DEVOIR 18 : SÉRIES ENTIÈRES

PSI 1 2024-2025 **mardi 28 janvier 2025**

QCM

1 *Comparaison : soit* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *de rayon* R_a *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ *de rayon* R_b*, on suppose que* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0$

1.1 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Longrightarrow R \geqslant 1$

1.2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R}_+^* \Longrightarrow R = \ell$

1.3 $a_n \underset{+\infty}{=} o(b_n) \Longrightarrow R_b < R_a$

1.4 $a_n \underset{+\infty}{=} O(b_n) \Longrightarrow R_b \leqslant R_a$

2 *Opérations : soit* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *de rayon* R_a *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ *de rayon* R_b*, on note* R *le rayon de convergence de* $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n+b_n) z^n$ *et* R' *celui de* $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$

2.1 $R \geqslant \mathrm{Min}(R_a, R_b)$

2.2 $R' \geqslant \mathrm{Min}(R_a, R_b)$

2.3 Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \mathrm{Min}(R_a, R_b)$

2.4 Si $R_a \neq R_b$, alors $R' = \mathrm{Min}(R_a, R_b)$

3 *Série entière et régularité : soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *une série entière de la variable réelle de rayon de convergence* $R > 0$ *telle que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n R^n$ *CVA et* f *sa fonction somme,* $p \in \mathbb{N}$

3.1 $\forall x \in]-R, R[,\ f^{(p)}(x) = \sum\limits_{n=p}^{+\infty} \dfrac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$

3.2 $\forall x \in]-R^2, R^2[,\ f^2(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) x^n$

3.3 f est de classe C^∞ sur $]-R; R[$ et $a_p = f^{(p)}(0)$

3.4 $\forall x \in [-R; R],\ F(x) = \int_0^x f(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_{n-1}}{n} x^n$

4 *Fonctions DSE : soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^∞

4.1 f DSE sur $\mathbb{R} \Longleftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ converge}\right)$

4.2 f DSE sur $\mathbb{R} \Longleftarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ ||f^{(n)}||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant 1\right)$

4.3 f paire $\Longrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(2n+1)}(0) = 0\right)$

4.4 f DSE sur $\mathbb{R} \Longrightarrow f^2$ DSE sur $\mathbb{R}$

Énoncé Soit $r > 0$ et une fonction $f :]-r; r[\to \mathbb{R}$, donner une condition nécessaire et suffisante (avec le reste intégral) pour que f soit développable en série entière.

Preuve Montrer le lemme d'ABEL : soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, si la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.

Exercice 1 On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{ch}(n) z^n$ dont on note R le rayon de convergence.
Déterminer un équivalent de $\mathrm{ch}(n)$ quand n tend vers $+\infty$. En déduire la valeur exacte de R. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, donner une expression simple de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{ch}(n) z^n$ en se ramenant aux séries géométriques.

Exercice 2 Rappeler le développement en série entière $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $]-1; 1[$.
En déduire le développement en série entière de Arctan sur $]-1; 1[$. Montrer que cette dernière série entière converge uniformément sur $[0; 1]$. En déduire que $\dfrac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

DEVOIR 18 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 18	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1				X	
2	X	X	X		
3	X			X	
4		X	X	X	

1.1 Faux : $R \leqslant 1$ car $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n 1^n$ diverge **1.2** Faux : $R = \dfrac{1}{\ell}$ **1.3** Faux : $R_b \leqslant R_a$ **1.4** Vrai : du cours.
2.1, **2.2**, **2.3** Vrai : du cours **2.4** Faux : on a vu un contre-exemple en cours.
3.1 Vrai : du cours **3.2** Faux : la formule est correcte avec le produit de CAUCHY mais on peut n'avoir que R comme rayon (et pas R^2) donc si $R > 1$??? **3.3** Faux : c'est $a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$ **3.4** Vrai : comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n R^n$ CVA, on a CVN (donc CVU) de la série de fonctions sur le segment $[0; x]$ et on intègre terme à terme.
4.1 Faux : exemple 9.14 **4.2** Vrai : $\left|\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt\right| \leqslant \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ **4.3** Vrai : f paire donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(2n)}$ est paire et $f^{(2n+1)}$ impaire **4.4** Vrai : stabilité des fonctions DSE par produit.

Énoncé Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont 0 est un point intérieur, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $r > 0$, alors :

$$\Big(f \text{ est DSE sur }]-r;r[\Big) \iff \Big(f \in C^\infty(]-r;r[, \mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in]-r;r[,\ \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = 0\Big).$$

Preuve Il existe par hypothèse un réel $M \geqslant 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n r^n| \leqslant M$. Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < r$, alors $|a_n z^n| \leqslant M\left(\dfrac{|z|}{r}\right)^n$ or $\left|\dfrac{|z|}{r}\right| < 1$ donc la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{|z|}{r}\right)^n$ converge, a fortiori $\sum\limits_{n\geqslant 0} M\left(\dfrac{|z|}{r}\right)^n$ converge. On conclut à la convergence de $\sum |a_n z^n|$ par théorème de comparaison sur les séries numériques.

Exercice 1 Comme $\mathrm{ch}(n) = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2}$ et que $e^{-n} \underset{+\infty}{=} o(e^n)$, on a $\mathrm{ch}(n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{2}$. Ainsi R est aussi le rayon de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^n z^n$ (la constante 2 importe peu pour le rayon). Or $(e^n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|z| \leqslant \dfrac{1}{e}$ donc $R = \dfrac{1}{e}$ par définition (on pouvait aussi utiliser D'ALEMBERT).

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \dfrac{1}{e}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{ch}(n) z^n = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^n z^n + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-n} z^n$ (les deux séries convergent) ce qui donne par les séries géométriques : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{ch}(n) z^n = \dfrac{1}{2(1-ez)} + \dfrac{e}{2(e-z)} = \dfrac{1-\mathrm{ch}(1)z}{1-2\,\mathrm{ch}(1)z + z^2}$.

Exercice 2 $\forall x \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n$ (série géométrique car $|-x^2| < 1$). Or Arctan est la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ qui s'annule en 0, on sait d'après le cours que : $\forall x \in]-1;1[$, $\mathrm{Arctan}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (1) avec convergence en 1 par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers 0 si $x \in [0;1]$. En notant $u_n : x \mapsto (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $\forall x \in [0;1]$, $\big|R_n(x)\big| = \Big|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\Big| \leqslant \big|u_{n+1}(x)\big| \leqslant \dfrac{1}{2n+2}$.
Ainsi $||R_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant \dfrac{1}{2n+2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+2} = 0$ donc on a la convergence uniforme attendue.
Comme les u_n sont toutes continues sur $[0;1]$, la convergence uniforme nous permet d'affirmer que la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est continue sur $[0;1]$ (notamment en 1). Comme Arctan est aussi continue en 1, on obtient en passant à la limite dans (1) quand x tend vers 1 : $\mathrm{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(1)$.