ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 10
SÉRIES ENTIÈRES

10.1 Rayon et expression

10.1 *Mines MP* Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{3n+2}$.

10.2 Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.
a. Déterminer l'intervalle de convergence de f.
b. Exprimer la fonction f à l'aide des fonctions usuelles sur $]-1;1[$.
c. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

10.3 Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$.
Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et déterminer la somme de la série.

10.4 Soit $0 < a < b$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = a^n$ et $a_{2n+1} = b^n$.
Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et déterminer la somme de la série.

10.5 Déterminer le rayon et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+3}{2n+1} x^n$.

10.6 *Centrale PSI 2012* Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n^3}{2^n+3^n} x^{2n+1}$.

10.7 *Centrale PSI 2012*

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = n + 1 - \frac{1}{n!}$. On va ici étudier la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.
a. Déterminer son rayon R et faire l'étude de la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.
b. Donner une expression simple de $f(x)$ (la fonction somme de cette série entière) pour $x \in]-R\,;R[$.
c. En déduire des équivalents de $f(x)$ quand $x \mapsto -R^+$ et quand $x \mapsto R^-$.

10.8 *Centrale PSI 2012* Déterminer le rayon de convergence R et calculer la somme des séries entières suivantes pour $x \in]-R;R[$: $\sum_{n\geqslant 0} n^2(-1)^n x^{2n+1}$ et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n^2-1}$.

10.9 *Centrale PSI 2012* On pose, pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ et lorsque la série converge : $f_p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n$.
a. Déterminer le domaine de définition de f_p et donner des expressions simples de f_0 et f_1.
b. Montrer que les f_p sont dérivables sur leur domaine de définition et établir une relation entre f'_p et f_{p+1}.
c. Donner un équivalent de $f_p(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.
d. Que dire de $f_p(x)$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures ?

10.10 Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.
a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
b. Étudier la convergence de la série entière en R et en $-R$.
c. Établir la continuité de f en $-R$.
d. Déterminer la limite de f en R.

10.11 *Compléments OdlT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 554I*

Rayon de convergence et somme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{3^{n-1}(2n+1)}$.

10.2 Théorie

10.12 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tous non nuls.

Quelle relation lie les rayons de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{a_n} z^n$.

10.13 Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 z^n$.

10.14 Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

On pose $b_n = \dfrac{a_n}{1+|a_n|}$ et on note R' le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$.

a. Montrer que $R' \geqslant \mathrm{Max}(1, R)$.

b. Établir que si $R' > 1$ alors $R' = R$.

c. Exprimer alors R' en fonction de R.

10.15 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{S_n} = 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} S_n x^n$ puis former une relation entre leur somme.

10.16 Classique mais hors programme ! Soit une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon R tel que $0 < R < +\infty$ et qui vérifie $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n R^n$ converge, alors $\lim\limits_{t\to R^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

10.3 Relations avec l'intégrale

10.17 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R et à sa somme notée f.

a. Déterminer le rayon R et faire l'étude de la convergence de $f(x)$ aux bornes de l'intervalle de convergence.

b. Montrer que : $\forall x \in]-R\,;R[,\ f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-xt)(1+t^2)}$.

c. Pour $x \in]-R\,;0[\cup]0\,;R[$, trouver a, b et c tels que : $\forall t \in [0\,;1]$, $\dfrac{1}{(1-xt)(1+t^2)} = \dfrac{a}{1-xt} + \dfrac{bt}{1+t^2} + \dfrac{c}{1+t^2}$.

En déduire une expression compacte de $f(x)$. Que vaut donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$?

d. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $a_{n+2} + a_n$.

En déduire une expression de a_{2n} sous forme de somme ; puis $\dfrac{\pi}{4}$ comme somme de série.

10.18 *Centrale PSI 2012* Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

a. Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$.

b. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$?

c. Pour $x \in]-R\,;R[$, exprimer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sous forme d'une seule intégrale.

En déduire une expression compacte de $f(x)$ si $x \in]-R\,;0[$.

d. Montrer que la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vers f est uniforme sur $[-R\,;0]$. En déduire $f(-R)$.

10.19 Développer en série entière la fonction $x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

10.20 Développer en série entière la fonction $x \mapsto \int_0^x \ln\left(t^2 - \frac{5}{2}t + 1\right)\frac{dt}{t}$.

10.21 Calculer $\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)dt$.

10.22 Montrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}\,x}{x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ (nombre de Catalan).

10.23 *Mines PSI 2008 d'après RMS* Soit $f : t \in]-1;1[\mapsto \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$.

Montrer que f est intégrable sur $]-1;1[$ et calculer $\int_{-1}^1 f(t)dt$.

10.4 Équation différentielle

10.24 Soit f définie sur $]-1;1[$ par $f(x) = \frac{\mathrm{Arcsin}\,x}{\sqrt{1-x^2}}$

a. Justifier que f est développable en série entière sur $]-1;1[$.

b. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.

c. Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1;1[$.

10.25 On considère l'équation différentielle suivante : $(E)\ :\ 4xy'' + 2y' - y = 0$.

a. Rechercher une solution φ de (E) développable en série entière. Préciser son rayon de convergence R.

Exprimer φ avec les fonctions usuelles.

b. Résoudre l'équation (E) sur les intervalles $I =]-\infty;0[$, puis sur $J =]0;+\infty[$.

c. Déduire des questions **a.** et **b.** l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

10.26 On considère l'équation différentielle suivante : $(E)\ :\ xy'' + 2y' - xy = 0$.

a. Rechercher une solution φ de (E) développable en série entière. Préciser son rayon de convergence R.

Exprimer φ avec les fonctions usuelles.

b. Résoudre l'équation (E) sur les intervalles $I =]-\infty;0[$, puis sur $J =]0;+\infty[$.

c. Déduire des questions **a.** et **b.** l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

10.5 Produit de Cauchy et dénombrement

10.27 *Nombres d'Euler et de Bernoulli*

Soit n un entier, le nombre de permutations up-down σ de $[\![1;n]\!]$, c'est-à-dire les permutations σ telles que $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < .....\sigma(n)$ est noté a_n si n est pair (nombre d'Euler appelés aussi "secant numbers" ou zig numbers) et b_n si n est impair (nombre de Bernoulli aussi appelés "tangent numbers" ou zag numbers). On pose $a_n = 0$ si n est impair et $b_n = 0$ si n est pair et on prend $a_0 = 1$ par convention.

a. Déterminer les valeurs de b_1, a_2, b_3, a_4 et b_5.

On considère $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{a_n}{n!}x^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{b_n}{n!}x^n$ et les fonctions somme a et b respectives (là où les séries convergent).

b. Que peut-on dire des rayons de convergence respectifs R_a et R_b des deux séries entières précédentes ?

c. Montrer que si n est pair : $b_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} b_k b_{n-k}$. Trouver une relation donnant a_{n+1} si n est impair.

d. En déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction b sur $]-R_b; R_b[$. Que vaut donc b ?

e. Pour $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, écrire la formule de Taylor reste intégral appliquée à la fonction tangente entre 0 et x. En déduire la valeur exacte de R_b.

f. Trouver une relation simple entre a et b pour en déduire a. Justifier que les dérivées successives de a sont positives sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, en déduire le rayon R_a.

10.28 *Centrale PSI 2011 d'après RMS*

Une involution d'un ensemble X est une application de X dans lui-même telle que $f \circ f = \mathrm{id}_X$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n le nombre d'involutions de $[\![1;n]\!]$: $I_1 = 1$, $I_2 = 2$ (l'identité et une transposition) et $I_3 = 4$ (l'identité et trois transpositions) par exemple. On convient que $I_0 = 1$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

Que peut-on en déduire sur le rayon R de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{I_n}{n!}z^n$. On note S sa somme.

b. Établir que $\forall x \in]-R\,;R[,\ S'(x) = (1+x)S(x)$ et en déduire une expression simple de $S(x)$.

c. Déterminer enfin une expression de I_n sous forme de somme.

10.29 Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1;1[,\ \sum\limits_{k=m}^{+\infty} \dbinom{k}{m} x^{k-m} = \dfrac{1}{(1-x)^{m+1}}$.

10.30 On note $N(n,p)$ le nombre de permutations de $[\![1;n]\!]$ qui ont exactement p points fixes.

On pose en particulier $D(n) = N(n,0)$, puis $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{D(n)}{n!}x^n$.

a. Relier $N(n,p)$ et $D(n-p)$.

b. Justifier la définition de f sur $]-1;1[$ puis calculer f. En déduire $N(n,p)$.

c. Étudier la limite de la suite $\left(\dfrac{1}{n!}N(n,p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

10.31 *Centrale PSI 2012* Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de façons d'écrire n comme somme de 2 carrés (d'entiers naturels), ou encore $a_n = \mathrm{card}\left(\left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; p^2 + q^2 = n\right\}\right)$. On définit b_n qui vaut 1 si n est un carré (d'entier) et 0 sinon. Ainsi $a_3 = 0$, $a_{25} = 4$ car $25 = 5^2 + 0^2 = 4^2 + 3^2 = 3^2 + 4^2 = 0^2 + 5^2$; $b_2 = 0$ et $b_9 = 1$. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et on considère les 2 séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R et R' et de fonctions somme respectives f et g.

a. Déterminer R' et majorer R. Trouver une relation entre $f(x)$ et $g(x)$ pour x assez petit. En déduire R.

b. Justifier que, pour $x \in]0\,;1[$, la fonction $h_x : t \to x^{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. En déduire un équivalent de $g(x)$ quand x tend vers R^-. Puis un équivalent de $f(x)$ quand $x \to R^-$.

10.32 Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, C_n le nombre de parenthésages distincts d'un mot à n éléments : C_n est le n-ième nombre de CATALAN. Par exemple : $(**)((**)*)$ est un des parenthésages corrects compté dans C_5, il s'agit des parenthésages donnant un sens à un "produit" de n termes avec une loi non associative.

Par exemple, 2 puissance 3 puissance 2 n'a pas de sens mais $2^{(3^2)} = 2^9 = 512 \neq 64 = 8^2 = (2^3)^2$.

Pour trois éléments, il n'y a que les parenthésages $(**)*$ et $*(**)$ donc $C_3 = 2$. Pour quatre éléments, $*(*(**))$, $*(*(**))$, $(**)(**)$, $(*(**))*$ et $((**)*)*$ sont les seuls parenthésages possibles donc $C_4 = 5$.

a. Soit $n \geqslant 2$, montrer que $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$ avec C_0 et C_1 à définir.

b. Si $\sum\limits_{n \geqslant 0} C_n x^n$ admet un rayon de convergence $R > 0$, trouver une relation, pour $x \in]-R; R[$, entre $C(x)^2$ et $C(x)$. En déduire alors une expression de $C(x)$ pour x assez petit en valeur absolue.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de C_n à l'aide d'un coefficient binomial.

10.6 Développement en série entière

10.33 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ paire ou impaire de classe C^∞ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0\,;\alpha[$, $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

a. Dans la formule de TAYLOR avec reste intégral, pour $x \in [0\,;\alpha[$ et $n \in \mathbb{N}$, rappeler les valeurs des coefficients a_k et du reste $R_n(x)$ dans : $f(x) = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + R_n(x)$.

b. Établir que si $0 \leqslant x < y < \alpha$, on a $\dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \dfrac{R_n(y)}{y^{n+1}}$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

c. Montrer alors que f est développable en série entière sur $]-\alpha\,;\alpha[$.

10.34 Former le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \mathrm{sh}\,(\mathrm{Arcsin}\,x)$.

10.35 <u>*Centrale PSI 2013*</u>

a. Rappeler le développement en série entière de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{-1}{2}}$ sur $]-1; 1[$ sous la forme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en trouvant une expression de a_n qui utilise des factorielles.

b. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$ et donner une expression simple de sa somme pour $x \in]-R; R[$. Quelle est la nature de cette série quand $x = \pm R$?

10.36 <u>*CCP PSI 2013*</u> Gérémy Soit $\varphi(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n^2 - 1}$.

a. Trouver le domaine de définition D de φ.

b. Expliciter $\varphi(x)$ pour tout $x \in D$.

10.37 <u>*Centrale PSI 2013*</u> Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2u_n - 1}{n+1}$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$. Trouver trois réels a, b, c tels que $u_n \underset{\infty}{=} a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

b. Déterminer le rayon R de $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n x^n$. Montrer que sa somme $S :]-R; R[\to \mathbb{R}$ vérifie (E) : $y' = 2y + \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

c. Donner un développement asymptotique à deux termes de $S(x)$ quand x tend vers 1^-.

10.38 <u>*Centrale PSI 2012*</u> Soit α et λ deux réels avec $\lambda \in]-1;1[$, on note E l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)$.

a. Montrer que $E \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b. Déterminer un élément développable en série entière de E (autre que la fonction nulle).

c. Soit $f \in E$ tel que $f(0) = 0$. Montrer que $f = 0$.

d. Déterminer entièrement E.

10.39 <u>*Centrale PSI 2012*</u> On pose, lorsque ceci a un sens : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{x+n}$.

a. Établir que f est de classe C^∞ sur $]-1\,;+\infty[$ en donnant ses dérivées sous forme de série de fonctions.

b. Prouver que f est développable en série entière et donner son développement.

c. Déterminer des équivalents de $f(x)$ quand $x \mapsto -1^+$ et quand $x \mapsto +\infty$.

10.40 Domaine de définition et étude aux bornes de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)x^n$.

10.41 Montrer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

10.7 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

10.42 <u>*Centrale PSI 2014*</u> Servane

a. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{P(n)}{n!}z^n$?

b. Dorénavant, $P \in \mathbb{Z}[X]$, exprimer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P(n)}{n!}$ sous la forme $N \times e$ avec $N \in \mathbb{Z}$.

10.43 <u>*Centrale Maths1 PSI 2015*</u> Mathieu Gaultier

Soit $R > 0$ le rayon de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$. On suppose que $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n|R^n$ converge. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a. Montrer que f est continue en R.

b. On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ existe et l'exprimer sous la forme d'une série.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ (on admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$).

10.44 <u>*Centrale Maths1 PSI 2015*</u> Clément Suberchicot

On pose $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ et $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n x^n}{n!}$.

a. Rayon de convergence de cette série entière.

b. Sachant que $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k dt$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

c. On pose $g(x) = e^{-x}f(x)$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

10.45 <u>*Mines PSI 2015*</u> Jean-Raphaël Biehler

Soit la série suivante $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{4n+1}$. Montrer qu'elle converge et la calculer.

10.46 *Mines PSI 2015* Bastien Chevallier

a. Résoudre $(E)\ :\ \ln(x)y' + \dfrac{y}{x} = 1$ sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

b. On définit g par $\forall x \in]-1;+\infty[\setminus\{0\},\ g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Montrer que g est de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$.
c. Déduire que (E) possède une solution de classe C^∞ sur $]0;+\infty[$.

10.47 *Petites Mines PSI 2015* Marie Trarieux

On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n}{(2n+1)!}x^n$.

a. Déterminer son rayon de convergence.

b. Rappeler le développement en série entière de $\operatorname{sh}(y)$ et $\sin(y)$.

c. Calculer $\Phi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n+1)!}$.

d. Déterminer la somme de la série de départ.

10.48 *Centrale Maths1 PSI 2016* Charly Castes

On note, pour $n \geqslant 1$ et $p \in [\![0;n]\!]$, l'entier $A_{n,p}$ égal au nombre de permutations de $[\![1;n]\!]$ qui possèdent exactement p points invariants.
a. Trouver une relation entre $A_{n,p}$ et $A_{n-p,0}$.
b. Montrer que le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{A_{n,0}x^n}{n!}$ est supérieur ou égal à 1.

c. Calculer $\sum\limits_{p=0}^{n} A_{n,p}$ et en déduire la valeur de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A_{n,0}x^n}{n!}$.
d. En déduire une expression de $A_{n,p}$ pour tout $p \leqslant n$.

10.49 *Centrale Maths1 PSI 2016* Hugo Saint-Vignes

Soit la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 = 1$ et $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1}(t-k)dt$ si $n \geqslant 1$.

On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de somme $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
a. Montrer que son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$.
b. Soit $x \in]-1;1[$, calculer $S(x)$.
c. Montrer que $R = 1$.

10.50 *Centrale Maths1 PSI 2016* Théo Taupiac

Pour $\alpha \in]-1;1[$, on pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(1+\alpha\cos(x))}{\cos(x)}dx$.
a. Montrer que I est de classe C^1 sur $]-1;1[$ et calculer $I'(\alpha)$.
Indication : on donne $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ si $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

b. En déduire une expression simple $I(\alpha)$ pour $\alpha \in]-1;1[$.
c. Montrer que I est développable en série entière avec un rayon égal à 1.

10.51 *Mines PSI 2016* Antoine Badet II

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f_p : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^p}$.
a. Donner le développement en série entière de f_p au voisinage de 0.
b. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{p+k}{k}$.

10.52 *Mines PSI 2016* Owain Biddulph I

Nature et somme de $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{x^{4n}}{4n+1}$.

10.53 *Mines PSI 2016* Adrien Boudy I

On appelle involution d'un ensemble E toute application $f : E \to E$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des involutions de l'ensemble $[\![1; n]\!]$ et $I_n = \mathrm{card}(A_n)$ avec la convention $I_0 = 1$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

b. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.

On définit $\varphi :]-1; 1[\to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

c. Montrer que $\forall x \in]-1; 1[,\ \varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$.

d. En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

e. En déduire une expression de I_n sous forme de somme.

10.54 *Mines PSI 2016* Samy Essabar II

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, le réel $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,dx$.

a. Donner la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n$.

b. Déterminer une relation entre u_{n+2} et u_n. En déduire le rayon R de convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n z^n$.

c. Déterminer le rayon R' de convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n z^{n^2}$.

d. Calculer $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour $x \in]1; 1[$.

e. Trouver une valeur exacte de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$.

10.55 *E3A PSI 2016* Antoine Badet II

On pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

a. Rayon de convergence R de $\sum\limits_{n \geqslant 0} W_n x^n$?

b. Cas $x = R$? Cas $x = -R$?

c. Calcul de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} W_n x^n$ pour $x \in]-R; R[$.

10.56 *Centrale Maths1 PSI 2017* Bastien Lamagnère

Soit $\theta \in]0; \pi[$.

a. Montrer que la suite $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

b. Quel est le rayon R de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \sin(n\theta) z^n$.

c. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R$. Y a-t-il convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 0} \sin(n\theta) z^n$?

d. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta) z^n$.

10.57 *Centrale Maths1 PSI 2017* Antoine Romero-Romero

On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ a_n = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_{n-k}}{k!}$.

a. Montrer que le rayon R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vérifie $R \geqslant 1$. On note S la somme de cette série.

b. Montrer que si $|z| < R$, on a $S(z) = \dfrac{2}{e^z + 1}$.

c. Montrer que $\forall x \in \left]-\dfrac{R}{2}; \dfrac{R}{2}\right[,\ i\tan(x) = 1 - S(2ix)$.

d. Montrer que $R = \pi$.

10.58 *Mines PSI 2017* Vincent Bouget II

Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(3n)!}$.

10.59 *Mines PSI 2017* Joseph Dumoulin II

Soit $a_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ pour $n \geqslant 2$.

a. Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 2} a_n x^n$. On note S sa somme.

b. Déterminer l'intervalle de convergence de S.

10.60 *Mines PSI 2016 et 2017* Émilien Ouzeri II et Elliott Jean-François I

Soit $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$.

a. Déterminer le rayon de convergence R cette série entière.

b. Exprimer $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

10.61 *Mines PSI 2017* Vincent Meslier III

Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$. Donner $\mathcal{D}_f$ et exprimer $f(x)$ avec des fonctions usuelles.

10.62 *Mines PSI 2017* Antoine Romero-Romero II

On considère la série entière suivante : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(n) x^n$. On note S sa somme.

a. Calculer le rayon de convergence R de cette série entière.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to R^-} S(x)$.

c. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers R^-.

10.63 *ENS Cachan PSI 2015 et Mines PSI 2017* Jean-Baptiste Biehler et Roland Tournade II

On pose $A_0(0) = 1$ par convention et, pour $n > 0$ et $k \in [\![1; n]\!]$, on note $A_n(k)$ le nombre des permutations de $[\![1; n]\!]$ laissant exactement k éléments invariants.

a. Montrer que $A_n(k) = \dbinom{n}{k} A_{n-k}(0)$, et que $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} A_n(k)$.

b. Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A_n(0)}{n!} z^n$, montrer que $f(z)$ existe si $|z| < 1$.

c. Montrer que $e^z f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, en déduire le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{A_n(0)}{n!} z^n$ et la valeur de $A_n(0)$.

d. On a un sac de n boules numérotées de 1 à n. On tire les boules une par une, et on les range dans l'ordre de tirage dans une boite compartimentée dont les compartiments sont numérotés de 1 à n (la première boule dans le compartiment 1, la deuxième dans le compartiment 2, etc...). On note p_n la probabilité qu'aucune boule ne se trouve dans le compartiment portant son numéro. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

10.64 *CCP PSI 2017* Manon Bové I et Alexis Trubert I

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,dt$.

a. Montrer que $]-1;1[$ est inclus dans le domaine de définition de g.

b. Trouver un développement en série entière de $g(x)$ sur $]-1;1[$.

c. Montrer que g est de classe C^1 sur $]0;1[$ et calculer $g'(x)$.

d. Montrer que g est de classe C^1 sur $]0;1[$ et calculer $g'(x)$ par une méthode différente.

10.65 *CCP PSI 2017* Alexandre Chamley II et Elliott Jean-François II

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists! x_n \in \mathbb{R}_+,\ e^{-x_n} + x_n = n$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in [n-1;n]$.

c. On pose $a_n = n - x_n$. Étudier la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$. On notera R son rayon.

10.66 *E3A PSI 2017* Claire Raulin

On s'intéresse à la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{4n+1}$ et on note S sa somme.

a. Déterminer son rayon de convergence R et son intervalle de convergence.

b. Montrer que $S(-1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} = I$.

c. Décomposer le polynôme $1+X^4$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1+X^4}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

d. En déduire la valeur exacte de $S(-1)$.

10.67 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Gauthier Crosio et Nicolas Ziegler I

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}$.

L'objectif est de calculer $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k}$. Pour cela, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a. Montrer que le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

b. Montrer que L existe et est finie.

c. Montrer que $\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = f(x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ dont on précisera coefficients et rayon.

d. Déterminer $\ln(f(x))$ pour $x \in]0;1[$. En déduire la valeur de L.

10.68 *Centrale Maths1 PSI 2018* Oihana Piquet

Soit une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_{2n} + x_{2n+1}$.

a. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} y_n$ sont de même nature.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $a_n = \dfrac{1}{2n(2n+1)}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

b. Déterminer le domaine de définition D de f.

c. Calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^* \cap D$.

d. En déduire que $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

10.69 *Centrale Maths1 PSI 2018* Antoine Secher

Soit $a > 0$, $J =]-a; a[$ et $h : J \to \mathbb{R}$ une fonction (im)paire de classe C^∞ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}$ est positive sur $[0\,; a[$. On pose, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in J$, le reste $R_N(x) = h(x) - \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

a. Écrire $R_N(x)$ à l'aide d'une intégrale.

b. En déduire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < y < a \Longrightarrow 0 \leqslant R_N(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{y}\right)^{N+1} R_N(y)$.

c. Conclure que h est sur J égale à la somme de sa série de Taylor en 0.

d. Que peut-on dire de $\tan$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$?

Question de cours : quels sont les différents modes de convergence d'une série entière ?

10.70 *Mines PSI 2018* Jean Boudou I

Soit $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}$.

a. La fonction h est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

b. Montrer que h est développable en série entière (on notera R le rayon de ce développement).

c. Montrer que la décomposition de h en série entière est valable sur $[-R; R]$.

On pose, pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x h(t)\mathrm{d}t$.

d. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

e. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

f. f est-elle développable en série entière sur $[-R; R]$?

10.71 *Mines PSI 2018* Julien Langlais II

Soit $a \in]-1; 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sin(a^n x)$.

En cas de convergence, on pose $F_a(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Montrer que F_a est définie et développable en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence.

Indication : on pourra montrer d'abord que F_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

10.72 *CCP PSI 2018* Gauthier Crosio I

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ une série complexe absolument convergente.

a. Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n x^n}{n!}$. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n x^n}{n!}$.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

10.73 *CCP PSI 2018* Lucie Jandet I

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n$.

10.74 *CCP PSI 2018* Raphaël Pobeda I

Soit $\theta \in]0; \pi[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2x\cos(\theta) + x^2}$.

a. Déterminer les deux racines z_1 et z_2 de $X^2 + 2\cos(\theta)X + 1$.

b. Trouver deux complexes a et b (dépendant de θ) tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{a}{x - z_1} + \dfrac{b}{x - z_2}$.

c. En déduire que f est DSE. Vous déterminerez le rayon de cette série et l'expression de ses coefficients.

10.75 *CCP PSI 2018* Titouan Sancier II

Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}}$ converge et calculer sa somme.

10.76 *E3A PSI 2018* Martin Monsel

On pose, sous réserve de convergence, $F(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$.

a. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}^*$. Que dire de sa parité ?
b. Montrer que F admet une limite finie en 0 à l'aide d'un développement limité.
Montrer que F ainsi prolongée est dérivable en 0.
c. Déterminer les limites de F en $\pm\infty$.
d. Donner le développement en série entière de F. Quel est le rayon de convergence de cette série ?

10.77 *ENS Cachan PSI 2019 (OdlT 2019/2020 X-ENS PSI planche 36II)* Victor Margueritte II

Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

On définit, pour $x \in]-1;1[$, le réel $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on suppose que f admet une limite finie en 1.

a. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \dfrac{i}{n} \leqslant \Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)^i$.

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\Big(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\Big) - f\big(1 - \dfrac{1}{n}\big)\Big) = 0$.

c. En déduire l'existence et la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

10.78 *Centrale Maths1 PSI 2019* Maël Classeau

On définit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de F.

b. Montrer que F est de classe C^∞ sur D.

c. Montrer que F est développable en série entière et donner le rayon de convergence de ce développement.

Question de cours : critère de D'ALEMBERT pour les séries numériques.

10.79 *Mines PSI 2019* Thomas Crété I

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^{(-1)^n} x^n$.

b. Pour $x \in]-R;R[$, calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$.

10.80 *Mines PSI 2019* Pierre Fabre I

Soit $\lambda \in]-1;1[$ et l'équation $(E)\ :\ f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$.

a. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Justifier aussi qu'elle est développable en série entière avec un rayon $R = +\infty$.

b. Résoudre entièrement (E).

10.81 *Mines PSI 2019* Florian Guyomard II

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sh}(xt)e^{-t^2}\,dt$.

a. Justifier l'existence de F.

b. Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter son développement.

10.82 *CCP PSI 2019* Benoît Le Morvan II

Soit les trois suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définies par les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}},\ v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n \quad \text{et} \quad w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}.$$

a. Justifier que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et qu'elle tend vers 0.

b. Justifier que $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

c. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$?

d. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} w_n x^n$?

10.83 *X PSI 2020* Matthieu Darius I

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite composée de 1 et de -1. On définit la fonction f par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

a. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$.

b. On suppose que $\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f^{(n)}(x)| \leqslant 1$. Que peut-on dire de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$?

10.84 *X PSI 2021* Julien Gombert II

Soit $E = \Big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ \Big|\ \sum_{n\geqslant 0} |u_n| \text{ converge et } \forall k \geqslant 1,\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n 2^{-kn} = 0\Big\}$.

Chercher les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E.

10.85 *Mines PSI 2021* Clotilde Cantini II

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^n}{3n+1}$.

10.86 *Mines PSI 2021* Robin De Truchis II

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} + 1$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}$.

a. Supposons que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge pour un réel a, montrer alors que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge pour tout valeur de a vers une limite à déterminer.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge pour $a = 1$.

c. Montrer que $(s_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

d. Déterminer le rayon et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} s_n x^n$.

10.87 *Mines PSI 2021* Alexandre Marque I

On appelle involution d'un ensemble E toute application $f : E \to E$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des involutions de l'ensemble $[\![1;n]\!]$ et $I_n = \mathrm{card}\,(A_n)$ avec la convention $I_0 = 1$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

b. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{I_n}{n!}x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.

On définit $\varphi :]-1;1[\to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{I_n}{n!}x^n$.

c. Montrer que $\forall x \in]-1;1[,\ \varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$.

d. En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

e. En déduire une expression de I_n sous forme de somme.

10.88 *Mines PSI 2021* Raffi Sarkissian II

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}$.

a. Trouver $\alpha > 0$ maximal tel que f soit définie sur $]-\alpha;\alpha[$.

b. Montrer que f est développable en série entière et en déduire une expression simplifiée de f.

10.89 *Mines PSI 2021* Antonio Treilhou II

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + x}}$.

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$.

c. Donner le développement en série entière de $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u^4}}$.

d. Majorer le reste de la série entière de la question précédente.

e. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(4n+1)}$.

10.90 *CCINP PSI 2021* Clément Lérou I

Soit $F : x \mapsto -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt$ et $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$. On rappelle que $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de F.

b. Montrer que $\forall x \in [-1;1],\ F(x) = S(x)$.

c. Montrer que $\forall x \in]0;1[,\ F(x) + F(1-x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$.

10.91 *X PSI 2022* Olivier Courmont III

Justifier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2n^2 + 5n + 3}{2^n}$ et calculer sa somme.

10.92 *Centrale Maths1 PSI 2022* Marius Desvalois et Thibault Sourdeval

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On note R le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ et $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a. Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ vaut $+\infty$.

b. Trouver une suite réelle bornée $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $R = 2$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge.
- $R = 1$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge.
- $R = 1$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

c. Montrer que $R \geqslant 1$.

d. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ et calculer sa valeur.

e. Pour $t > 1$, montrer l'existence de $g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(x) dx$ et trouver une relation entre $g(t)$ et $S\left(\frac{1}{t}\right)$.

10.93 *Centrale Maths1 PSI 2022* Achille Domens

On pose $F(0) = 0$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, $F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$.

a. Montrer que F est définie et développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Donner son développement.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt\right) = \frac{\pi}{2} - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1).(2k+1)!}$.

c. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt$ et en déduire l'existence et la valeur de la limite de F en $+\infty$.

10.94 *Centrale Maths1 PSI 2022* Paul Lafon

a. Donner un exemple de série entière de rayon 1 et dont la fonction somme est majorée sur $[0;1[$.

Soit une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n = 0$ et $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

b. Montrer que f est définie sur $]-1;1[$.

c. Montrer que $f(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$.

d. Soit une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est définie sur $]-1;1[$ et $g(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$.

La suite $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend-elle vers 0 ? Indication : reprendre la question **a.**.

10.95 *Centrale Maths1 PSI 2022* Peio Lanot

Soit $A \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, $f : I =]-A;A[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-A;A[,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

a. Montrer que f est développable en série entière sur I. Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor reste intégral sur les intervalles $]-A;0[$ et $]0;A[$.

b. Montrer que $g = e^f$ est aussi développable en série entière sur I.

c. Montrer que $\tan$ est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

10.96 *Mines PSI 2022* Olivier Baesen I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f_\alpha : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2 - 2\mathrm{ch}(\alpha)x + 1}\right)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f_α.

b. Déterminer le développement en série entière de f_α au voisinage de 0.

10.97 *Mines PSI 2022* Lola Belle Wangue I

Soit $a \in]0;1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

a. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que f est égale à sa série de TAYLOR sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = g(ax)$.

10.98 *Mines PSI 2022* Peio Lanot II

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$.

b. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

c. Montrer que f est solution d'une équation différentielle (E).

d. Résoudre (E) et en déduire une expression simple de $f(x)$.

10.99 *Mines PSI 2022* Camille Pucheu II

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$.

a. Montrer que la suite $\left(\dfrac{a_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b. Qu'en déduire sur le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{n!} x^n$?

On pose dans la suite de l'exercice la fonction somme $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

c. Trouver l'expression de $f''(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$ pour $x \in]-R;R[$.

d. En déduire une expression de a_n sous forme de somme.

10.100 *Mines PSI 2022* Matis Viozelange I

Soit $\lambda \in]-1;1[$, on s'intéresse à l'équation $(E)\ :\ f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$ sur $\mathbb{R}$.

a. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que si f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

c. Trouver toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

10.101 *CCINP PSI 2022* Marius Desvalois II

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$. On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ sous réserve de convergence.

a. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.

b. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$.

c. Pour $x \in]-R;R[$, trouver a, b et c tels que : $\forall t \in [0\,;1]$, $\dfrac{1}{(1-xt)(1+t^2)} = \dfrac{a}{1-xt} + \dfrac{bt}{1+t^2} + \dfrac{c}{1+t^2}$.

d. En déduire une expression compacte de $S(x)$ pour $x \in]-R;R[$.

e. Montrer que S est continue sur $[-1;0]$ et en déduire $S(-1)$.

10.102 *CCINP PSI 2022* Léo Ducos-Tourenne I et Anatole Rousset I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$.

a. Donner le domaine de définition I de f.

b. Donner le domaine de dérivabilité de f.

c. Trouver un équivalent de f en 1^-.

d. (rajoutée, Centrale 2012) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de façons d'écrire n comme somme de 2 carrés (d'entiers naturels), ou encore $a_n = \text{card}\Big(\Big\{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \;\Big|\; p^2 + q^2 = n\Big\}\Big)$. Déterminer, pour $x \in I$, une relation entre $f(x)$ et $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En déduire le rayon R' de $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$.

10.103 *CCINP PSI 2022* Colin Herviou-Laborde I

On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.

a. Établir que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$.

b. Montrer que f est définie sur $I = \Big] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\Big[$.

c. Prouver que f est solution de $(E)\ :\ y' = y^2$ sur I.

d. En déduire la valeur de u_n pour tout entier naturel n.

10.104 *CCINP PSI 2022* Paul Mayé I

Soit $F : x \mapsto -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$. On rappelle que $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de F.

b. Montrer que $\forall x \in [0; 1],\ F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

c. Montrer que $\forall x \in]0; 1[,\ F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$.

10.105 *Centrale Maths1 PSI 2023* Paul Bats

On définit la fonction $f : I = \Big] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin(x) + 1}{\cos(x)}$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{N}[X]$ tel que $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$.

b. Montrer que la série de Taylor de f converge sur I.

c. Montrer que f est développable en série entière sur I.

Questions de cours :

- Donner le développement en série entière de Arctan.
- Donner la formule de Taylor reste intégral.
- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : t \mapsto f\big(\cos(t), \text{Arctan}(t), 2^t\big)$. Calculer $g'(t)$.
- Rappeler le théorème des valeurs intermédiaires.

10.106 *Centrale Maths1 PSI 2023* Mathys Bureau et Pierre Dobeli

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2}\,dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Pour $x \in D$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2}\,dt$. Montrer que g est développable en série entière sur D.

c. Montrer que f est développable en série entière sur D.

10.107 *Centrale Maths1 PSI 2023* Fares Keraútret

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ ait un rayon de convergence $R = +\infty$.

On définit alors l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

a. Montrer que $\forall r > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{2\pi} f\big(re^{it}\big)e^{-ipt}dt = 2\pi\, a_p r^p$.

b. Si f est bornée sur $\mathbb{C}$, montrer que $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall r > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ |a_p| \leqslant \dfrac{M}{r^p}$. En déduire que f est constante.

c. S'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant \alpha|z|^q + \beta$, montrer que f est polynomiale.

d. Si $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant e^{\mathrm{Re}\,(z)}$, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = ke^z$.

10.108 *Mines PSI 2023* Raphaël Déniel I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n(2n+1)}$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n(2n+1)}$.

b. $S(R)$ et $S(-R)$ sont-ils définis ? Quel est donc le domaine I de définition de S ?

c. D'après le cours, la fonction S est continue sur quel intervalle au moins ?

d. S est-elle continue sur I ?

e. Calculer $S(x)$ pour $x \in]-R; R[$ à l'aide de fonctions usuelles.

f. Calculer $a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$. Quel est le signe de a ? Était-ce prévisible ?

10.109 *Mines PSI 2023* Juan Dupierris I

On définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a_k a_{n-k}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!}x^n$.

a. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{n!}x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.

b. Décomposer f^2 en série entière.

c. En déduire la valeur de f et des a_n pour tout entier naturel n.

10.110 *Mines PSI 2023* Arthur Melnitchenko II

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

On admet le résultat (C), pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k \underset{+\infty}{\sim} n\ell$.

a. Déterminer un équivalent de u_n et en déduire le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$.

b. Calculer $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

c. Montrer le résultat (C).

10.111 *Mines PSI 2023* Paul Picard II

Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{th}\,(t)}{t^2}\,dt$. On note $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ s'il y a convergence.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$.

b. f est-elle continue en -1 ?

c. Montrer que $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\ln(1-x)$.

10.112 *Mines PSI 2023* Elae Terrien I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note v_n le nombre de n-uplets $(a_1, \cdots, a_n)$ tels que :

- $\forall k \in [\![1;n]\!],\ a_k = \pm 1$.
- $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$.
- $\forall p \in [\![1;n]\!],\ \sum\limits_{k=1}^{p} a_k \geqslant 0$.

a. Justifier que $v_{2n+1} = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Par convention, on pose $v_0 = u_0 = 1$. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_{2n}$.

b. Calculer u_1, u_2, u_3.

c. Trouver, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation liant $u_{n+1}, u_n, \cdots, u_1, u_0$.

d. En s'intéressant à $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$, trouver une expression simple de u_n.

10.113 *CCINP PSI 2023* Rémi Darrieumerle I et Chloé Vagner I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

c. Déterminer un équivalent de f en 1^-.

10.8 Officiel de la Taupe

10.114 *OdlT 2012/2013 Centrale PSI planche 130*

Ensemble de définition D de $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$?

Montrer que S est bijective de $D \cap \mathbb{R}_+$ dans $[0; A]$ où A est un réel qu'on ne cherchera pas à calculer.

Montrer que l'équation (E_n) : $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} = a$ ($a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$) admet une unique solution notée x_n dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et déterminer sa limite.

10.115 *OdlT 2012/2013 ENTPE/EIVP PSI planche 247III*

Déterminer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{2^n n(2n-1)}$.

En plus : on pourra en profiter pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$.

10.116 *OdlT 2012/2013 ENTPE/EIVP PSI planche 248II*

On donne une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on note f sa fonction somme.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $p \geqslant 1$. On s'intéresse à la série $\sum_{n\geqslant 0} P(n) a_n x^n$ dont on note R' le rayon de convergence et g la fonction somme. Montrer que, pour n assez grand, on a $|P(n)| \geqslant 1$. Qu'en déduit-on pour R' ?

Montrer que $\big(1, X, X(X-1), \cdots, X(X-1)\cdots(X-p+1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

En déduire que $R = R'$ et exprimer $g(x)$ en fonction des dérivées de f.

Donner le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2 2^n + 2^n}{n!} x^n$.

10.117 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 158II*

Convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2-1}{n+2} x^n$.

10.118 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 166II*

a. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de (E) : $f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$ avec $\lambda \in]-1; 1[$, alors f est de classe C^∞ et développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

b. Donner toutes les solutions de (E).

c. Montrer que $\left(\prod_{k=0}^{n} (1+\lambda^k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite non nulle $K(\lambda)$.

d. Montrer qu'une solution f non nulle de (E) vérifie $f(x) \underset{+\infty}{\sim} K(\lambda) f(0) e^{\lambda x}$.

10.119 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 169I*

a. Ensemble de définition de $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(|1-y|)}{y} dy$.

b. f admet-elle un développement en série entière au voisinage de 0 ? Calculer $f(1)$.

10.120 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 228II*

a. Montrer que Arcsin est développable en série entière sur un intervalle $]-a; a[$ et donner cette série.
b. Montrer que $f : t \mapsto (\mathrm{Arcsin}(t))^2$ est développable en série entière sur $]-a; a[$.
c. Trouver une équation différentielle vérifiée par f' et en déduire ce développement.

10.121 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 236I*

a. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = 1$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge et trouver sa limite.

10.122 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 279II*

Montrer que f définie par $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer qu'elle est de classe C^∞ et calculer $f^{(n)}(0)$ en fonction de n.

10.123 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 285I*

a. Développement en série entière de $\ln(1-x)$.

b. Étudier $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2}\right)$.

10.124 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 290II*

a. Trouver une série entière f non nulle solution de $(E)\ :\ xy''(x) + (1+x)y' - py = 0$ avec $p \in \mathbb{R}$. Quel est son rayon de convergence ?

b. Si $p \in \mathbb{N}$, montrer qu'un polynôme, dont on précisera le degré, est solution de (E).

10.125 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 131II*

Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n x^n$ et calcul de la limite en 1 de sa somme.

Soit une suite réelle (b_n) telle que $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ converge ; que dire du rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$?

On le suppose égal à 1 ; montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est continue en 1.

10.126 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 132I* Nature et somme de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{3n+2}$.

10.127 *OdlT 2015/2016 Centrale PSI planche 177*

On donne une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ réelle telle que $(na_n)_{n\geqslant 0}$ tende vers 0.

Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Montrer que $f(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$. Réciproquement, si $f(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$, $(na_n)_{n\geqslant 0}$ tend-elle vers 0 ?

10.128 *OdlT 2015/2016 Centrale PSI planche 190*

On suppose $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul, et telle que $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| R^n$ converge.

Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue en R.

Soit $f(t) = \frac{1}{t} \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|$; justifier l'existence de $\int_0^1 f(t)dt$ et l'exprimer à l'aide d'une série.

Justifier que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et la calculer sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

10.129 *OdlT 2015/2016 ENSEA planche 281I*

Montrer que si $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n t^n}{\sqrt{1+n^2}}$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur tout segment de $[0;1[$. Que peut-on en déduire pour sa somme f ? Quelle est la nature de la suite de terme général $v_n = \int_0^1 u_n(t)\mathrm{d}t$? Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge.

10.130 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 104II*

Si R est le rayon de convergence de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, quel est le mode de convergence de f sur $]-R;R[$?
On note p_n le nombre de partitions de $[\![1;n]\!]$ (rappel : $\{U_1,\dots,U_p\}$ est une partition de $[\![1;n]\!]$ si et seulement si les U_k sont deux à deux disjointes, non vides, et si leur réunion vaut $[\![1;n]\!]$). On pose $p_0 = 1$. Montrer que $p_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} p_k$. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{p_n}{n!} x^n$; montrer que f a un rayon $R \geqslant 1$ puis calculer $f(x)$.

10.131 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 110I*

On note D_n le nombre de permutations sans point fixe de $\{1,\dots,n\}$ avec $D_0 = 1$ par convention.
Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} D_k = n!$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{D_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.
On note S sa somme sur $]-1;1[$; calculer $T(x) = e^x S(x)$ et en déduire une expression de D_n.

10.132 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 204I*

Déterminer la limite de la suite de terme général $a_n = \int_0^1 \left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant \dfrac{1}{1+n}$. Rayon de convergence R et domaine de définition de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

10.133 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 210I*

Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}}$ converge et calculer sa somme.

10.134 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 211I*

Nature et somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n$.

10.135 *OdlT 2016/2017 EIVP PSI planche 245I*

Développement en série entière de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$; en déduire celui de $\dfrac{1}{(1-x)^{3/2}}$.

Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{4^k}\dbinom{2k}{k} = \dfrac{2n+1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$ à l'aide d'un produit de Cauchy.

10.136 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 112I*

Domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^x \dfrac{\ln|1-t|}{t}\mathrm{d}t$. f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Quel est alors son rayon de convergence ? Calculer $f(1)$.

10.137 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 115II*

On note p_n le nombre de partitions de $\{1,\dots,n\}$ (rappel : $\{U_1,\dots,U_p\}$ est une partition de $[\![1;n]\!]$ si et seulement si les U_k sont deux à deux disjointes, non vides, et si leur réunion vaut $[\![1;n]\!]$).

Montrer que $p_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k$ et calculer $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{p_n}{n!}x^n$.

10.138 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 117I*

Rayon de convergence et somme de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{3n+2}$.

10.139 *OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 175*

On donne $u_0=1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+a}{n+b}$ où a et b sont deux réels strictement positifs, et on pose $v_n=\ln(n^{b-a}u_n)$.
Montrer la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0}(v_{n+1}-v_n)$ et en déduire une condition sur a et b pour que $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ converge.

Cette condition étant vérifiée, on note $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$, donner le domaine de définition de f et calculer $f(1)$.

10.140 *OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 216I*

Rayon de convergence et somme de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)x^n$.

10.141 *Compléments OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 443I*

a. Montrer que la suite de terme général $a_n=\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$ est convergente et calculer sa limite.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^na_n$ est convergente.

c. Montrer que $a_n\geqslant\frac{1}{n+1}$ et en déduire le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$.

d. Déterminer $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ en fonction des fonctions usuelles.

e. En déduire la valeur exacte de $f(-1)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^na_n$.