24 janvier 2025**

16.1 **a.** En intégrant le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \text{Arcsin}'(x)$, on a vu dans le cours que $\forall x \in]-1;1[,\ \text{Arcsin}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n+1}$ si $b_n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}$.

b. Par produit de Cauchy de séries numériques absolument convergentes, $f : t \mapsto (\text{Arcsin}(t))^2$ est développable en série entière sur $]-1;1[$ mais les coefficients ne sont pas faciles à calculer avec cette méthode.

c. Par contre, $f'(t) = 2\dfrac{\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ donc $f''(t) = \dfrac{2}{1-t^2} + 2\dfrac{t\,\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}(1-t^2)}$ donc $(1-t^2)f''(t) = 2 + tf'(t)$ pour $t \in]-1;1[$. Comme f est paire et $f(0) = 0$, il existe une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $a_0 = 0$ et $\forall t \in]-1;1[,\ f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n}$. Alors $tf'(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2na_n t^{2n}$, $f''(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+2)(2n+1)a_{n+1}t^{2n}$ et $t^2f''(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n t^{2n}$. En reportant dans l'équation différentielle et en regroupant les termes, on a donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\big((2n+2)(2n+1)a_{n+1} - 2n(2n-1)a_n - 2na_n\big)t^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\big((2n+2)(2n+1)a_{n+1} - 4n^2a_n\big)t^{2n} = 2$ et par unicité des coefficients (rayon $1 > 0$), on a $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \dfrac{4n^2}{(2n+2)(2n+1)}a_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{4(n-1)^2}{(2n)(2n-1)}a_{n-1} = \dfrac{4(n-1)^2}{(2n)(2n-1)} \times \dfrac{4(n-2)^2}{(2n-2)(2n-3)}a_{n-2} = \dots$ et on continue jusqu'à $a_2 = \dfrac{4\times 1^2}{4\times 3}a_1$ pour avoir $a_n = \dfrac{4^{n-1}(n-1)^2\times\cdots\times 1^2}{(2n)\times(2n-1)\times\cdots\times 4\times 3}a_1 = \dfrac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}$. On peut bien sûr prouver cette relation par récurrence une fois qu'on l'a conjecturée.

Ainsi, $\forall t \in]-1;1[,\ f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!}t^{2n}$. Comme dit plus haut, on peut aussi calculer, par produit de Cauchy, $f(t)^2 = f(t)\times f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2(2k+1)} \times \dfrac{(2(n-k-1))!}{4^{n-k-1}((n-k-1)!)^2(2n-2k-1)}\Big)x^{2n}$ car le terme en x^{2n} provient du produit des termes en b_kx^{2k+1} et $b_{n-k-1}x^{2n-2k-1}$ (pour $k \in [\![0;n-1]\!]$) de la série entière de la question **a.**. En simplifiant et en identifiant par unicité du développement en série entière, on obtient la relation bizarre : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!} = \dfrac{1}{4^{n-1}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\binom{2k}{k}\binom{2n-2k-2}{n-k-1}}{(2k+1)(2n-2k-1)}$.

16.2 On sait que $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_nx^n$ converge absolument pour $x \in]-R;R[$. Mais il n'y pas convergence normale ni uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ en général sur $]-R;R[$ si $u_n : x \mapsto b_nx^n$ (exemple de la série géométrique de rayon $R = 1$). Par contre, il y a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ sur tout segment inclus dans $]-R;R[$.

Soit $n \geqslant 1$ et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble de toutes les partitions de $[\![1;n]\!]$ de sorte que $p_n = \text{card}(\mathcal{P}_n)$.

Si $n = 1$, $\mathcal{P}_1 = \{\{\{1\}\}\}$ donc $p_1 = 1$.

Si $n = 2$, $\mathcal{P}_2 = \{\{\{1,2\}\},\{\{1\},\{2\}\}\}$ donc $p_2 = 2$.

Si $n = 3$, $\mathcal{P}_3 = \{\{\{1,2,3\}\},\{\{1,2\},\{3\}\},\{\{1,3\},\{2\}\},\{\{2,3\},\{1\}\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\}\}$ donc $p_3 = 5$.

Pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_{n+1} = \bigcup_{j=0}^{n} \mathcal{P}_{n+1,j}$ avec $\mathcal{P}_{n+1,j} = \{\{U_1,\ldots,U_p\} \in \mathcal{P}_{n+1} \mid \text{card}\,(U_i) = j+1 \text{ si } n+1 \in U_i\}$. En effet, l'élément $n+1$ appartenant à $[\![1;n+1]\!]$, il appartient à une seule partie U_i (avec $i \in [\![1;p]\!]$) de la partition $\{U_1,\ldots,U_p\}$ de $[\![1;n+1]\!]$ et le cardinal de U_i est au moins égal à 1 et au maximum égal à $n+1$ donc $\text{card}\,(U_i) = j+1$ avec $j \in [\![0;n]\!]$. Cette réunion est disjointe donc $\{\mathcal{P}_{n+1,0},\cdots,\mathcal{P}_{n+1,n}\}$ est une partition de $\mathcal{P}_{n+1}$ (mise en abîme) donc $p_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \text{card}\,(\mathcal{P}_{n+1,j})$.

Pour $j \in [\![0;n-1]\!]$ et pour construire un élément de $\mathcal{P}_{n+1,j}$, protocole de choix :

- on choisit les j éléments qui vont être avec $n+1$ dans la partie U_i de la partition : $\binom{n}{j}$ choix.
- il reste $n+1-(j+1) = n-j$ entiers dans $[\![1;n+1]\!] \setminus U_p$ qu'il faut partitionner : on peut le faire de p_{n-j} façons par construction (seul le nombre de termes à partitionner compte).

Par conséquent, $\text{card}\,(\mathcal{P}_{n+1,j}) = \binom{n}{j} p_{n-j}$. C'est aussi vrai pour $j = n$ par convention car $p_0 = 1$ et $\mathcal{P}_{n+1,n} = \{\{[\![1;n+1]\!]\}\}$ donc $\text{card}\,(\mathcal{P}_{n+1,n}) = 1 = \binom{n}{n} p_0$. Alors, $\forall j \in [\![0;n]\!],\ \text{card}\,(\mathcal{P}_{n+1,j}) = \binom{n}{j} p_{n-j}$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, il vient $p_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \text{card}\,(\mathcal{P}_{n+1,j}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p_{n-j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$ en posant $k = n-j$.

On a même $p_1 = 1 = \binom{0}{0} p_0$ par convention d'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$.

On a $p_0 = p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$, $p_4 = 15 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} p_k = p_0 + 3p_1 + 3p_2 + p_3$. On constate que $0 \leqslant p_n \leqslant n!$ pour $n \in [\![0;4]\!]$. Soit $n \geqslant 2$ tel que $\forall k \in [\![0;n]\!],\ 0 \leqslant p_k \leqslant k!$, alors $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$ donc $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leqslant n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e\,n! \leqslant (n+1)!$ car $e \sim 2,7 \leqslant n+1$.

Par principe de récurrence forte, on en déduit que $\forall n \geqslant 0,\ 0 \leqslant p_n \leqslant n!$, c'est-à-dire que $0 \leqslant \frac{p_n}{n!} \leqslant 1$. Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ est égal à 1, par comparaison, on trouve $R \geqslant 1$.

$\forall x \in]1;1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_{n+1}}{n!} x^n$ après changement d'indice. Ainsi, avec la relation de récurrence trouvée ci-dessus, ceci se transforme en $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} \Big) x^n$. Par produit de Cauchy, puisque le rayon de $\sum_{n \geqslant 0} \frac{p_k}{k!} x^k$ est au moins égal à 1 et que celui de $\sum_{k \geqslant 0} \frac{x^k}{k!}$ vaut $+\infty$, on a $\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = e^x f(x)$. On intègre classiquement, $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1;1[,\ f(x) = \lambda e^{e^x}$. Or $f(0) = p_0 = 1$ donc $\lambda = \frac{1}{e}$. Par conséquent $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = e^{e^x - 1}$. Puisque la fonction f est développable en série entière (au moins sur $]-1;1[$ mais certainement sur $\mathbb{R}$), on sait que $\forall x \in]1;1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$ ce qui donne, en identifiant les coefficients de cette série entière : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = f^{(n)}(0)$.

16.3 **a.** On calcule les premiers termes : $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{7}{24}$. Soit $A(n) =$ "$\forall k \in [\![0;n]\!],\ 0 < a_k \leqslant 1$".

Initialisation : $0 < a_0 = 1 \leqslant 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A(n)$ soit vraie, alors $0 < a_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+2}$ par hypothèse, donc $0 < a_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{n+1}{n+1} = 1$. Par principe de récurrence que $\forall k \in [\![0;n]\!],\ 0 < a_k \leqslant 1$.

Ainsi, le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est supérieur à celui de $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$, d'où $R \geqslant 1$.
Comme $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge donc L existe et $L = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

b. f est de classe C^∞ sur $]-1;1[$. Pour $x \in]-1;1[$, $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}x^n$. Or $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+2}x^n$ est de rayon 1. Par produit de CAUCHY, $\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2}x^n\right)$.

c. Pour $x \in]0;1[$, posons $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2}x^n = \frac{1}{x^2}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2}x^{n+2}\right) = -\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$. f est solution sur $]0;1[$ de l'équation différentielle $y' = g(x)y$ dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{G(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et G est une primitive sur $]0;1[$ de g. On trouve par intégration par parties que $G : x \mapsto -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)+x}{x}$ convient. De plus, comme les a_n sont strictement positifs, f est strictement positive sur $]0;1[$ donc $\lambda > 0$ et $\ln(f(x)) = \ln(\lambda) - \ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)+x}{x}$. En faisant tendre x vers 0^+, on trouve que $\ln(\lambda) = 0$ donc on a la relation $\forall x \in]0;1[,\ \ln(f(x)) = -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)+x}{x}$.
Ainsi, $\ln\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln(2) + 2\left(-\ln(2) + \frac{1}{2}\right) = 1 - \ln(2)$ d'où $L = e^{1-\ln(2)} = \frac{e}{2} \sim 1,36$.

16.4 Posons $a_n = n^{(-1)^n}$, alors $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant n$ (considérer n pair et n impair) et les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} nx^n$ ont classiquement pour rayon 1 car $(nx^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$ et $\left(\frac{x^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$. Ainsi, le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n}x^n$ vérifie $1 \geqslant R \geqslant 1$ d'après le cours : $R = 1$. De plus, comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée, l'intervalle de convergence est $]-1;1[$.
En séparant termes pairs et impairs, on a $\forall x \in]-1;1[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n}x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
Comme $\forall x \in]-1;1[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, en dérivant et en multipliant par x : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$. On sait que $\forall x \in]-1;1[,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \ln(1+x)$ et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n = -\ln(1-x)$.
En sommant : $\forall x \in]-1;1[,\ 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)(= \text{Argth}(x))$.
On pouvait aussi écrire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}x^{2n}$ en séparant termes d'indices pairs et impairs et on reconnaît $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1+x)^2}{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)(= \text{Argth}(x))$.
On pouvait aussi, pour $x \in]-1;1[$, intégrer terme à terme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\right)dt$ (car $\widetilde{[0;x]}$ est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence) : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{ddt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
Ainsi, $\forall x \in]-1;1[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n}x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

16.5 Posons $u_n = \dfrac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}}$, par croissances comparées, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{2^n} \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, comme $(2n^2+3n+1)x^n \underset{+\infty}{\sim} 2n^2x^n$, toujours par croissances comparées, la suite $\big((2n^2+3n+1)x^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x|<1$ donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0}(2n^2+3n+1)x^n$ vaut $R=1$. Posons donc $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n^2+3n+1)x^n$.

On écrit $2n^2+3n+1 = 2(n+2)(n+1)-3(n+1)$ pour avoir $f(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$ (les deux séries convergent) donc $f(x) = 2\Big(\dfrac{1}{1-x}\Big)'' - 3\Big(\dfrac{1}{1-x}\Big)' = \dfrac{4}{(1-x)^3} - \dfrac{3}{(1-x)^2} = \dfrac{1+3x}{(1-x)^3}$. Enfin, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(2n^2+3n+1)\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^n = \dfrac{1}{2}f\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1+(3/2)}{(1/8)} = 10$.

16.6 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $|a_n| = 1$, on a $\left|\dfrac{a_n}{n!}\right| = \dfrac{1}{n!}$ et on sait que le rayon de convergence de la série entière (exponentielle) $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{x^n}{n!}$ vaut $+\infty$. Ainsi, par comparaison, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ vaut$R=+\infty$. Ainsi, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Supposons que $a_0 = 1$ (le cas $a_0 = -1$ s'obtient en considérant $-f$ à la place de f avec les mêmes hypothèses sur f en remplaçant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la suite $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Comme f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle admet des développements limités à n'importe quel ordre qui sont donnés d'après le théorème de TAYLOR-YOUNG par $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$. Or, d'après le cours, $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{a_n}{n!} = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ donc $a_n = f^{(n)}(0)$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}\dfrac{a_k}{k!}x^k + o(x^n)$ (ce qui est une troncature de la série entière). De même, on sait qu'on peut dériver une série entière terme à terme : $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{+\infty}\dfrac{a_n}{(n-m)!}x^{n-m} = \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{a_{k+m}}{k!}x^k$. Par exemple $f^{(m)}(x) \underset{0}{=} a_m + a_{m+1}x + o(x)$.

• Initialisation : comme $f(0) = a_0 = 1$, f est positive localement au voisinage de 0. Avec le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0, on a $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1x + o(x) \underset{0}{=} 1 + a_1x + o(x)$ donc, comme $a_1 \neq 0$, il vient $f(x) - 1 \underset{0}{\sim} a_1x$. Si on avait $a_1 = 1$, alors $f(x) - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc $f(x) - 1$ serait strictement positif au voisinage de 0^+ ce qui est contraire à l'hypothèse $|f(x)| = f(x) \leqslant 1$ si $x > 0$. On conclut ce raisonnement : $a_1 = -1$.

• Hérédité : soit $m \geqslant 1$ et supposons que $\forall n \in [\![1;m]\!],\ a_n = (-1)^n$. Alors $f^{(m)}(x) \underset{0}{=} a_m + a_{m+1}x + o(x)$ donc, par continuité de $f^{(m)}$ en 0, $f^{(m)}$ est du signe de $(-1)^m$ au voisinage de 0 donc $|f^{(m)}(x)| = (-1)^m f^{(m)}(x)$ au voisinage de 0. Or on a vu que $f^{(m)}(x) \underset{0}{=} a_m + a_{m+1}x + o(x)$ donc $|f^{(m)}(x)| \underset{0}{=} 1 + (-1)^m a_{m+1}x + o(x)$. Si on avait $a_{m+1} = (-1)^m$, on aurait alors $|f^{(m)}(x)| \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$ donc $|f^{(m)}(x)| - 1 \underset{0}{\sim} x$ ce qui contredit encore une fois le fait que $\forall x > 0,\ |f^{(m)}(x)| \leqslant 1$. Par l'absurde, on a donc prouvé que $a_{m+1} = (-1)^{m+1}$.

• Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-1)^n$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n!} = e^{-x}$.

En regroupant les deux cas selon a_0, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ et qu'on suppose que $\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f^{(n)}(x)| \leqslant 1$, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $f : x \mapsto e^{-x}$ ou $f : x \mapsto -e^{-x}$.

16.7 Comme $\left(\dfrac{(-1)^n x^n}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$ par croissances comparées, le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n x^n}{3n+1}$ vaut $R = 1$. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{3n+1}$ pour $x \in]-1;1]$. En effet, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n x^n}{3n+1}$ converge si $x \in]-1;1[$ d'après le cours et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ converge aussi par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{3n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers 0. Par contre, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{3n+1}$ diverge car $\dfrac{1}{3n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$ et que la série harmonique diverge. Posons $g(x) = xf(x^3)$, alors $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$. Le rayon de cette série entière est aussi 1, on sait donc que g est dérivable sur $]-1;1[$ et que $g'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} = \dfrac{1}{1+x^3}$. Ainsi, puisque $g(0) = 0$, par le théorème fondamental de l'intégration, $\forall x \in]-1;1[,\ g(x) = \displaystyle\int_0^x g'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.
Or, comme $(1+X^3) = (1+X)(1-X+X^2)$, on peut décomposer $\dfrac{1}{1+X^3} = \dfrac{a}{(1+X)} + \dfrac{bX+c}{1-X+X^2}$ avec a, b, c des réels. En réduisant au même dénominateur, en identifiant et en résolvant le système, on trouve sans peine $\dfrac{1}{1+X^3} = \dfrac{1}{3(1+X)} + \dfrac{2-X}{3(1-X+X^2)}$. Ainsi, pour $x \in]-1;1[$, en faisant apparaître des dérivées usuelles, $g(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\frac{1}{3(1+t)} + \frac{2-t}{3(1-t+t^2)}\right)dt = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{6}\int_0^x \frac{(2t-1)dt}{1-t+t^2} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1-t+t^2}$. En mettant sous forme canonique, $\dfrac{1}{1-t+t^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \dfrac{(2/\sqrt{3})}{1+(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})^2}$, on a l'expression de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles

$$g(x) = \left[\frac{\ln(1+t)}{3} - \frac{\ln(1-t+t^2)}{6} + \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}\right]_0^x = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

car $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$. On peut maintenant revenir à l'expression de $f(x)$.
Si $x = 0$, $f(x) = 1$. Si $x \neq 0$, soit $\sqrt[3]{x}$ l'antécédent de x par la bijection $y \mapsto y^3$ de $]-1;1[$ dans $]-1;1[$, alors $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} g(\sqrt[3]{x}) = \dfrac{1}{6\sqrt[3]{x}} \ln\left(\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{1-\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{x}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{18\sqrt[3]{x}}$.
Pour aller plus loin, en posant $u_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n x^n}{3n+1}$ et $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ pour $x \in [0;1]$, d'après le critère spécial des séries alternées car $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{3n+1}$ d'où $||R_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant \dfrac{1}{3n+1}$ ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,[0;1]} = 0$ par encadrement et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[0;1]$. Comme toutes les u_n sont continue sur $[0;1]$, f est elle aussi continue sur $[0;1]$ donc $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left[\dfrac{1}{6\sqrt[3]{x}} \ln\left(\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{1-\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{x}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{18\sqrt[3]{x}}\right] = \dfrac{\ln(2)}{3} + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

16.8 **a.** Pour $n \geqslant 1$, on partitionne les involutions σ de $[\![1;n+2]\!]$ en deux catégories :

- celles pour lesquelles $\sigma(n+2) = n+2$ sont au nombre de I_{n+1} car il n'y a pas de choix à faire pour $\sigma(n+2)$ qu'on impose égal à $n+2$, ensuite σ induit alors sur $[\![1;n+1]\!]$ une involution de $[\![1;n+1]\!]$.
- celles telles que $\sigma(n+2) = k \neq n+2$ sont au nombre de $(n+1)I_n$ car pour les choisir de manière bijective, il y a $n+1$ choix pour l'entier k qui est l'image de $n+2$ par σ et, une fois ce choix effectué, cela implique que $\sigma(k) = \sigma(\sigma(n+2)) = n+2$ car σ doit être une involution, et on a alors I_n choix pour finir de déterminer σ qui doit induire sur $[\![1;n+1]\!] \setminus \{k\}$ une involution de cet ensemble à n éléments.

Cette partition implique la relation $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$ pour $n \geqslant 1$ et, comme $I_2 = 2 = 1+1.1 = I_1 + 1.I_0$ avec la convention choisie pour I_0, on a bien : $\forall n \geqslant 0,\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

b. Comme les involutions sont des permutations et qu'il y a $n!$ permutations de $[\![1;n]\!]$, on en déduit que $I_n \leqslant n!$ d'où $0 \leqslant \dfrac{I_n}{n!} \leqslant 1$. Comme la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n$ a pour rayon 1, par comparaison, on a $R \geqslant 1$.

c. Les calculs qui suivent sont valides car le rayon de convergence R est supérieur à 1 : pour $x \in]-1\,;1[$, on a $(1+x)\varphi(x) = \varphi(x) + x\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{I_n}{n!}x^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{I_{n-1}}{(n-1)!}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{I_n + nI_{n-1}}{n!}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{n!}x^n = \varphi'(x)$.

d. On en déduit en intégrant l'équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme normalisée sans second membre, comme une primitive de $x \mapsto 1 + x$ est $x \mapsto x + \dfrac{x^2}{2}$ sur l'intervalle $]-1;1[$, que l'on a $\forall x \in]-1\,;1[,\ \varphi(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$ puisque $\varphi(0) = I_0 = 1$ par convention.

e. Alors $\forall x \in]-1;1[,\ \varphi(x) = \left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{1}{i!}x^i\right) \times \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{1}{j!2^j}x^{2j}\right)$. Ces deux séries ont pour rayon $+\infty$ donc on peut effectuer le produit de CAUCHY et obtenir $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{n!}{i!j!2^j}\right)x^n$. En identifiant (par unicité) les coefficients entre les deux expressions de $S(x)$ sous forme de série entière, $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{I_n}{n!} = \sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{1}{i!j!2^j}$ donc $I_n = \sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{n!}{i!j!2^j}$. Puisque $2j \leqslant n$ et $i = n - 2j$, on a la formule $I_n = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{n!}{(n-2j)!j!2^j}$.

Pour expliquer cette relation de manière combinatoire, on peut constater qu'une involution σ de $[\![1;n]\!]$ est une application telle que pour tout entier x entre 1 et n, on a deux choix :

- soit $\sigma(x) = x$ et x est appelé un point fixe de σ.
- soit $\sigma(x) = y \neq x$ et alors, comme $\sigma^2 = \mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$, on a forcément $\sigma(y) = x$.

Ainsi, si $\sigma \in A_n$, le nombre f de points fixes de σ a la même parité que n de sorte qu'il existe $2j$ entiers de $[\![1;n]\!]$ qui ne sont pas fixes par σ avec $f = n - 2j$ avec $0 \leqslant j \leqslant \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$. On peut donc écrire $A_n = \bigcup\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,j}$ où $A_{n,j} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma \text{ admet } f = n - 2j \text{ points fixes}\}$.

Pour construire une involution σ de $A_{n,j}$:

- on choisit les $n - 2j$ éléments de $[\![1;n]\!]$ qui sont fixes par σ : $\dbinom{n}{n-2j} = \dbinom{n}{2j}$ choix.
- on choisit l'image y du plus petit élément x qui reste : $(2j-1)$ choix (et alors $\sigma(x) = y$ et $\sigma(y) = x$).
- on choisit l'image t du plus petit élément z qui reste : $(2j-3)$ choix etc...

Ainsi $\mathrm{card}\,(A_{n,j}) = \dbinom{n}{2j} \times (2j-1) \times (2j-3) \times \cdots \times 3 \times 1 = \dfrac{n!}{(n-2j)!(2j)!} \times \dfrac{(2j)!}{2^j j!}$ en multipliant en haut et en bas par les termes pairs qui manquent. On retrouve bien $I_n = \mathrm{card}\,(A_n) = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathrm{card}\,(A_{n,j}) = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{n!}{(n-2j)!2^j j!}$.

16.9 **a.** $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $]-\infty;1[$ en la prolongeant par continuité en 0 avec $f(0)=-1$ puisque $\ln(1-t) \underset{0}{\sim} -t$. F est donc la primitive de $-f$ qui s'annule en 0 donc F est au moins définie sur $]-\infty;1[$.
Comme f n'est pas définie sur $[1;+\infty[$, le domaine de définition D de F est inclus dans $]-\infty;1]$.
Si $x=1$, $f(t) \underset{1^-}{\sim} \ln(1-t) \underset{1^-}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\Big)$ donc f est intégrable sur $[0;1[$ et $F(1)$ existe par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Par conséquent, le domaine définition de F est $D=]-\infty;1]$.
b. D'après le cours, $\forall t \in]-1;1[$, $\ln(1-t) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n}$ donc $-f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^{n-1}}{n}$ (marche aussi si $t=0$). Pour $x \in]-1;1[$, en intégrant terme à terme sur le segment $\widetilde{[0;x]}$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, il vient $F(x) = \int_0^x (-f(t))dt = \int_0^x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^{n-1}}{n} dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \dfrac{t^{n-1}}{n} dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2} = S(x)$. Par définition de la convergence d'une intégrale, $F(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} F(x)$. Par continuité de F en -1, on a aussi $F(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} F(x)$.
En posant $u_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2}$, on a $||u_n||_{\infty,[-1;1]} = \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[-1;1]$ et, puisque toutes les u_n sont continues sur $[-1;1]$, S est continue sur $[-1;1]$ donc $F(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = S(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $F(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} S(x) = S(-1) = -\dfrac{\pi^2}{12}$ (classique en séparant les termes d'indices pairs et impairs).
On a bien $\forall x \in [-1;1]$, $F(x) = S(x)$.
Soit $G : [0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$ si $x \neq 0$ et $G(0)=0$. Alors, par opérations et comme $\ln(x)\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées, la fonction G est continue sur $[0;1[$ et dérivable sur $]0;1[$. De plus, F est dérivable sur $]0;1[$ avec $F'(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ donc, pour $x \in]0;1[$,
$(F(x)+F(1-x)-G(x))' = F'(x) - F'(1-x) - G'(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{\ln(1-(1-x))}{1-x} + \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(x)}{1-x} = 0$
avec l'abus de notation usuel. Ainsi, la fonction $x \mapsto F(x)+F(1-x)-G(x)$ est constante sur l'intervalle $]0;1[$, et en utilisant sa continuité en 0, elle vaut donc $F(0)+F(1)-G(0) = F(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.
On a donc la relation $\forall x \in]0;1[$, $F(x)+F(1-x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$.

16.10 **a.** Initialisation : pour $n=0$, $\forall x \in I$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{P_0(\sin(x))}{\cos^{0+1}(x)}$ en prenant $P_0 = X+1$ qui est bien à coefficients dans $\mathbb{N}$ par définition de la fonction f.
Pour $n=1$, en dérivant, on a $f'(x) = \dfrac{\cos^2(x) + (\sin(x)+1)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\sin(x)+1}{\cos^2(x)}$ donc $f^{(1)}(x) = \dfrac{P_1(\sin(x))}{\cos^{1+1}(x)}$ avec $P_1 = X+1$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ et de degré $n=1$ et unitaire.
Hérédité : soit $n \geqslant 1$ tel que $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$ avec $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{N}[X]$ de degré n avec $a_n = 1$. On dérive une fois de plus, toutes les fonctions étant de classe C^∞ sur I, et on obtient la relation $\forall x \in I$, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{\cos(x)P_n'(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} + (n+1)\dfrac{\sin(x)P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$ donc, après réduction au même dénominateur, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{\cos^2(x)P_n'(\sin(x)) + (n+1)\sin(x)P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)} = \dfrac{P_{n+1}(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$ si on définit le polynôme $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n = \sum\limits_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1} - \sum\limits_{k=0}^{n} ka_kX^{k+1} + (n+1)\sum\limits_{k=0}^{n} a_kX^{k+1}$ qui s'arrange en $P_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k - \sum\limits_{k=1}^{n+1}(k-1)a_{k-1}X^k + (n+1)\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_{k-1}X^k$, puis, en regroupant les termes, en $P_{n+1} = a_nX^{n+1} + 2a_{n-1}X^n + \Big(\sum\limits_{k=1}^{n-1}[(k+1)a_{k+1} + (n+2-k)a_{k-1}]X^k\Big) + a_1 \in \mathbb{N}[X]$ qui est bien unitaire, de

degré $n+1$ et à coefficients dans $\mathbb{N}$.

Conclusion : par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{N}[X],\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$. De plus, s'il existait, pour $n \in \mathbb{N}$, un autre polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{Q_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} = \dfrac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$, on aurait $\forall x \in I,\ P_n(\sin(x)) = Q_n(\sin(x))$ donc $P_n = Q_n$ car P_n et Q_n coïncident sur $]-1;1[$ qui est infini. Ainsi, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique et vérifie $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = (1-X^2)P'_n + (n+1)XP_n$ et on a montré lors de la récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n$ est de degré n et unitaire.

b. Soit $x \in J = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ par la formule de Taylor reste intégral. Or $\forall t \in [0;x] \subset J$, on a $(x-t)^n f^{(n+1)}(t) = (x-t)^n \dfrac{P_{n+1}(\sin(t))}{\cos^{n+2}(t)} \geqslant 0$ car $x - t \geqslant 0$, $\sin(t) \geqslant 0$ donc $P_{n+1}(\sin(t)) \geqslant 0$ car $P_n \in \mathbb{N}[X]$ et $\cos(t) > 0$. Ainsi, $\displaystyle\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \geqslant 0$ donc $0 \leqslant S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \leqslant f(x)$ ce qui montre que les sommes partielles de la série de Taylor de f en x sont majorées. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, cette série converge d'après le cours. Ceci montre que le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ vérifie $R \geqslant \dfrac{\pi}{2}$. D'après le cours toujours, la série de Taylor de f converge donc sur l'intervalle ouverte de convergence $]R;R[$ qui contient I.

c. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I,\ g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$, g est bien définie d'après la question précédente. La fonction f est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{\sin(x)+1}{\cos^2(x)} = \dfrac{(\sin(x)+1)^2 + \cos^2(x)}{2\cos^2(x)} = \dfrac{f(x)^2+1}{2}$ donc on obtient $\forall x \in I,\ 2f'(x) = f(x)^2 + 1$. Par la formule de Leibniz, en écrivant $(2f'(x))^{(n)} = (f(x)^2+1)^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a la relation $2f^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$. En particulier en prenant $x = 0$, on a la relation $2f^{(n+1)}(0) = 2P_{n+1}(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0) f^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} P_k(0) P_{n-k}(0)$ donc $2\alpha_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k \alpha_{n-k}}{n+1}$ en posant $\alpha_k = \dfrac{P_k(0)}{k!}$ si $n \geqslant 1$. On a aussi $2f'(0) = f(0)^2 + 1$ donc $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$.

Mais on a $\forall x \in I,\ g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ et, par produit de Cauchy, $\forall x \in I,\ g(x)^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \alpha_{n-k}\Big) x^n$ d'où $g(x)^2 = \alpha_0^2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\Big(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \alpha_{n-k}\Big) x^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\alpha_{n+1} x^n = -1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\alpha_{n+1} x^n$ donc $g(x)^2 = -1 + 2g'(x)$. Les deux fonctions f et g sont donc solutions sur I de l'équation différentielle non linéaire $2y' = y^2 + 1$. Comme on n'a pas au programme de théorème de Cauchy-Lipschitz non linéaire, on va poser les fonctions $a = \text{Arctan} \circ f$ et $b = \text{Arctan} \circ g$ qui sont dérivables sur I comme composées de fonctions dérivables. $\forall x \in I,\ a'(x) = \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{g'(x)}{1+g(x)^2} = b'(x)$ donc, comme I est un intervalle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I,\ a(x) = b(x) + C$. Or $a(0) = b(0) = \text{Arctan}(\alpha_0) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $C = 0$. Ainsi, $\forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ ce qui justifie que f est développable en série entière sur I.

De plus, si on avait $R > \dfrac{\pi}{2}$, alors $f = g$ serait de classe C^∞ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \subset]-R;R[$ donc, en particulier, f serait continue en $\dfrac{\pi}{2}$ alors que $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2^-} f(x) = +\infty$. Ainsi, le rayon R de la série de Taylor de f vaut $R = \dfrac{\pi}{2}$.

16.11 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f_x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_x(t) = \dfrac{t^x}{1+t^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $f_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{-x}}$, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, f_x est intégrable en 0 si et seulement si $-x < 1 \iff x > -1$. De plus, $f_x(t) \iff \dfrac{1}{t^{2-x}}$ donc, de même, f_x est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $2 - x > 1 \iff x < 1$. Comme f_x est positive, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_x$ converge si et seulement si f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire intégrable en 0 et en $+\infty$. Par conséquent, le domaine de définition de f est $D =]-1;1[$.

b. Pour $x \in D$, f_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ d'après **a.** et $f_x(t) = \dfrac{t^x}{1+t^2} = \dfrac{e^{x\ln(t)}}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\ln(t))^n}{n!(1+t^2)}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = \dfrac{(\ln(t))^n x^n}{n!(1+t^2)}$ de sorte que $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\Big) dt$.

(H_1) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $[1;+\infty[$ vers f_x (on en vient).

(H_2) Les fonctions g_n sont continues et intégrables sur $[1;+\infty[$ pour $n \in \mathbb{N}$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $g_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln(t))^n x^n}{n! t^2} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\Big)$ par croissances comparées.

(H_3) La fonction f_x est continue sur $[1;+\infty[$.

(H_4) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} |g_n(t)| dt = \frac{|x|^n}{n!} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{1+t^2} dt \leqslant \frac{|x|^n}{n!} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{t^2} dt$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{t^2} dt$ et, avec $u : t \mapsto (\ln(t))^n$ et $v : t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ qui sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ avec $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on obtient pour $n \geqslant 1$, par intégration par parties, $J_n = [u(t)v(t)]_1^{+\infty} - \displaystyle\int_1^{+\infty} \Big(\frac{1}{t}\Big) n(\ln(t))^{n-1} \Big(-\frac{1}{t}\Big) dt = nJ_{n-1}$. Puisque $J_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^{+\infty} = 1$, on a par une récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = n!$. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} |g_n(t)| dt \leqslant \frac{J_n |x|^n}{n!} = |x|^n$ et la série géométrique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\Big) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^{+\infty} g_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en posant $a_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{1+t^2} dt$ donc g est développable en série entière sur $]-1;1[$.

c. Par la relation de CHASLES, $\forall x \in D$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 f_x(t) dt + \int_1^{+\infty} f_x(t) dt$. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_x(t) dt$, on effectue le changement de variable $t = \dfrac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement décroissante de classe C^1 de $[1;+\infty[$ dans $]0;1]$ et on a $\displaystyle\int_0^1 f_x(t) dt = \int_{+\infty}^1 \frac{(1/u)^x}{1+\frac{1}{u^2}} \Big(-\frac{1}{u^2}\Big) du = \int_1^{+\infty} \frac{u^{-x}}{1+u^2} du = g(-x)$.

Ainsi, $f(x) = g(x) + g(-x)$ donc, comme g est développable en série entière sur $]-1;1[$ d'après **b.**, f l'est aussi et on a $\forall x \in D$, $f(x) = g(x) + g(-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \big(a_n + (-1)^n a_n\big) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_{2n} x^{2n}$. La fonction f est donc paire sur D, ce qu'on pouvait voir directement avec le même changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$.

16.12 **a.** Soit $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, par hypothèse, on a $f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}$ car le rayon de $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ vaut $R = +\infty$. Ainsi, $f\big(re^{it}\big)e^{-ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} e^{ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-p)t} = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)dt$ si $g_n : t \mapsto a_n r^n e^{i(n-p)t}$.
On a $||g_n||_{\infty,[0;2\pi]} = |a_n| r^n$ et $\sum_{n \geqslant 0} a_n r^n$ converge absolument par le lemme d'ABEL car $r < R = +\infty$, donc la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement sur le segment $[0; 2\pi]$. Par le théorème d'intégration terme à terme par convergence normale sur segment, $\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\Big)dt = \sum_{n=0}^{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n(t)dt$. Or on calcule $\int_0^{2\pi} g_n(t)dt = \left[\dfrac{a_n r^n e^{i(n-p)t}}{i(n-p)}\right]_0^{2\pi} = 0$ si $n \neq p$ et $\int_0^{2\pi} g_p(t)dt = 2\pi a_p r^p$.
On en déduit donc que $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall r > 0,\ \int_0^{2\pi} f\big(re^{it}\big)e^{-ipt}dt = 2\pi\, a_p r^p$.

b. Comme f est bornée sur $\mathbb{C}$, posons $M = ||f||_{\infty,\mathbb{C}} = \operatorname{Sup}_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$ et, par inégalité triangulaire sur les intégrales, $\left|\int_0^{2\pi} f\big(re^{it}\big)e^{-ipt}dt\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \big|f\big(re^{it}\big)\big|dt \leqslant 2\pi M$. D'après **a.**, $|2\pi a_p r^p| \leqslant 2\pi M$ donc $|a_p| \leqslant \dfrac{M}{r^p}$. Comme ceci est vrai pour tout $r > 0$, en faisant tendre r vers $+\infty$ dans cette inégalité pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leqslant |a_p| \leqslant \lim_{r \to +\infty} \dfrac{M}{r^p} = 0$ donc $a_p = 0$. Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = a_0$ donc f est constante.

Bien sûr, ceci est faux si f n'est que bornée sur $\mathbb{R}$ comme en témoigne la fonction $\cos$ par exemple.

c. Pour un entier $p \geqslant q + 1$ et un réel $r > 0$, toujours par inégalité triangulaire sur les intégrales, on obtient $\left|\int_0^{2\pi} f\big(re^{it}\big)e^{-ipt}dt\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \big|f\big(re^{it}\big)\big|dt \leqslant \int_0^{2\pi} (\alpha r^q + \beta)dt \leqslant 2\pi(\alpha r^q + \beta)$. Ainsi, avec la question **a.**, on a $|2\pi\, a_p r^p| \leqslant 2\pi(\alpha r^q + \beta)$ d'où $0 \leqslant |a_p| \leqslant \alpha r^{q-p} + \beta r^{-p}$. Encore une fois, comme $\lim_{r \to +\infty} (\alpha r^{q-p} + \beta r^{-p}) = 0$, en passant à la limite, on a $|a_p| = 0$ si $p > q$. Par conséquent, $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{p=0}^{q} a_p z^p$ donc f est polynomiale.

d. Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = f(z)e^{-z}$. Comme f et $\exp$ sont développables en série entière avec un rayon $+\infty$, par produit de CAUCHY, la fonction g est elle-même développable en série entière sur $\mathbb{C}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, $|g(z)| = |f(z)||e^{-z}| = |f(z)|e^{-\mathrm{Re}\,(z)} \leqslant 1$ donc g est bornée sur $\mathbb{C}$ ce qui, avec la question **b.**, montre que g est constante sur $\mathbb{C}$. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ g(z) = f(z)e^{-z} = k$ d'où $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = ke^z$.

16.13 **c.** Soit $\varepsilon > 0$, par convergence de $(_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Mais $\forall n \geqslant n_0,\ \left|\sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - \ell)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - \ell) + \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_k - \ell)\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - \ell)\right| + \sum_{k=n_0}^{n-1} |u_k - \ell|$ par inégalité triangulaire donc $\left|\sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell\right| \leqslant A + \sum_{k=n_0}^{n-1} |u_k - \ell| \leqslant A + \dfrac{(n-n_0)\varepsilon}{2} \leqslant A + \dfrac{n\varepsilon}{2}$ en posant $A = \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - \ell)\right| \geqslant 0$. Or il existe un entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_1,\ A \leqslant \dfrac{n\varepsilon}{2}$ car $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n\varepsilon}{2} = +\infty$ d'où $\forall n \geqslant n_1,\ \left|\sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell\right| \leqslant \dfrac{n\varepsilon}{2} + \dfrac{n\varepsilon}{2} = n\varepsilon$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell \underset{+\infty}{=} o(n) \underset{+\infty}{=} o(n\ell)$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{+\infty}{\sim} n\ell$.

b. On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ donc, comme $\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1} \dfrac{(-1)^k}{k!}$, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. D'après (C), on a donc $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} n\ell$ par télescopage ce qui montre que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc que $u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{e}$.

Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{nx^n}{e}$ est égal à 1 car $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)e}{en}=1$ avec la règle de d'Alembert, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}u_nx^n$ vérifie aussi $R=1$.

c. Si on note $S_k=\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{i!}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, comme $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=S_{n+1}$, on a par télescopage $u_n-u_0=\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=\sum_{k=0}^{n-1}S_{k+1}=\sum_{j=1}^{n}S_j$ en posant $j=k+1$ donc, comme $S_0=1=u_0$, on obtient $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\sum_{k=0}^{n}S_k$. Comme $S_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{e}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}S_nx^n$ vaut 1 comme celui de la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0}x^n$. Par produit de Cauchy, pour x dans l'intervalle ouvert de convergence $]-1;1[$, on a $\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}S_nx^n\Big)\times\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}1.S_k\Big)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n=f(x)$ donc $\frac{g(x)}{1-x}=f(x)$ en posant $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}S_nx^n$. Mais, de même, pour $x\in]-1;1[$, on a $\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\Big)\times\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}1.\frac{(-1)^k}{k!}\Big)x^n$ car le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$ vaut $+\infty$ donc $\frac{e^{-x}}{1-x}=g(x)$. Ainsi, $\forall x\in]-1;1[,\ f(x)=\frac{e^{-x}}{(1-x)^2}$.

16.14 **a.** La fonction $g:t\mapsto\frac{\mathrm{th}\,(t)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et $g(t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{t^2}$ donc la fonction g est intégrable sur $[n;+\infty[$ par comparaison aux intégrales de Riemann d'où l'existence de a_n pour tout entier $n\geqslant 1$. Comme la fonction th est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t\to+\infty}\mathrm{th}\,(t)=1$, $\forall t\in[n;+\infty[,\ \mathrm{th}\,(n)\leqslant\mathrm{th}\,(t)\leqslant 1$ donc, par croissance de l'intégrale, on a $\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{th}\,(n)dt}{t^2}=\Big[\frac{\mathrm{th}\,(n)}{t}\Big]_n^{+\infty}=\frac{\mathrm{th}\,(n)}{n}\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{n}=\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ donc $a_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$. On pouvait aussi poser le changement de variable $t=nu$ et obtenir $\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{th}\,(n)dt}{t^2}=\frac{1}{n}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{th}\,(nu)du}{u^2}$ et montrer facilement que $\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{th}\,(nu)du}{u^2}=\int_1^{+\infty}\frac{du}{u^2}=1$ avec le théorème de convergence dominée en dominant $|f_n(u)|=f_n(u)=\frac{\mathrm{th}\,(nu)}{u^2}\leqslant\varphi(u)=\frac{1}{u^2}$ avec φ continue et intégrable sur $[1;+\infty[$.

Classiquement, par le critère de d'Alembert par exemple, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}$ est égal à 1 donc, par équivalence, celui de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}a_nx^n$ vaut aussi $R=1$.

Comme th est positive et que la suite d'intervalle $\big([n;+\infty[\big)_{n\geqslant 1}$ est décroissante pour l'inclusion, $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 en tant que reste d'une intégrale convergente. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^na_n$ converge et la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1}a_n$ diverge par comparaison à la série harmonique. Ainsi, le domaine de définition de f est $[-1;1[$.

b. Si $x\in[-1;0]$, on vient de voir que la suite $(a_n|x|^n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc $\sum_{n\geqslant 1}a_nx^n$ converge par le critère spécial des séries alternées et $\forall n\geqslant 1,\ |R_n(x)|=\Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_kx^k\Big|\leqslant|a_{n+1}x^{n+1}|\leqslant a_{n+1}$. Ainsi, R_n est bornée sur $[-1;0]$ et $||R_n||_{\infty,[-1;0]}\leqslant a_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. On a donc convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 1}g_n$ sur $[-1;0]$ si $g_n:x\mapsto a_nx^n$ et donc continuité de f sur $[-1;0]$ car les g_n sont continues sur $[-1;0]$.

Comme $f(x)\underset{1^-}{\sim}-\ln(1-x)$ est équivalent à $f(x)+\ln(1-x)\underset{+\infty}{=}o(\ln(1-x))$, on va majorer la différence $f(x)-(-\ln(1-x))$. Comme on sait que $\forall x\in]-1;1[,\ \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, il s'agit de majorer $\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n-\frac{1}{n}\Big)x^n$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\text{th}(n)}{n} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $\left|a_n - \dfrac{1}{n}\right| \leqslant \dfrac{1-\text{th}(n)}{n}$ et $|f(x)+\ln(1-x)| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1-\text{th}(n)}{n} x^n$ pour tout $x \in [0;1]$. Posons $b_n = \dfrac{1-\text{th}(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$, alors $1-\text{th}(n) = 1 - \dfrac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \dfrac{2e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-2n}$ donc $b_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2e^{-2n}}{n} \underset{+\infty}{=} o(e^{-2n})$ et la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 1} e^{-2n}$ converge car $0 < e^{-2} < 1$.

Ainsi, $\forall x \in [0;1]$, $|f(x)+\ln(1-x)| \leqslant B = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ ce qui montre que $f(x) \underset{1^-}{=} -\ln(1-x) + O(1)$ donc $f(x) \underset{1^-}{=} -\ln(1-x) + o(\ln(1-x))$ car $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$ et on conclut bien que $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\ln(1-x)$.

16.15 **a.** On a $v_{2n+1} = 0$ car il n'existe aucun $(2n+1)$-uplet $(a_1, \cdots, a_{2n+1}) \in \{-1,1\}^{2n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{2n+1} a_k = 0$ car tous les a_k sont impairs donc $\sum\limits_{k=1}^{2n+1} a_k$ a la parité de $2n+1$ donc est impair alors que 0 est pair.

b. <u>$n=1$</u> : il n'existe qu'un couple $(a_1,a_2) \in \{-1,1\}^2$ tel que $a_1+a_2=0$ et $\forall p \in [\![1;2]\!]$, $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k \geqslant 0$ et il s'agit de $(1,-1)$. Ainsi, $u_1 = 1$.
<u>$n=2$</u> : il n'y a que deux quadruplets $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \{-1,1\}^4$ tels que $a_1+a_2+a_3+a_4 = 0$ et tels que $\forall p \in [\![1;4]\!]$, $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k \geqslant 0$ et il s'agit de $(1,1,-1,-1)$, $(1,-1,1,-1)$. Ainsi, $u_2 = 2$.
<u>$n=3$</u> : il n'y a que cinq sextuplets $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6) \in \{-1,1\}^6$ tel que $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 0$ et tels que $\forall p \in [\![1;6]\!]$, $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k \geqslant 0$ et il s'agit de $(1,1,1,-1,-1,-1)$, $(1,1,-1,1,-1,-1)$, $(1,1,-1,-1,1,-1)$, $(1,-1,1,1,-1,-1)$ et $(1,-1,1,-1,1,-1)$. Ainsi, $u_3 = 5$.

c. Notons $U_{n+1} = \left\{(a_1,\cdots,a_{2n+1}) \in \{-1,1\}^{2n+1} \;\middle|\; \sum\limits_{k=1}^{2n+1} a_k = 0 \text{ et } \forall p \in [\![1;2n+2]\!],\ \sum\limits_{k=1}^{p} a_k \geqslant 0\right\}$ et, pour $m \in [\![1;n+1]\!]$, on note $U_{n+1}^m = \left\{(a_1,\cdots,a_{2n+2}) \in U_{n+1} \;\middle|\; 2m = \text{Min}\left(\left\{j \in [\![1;n+1]\!] \;\middle|\; \sum\limits_{k=1}^{2j} a_k = 0\right\}\right)\right\}$ (la parité de $\text{Min}\left(\left\{j \in [\![1;n+1]\!] \;\middle|\; \sum\limits_{k=1}^{2j} a_k = 0\right\}\right)$ tient au fait que $\sum\limits_{k=1}^{j} a_k$ a la parité de j). On a la partition $U_{n+1} = \bigsqcup\limits_{m=1}^{n+1} U_{n+1}^m$ de sorte que $u_{n+1} = \text{card}(U_{n+1}) = \sum\limits_{m=1}^{n+1} \text{card}(U_{n+1}^m)$. Traitons trois cas :

- Si $m=1$ et si $(a_1,\cdots,a_{2n+2}) \in U_{n+1}^1$, alors $a_1 = 1$ et $a_2 = -1$ donc U_{n+1}^1 est en bijection avec U_n en envoyant $(1,-1,a_3,\cdots,a_{2n+2})$ sur $(a_3,\cdots,a_{2n+2})$. Ainsi, $\text{card}(U_{n+1}^1) = u_n = u_0 u_n$ car $u_0 = 1$.
- Si $m \in [\![2;n]\!]$ et si $(a_1,\cdots,a_{2n+2}) \in U_{n+1}^m$, alors $u_1 = 1$ et $u_{2m} = -1$ donc l'application qui à $(a_1,\cdots,a_{2n+2}) \in U_{n+1}^m$ associe le couple $\big((a_2,\cdots,a_{2m-1}),(a_{2m+1},\cdots,a_{2n+2})\big)$ définit une bijection entre les ensembles U_{n+1}^m et $U_{m-1} \times U_{n-m+1}$. En effet, la bijection réciproque est l'application qui à $\big((b_1,\cdots,b_{2m-2}),(c_1,\cdots,c_{2(n-m+1)})\big)$ associe $(1,b_1,\cdots,b_{2m-2},-1,c_1,\cdots,c_{2(n-m+1)})$. Ainsi, $\text{card}(U_n^m) = \text{card}(U_{m-1} \times U_{n-m+1}) = \text{card}(U_{m-1}) \times \text{card}(U_{n-m+1}) = u_{m-1}u_{n-m+1}$.
- Si $m = n+1$ et si $(a_1,\cdots,a_{2n+2}) \in U_{n+1}^{n+1}$, alors $a_1 = 1$ et $a_{2n+2} = -1$ donc U_{n+1}^{n+1} est en bijection avec U_n en envoyant $(1,a_2,\cdots,a_{2n+1},-1)$ sur $(a_2,\cdots,a_{2n+1})$. Ainsi, $\text{card}(U_{n+1}^{n+1}) = u_n = u_n u_0$.

Par conséquent, $u_{n+1} = u_0 u_n + \left(\sum\limits_{m=2}^{n} u_{m-1}u_{n-m+1}\right) + u_n u_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$ en posant $k = m-1$.

d. <u>Analyse</u> : supposons que la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n x^n$ a un rayon $R > 0$. Soit alors $f :]-R;R[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$. Pour $x\in]-R;R[$, on a $f(x)^2=\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n\Big)^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}u_ku_{n-k}\Big)x^n$ par produit de CAUCHY donc, avec la relation de **c.**, on a $f(x)^2=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n+1}x^n$ donc $xf(x)^2=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n+1}x^{n+1}=f(x)-1$. Ainsi, $f(x)$ est racine du polynôme $P_x=xX^2-X+1$ dont le discriminant vaut $\Delta=1-4x$. Comme $f(x)\in\mathbb{R}$, on a forcément $\Delta\geqslant 0$ donc $x\leqslant\frac{1}{4}$. Ceci garantit déjà que $R\leqslant\frac{1}{4}$. On donc $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ ou $f(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=u_0=1$. Comme $g:x\mapsto 2xf(x)-1$ est développable en série entière sur $]-R;R[$, elle y est continue et on sait d'après ce qui précède que $\forall x\in]-R;R[,\ g(x)=\pm\sqrt{1-4x}$. La continuité de g et le fait que g ne s'annule pas sur $]-R;R[$ montre que l'on a soit $\forall x\in]-R;R[,\ g(x)=\sqrt{1-4x}$ soit $\forall x\in]-R;R[,\ g(x)=-\sqrt{1-4x}$. Mais comme g vaut -1 en 0, elle est négative sur $]-R;R[$ et on a donc $\forall x\in]-R;R[,\ g(x)=-\sqrt{1-4x}$ donc $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x\neq 0$.

<u>Synthèse</u> : d'après le cours $\forall u\in]-1;1[,\ \sqrt{1+u}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n)!u^n}{(2n-1)(n!)^2 4^n}$ (on le retrouve assez vite avec le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha=\frac{1}{2}$) donc $\forall x\in\Big]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\Big[,\ \sqrt{1-4x}=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!x^n}{(2n-1)(n!)^2}$ ce qui montre que $\forall x\in\Big]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\Big[\setminus\{0\},\ \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!x^{n-1}}{2(2n-1)(n!)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+2)!x^n}{2(2n+1)\big((n+1)!\big)^2}$ qu'on va plutôt écrire $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!x^n}{n!(n+1)!}$. Posons $v_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ de sorte que l'on a $\forall x\in\Big]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\Big[\setminus\{0\},\ g(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum_{n=0}^{+\infty}v_nx^n$. On pose $g(0)=v_0=1$. Comme $0g(0)^2-g(0)+1=0$ et que $\forall x\in\Big]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\Big[\setminus\{0\},\ xg(x)^2-g(x)+1=\frac{1-2\sqrt{1-4x}+(1-4x)}{4x}-\frac{2-2\sqrt{1-4x}}{4x}+\frac{4x}{4x}=0$, on a bien $\forall x\in\Big]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\Big[,\ xg(x)^2-g(x)+1=0$. En effectuant un produit de CAUCHY sur $\Big]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\Big[$, et en identifiant les coefficients (les calculs ont déjà été faits dans la partie analyse), on trouve que $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}v_kv_{n-k}$. Comme $v_0=u_0=1$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence, par récurrence forte, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_n$. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0}u_nx^n$ est bien de rayon $R=\frac{1}{4}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Par exemple, $u_0=\frac{(2.0)!}{0!(0+1)!}=1$, $u_1=\frac{(2.1)!}{1!(1+1)!}=1$, $u_2=\frac{(2.2)!}{2!(2+1)!}=2$ et $u_3=\frac{(2.3)!}{3!(3+1)!}=5$ qui confirme les calculs de la question **b.**. Et on a $u_4=\frac{(2.4)!}{4!(4+1)!}=14$ et $u_5=\frac{(2.5)!}{5!(5+1)!}=42$.

16.16 **a.** f est définie comme la somme de la série entière lacunaire $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ où $a_n=1$ si n est un carré et $a_n=0$ sinon. Comme $(a_nx^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $(a_{n^2}x^{n^2})_{n\geqslant 0}$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si $|x|\leqslant 1$, la rayon de R de cette série entière vaut $R=1$. Pour $x=\pm 1$, cette série est grossièrement divergente donc le domaine de définition de f vaut $I=]-1;1[$.

b. En tant que somme d'une série entière de rayon 1, d'après le cours, f est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, donc a fortiori continue sur I.

Comme on étudie f au voisinage de 1, on peut se contenter de prendre $x\in]0;1[$, et de poser la fonction $h_x:t\mapsto x^{t^2}=e^{t^2\ln(x)}$ qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $h_x(t) = e^{t^2 \ln(x)} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées ($\ln(x) < 0$).

Comme la fonction h_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\forall k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_k^{k+1} h_x(t)dt \leqslant x^{k^2} = h_x(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} h_x(t)dt$. On somme pour k allant de 0 à $+\infty$ à gauche et de 1 à $+\infty$ à droite (l'intégrale et la série convergent) ce qui donne par CHASLES l'encadrement $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} x^{t^2}dt + h_x(0) = \int_0^{+\infty} x^{t^2}dt + 1$.

En posant $t = \dfrac{u}{\sqrt{-\ln(x)}} = \varphi(u)$, φ étant une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, par changement de variable, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2\ln(x)}dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}}$ d'après l'intégrale de GAUSS rappelée. Ainsi, on a l'équivalent $f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-\pi}{\ln(x)}}$ car $1 \underset{1^-}{=} o\left(\sqrt{\dfrac{1}{-\ln(x)}}\right)$ puisque $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}} = +\infty$.