# SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 10 SÉRIES ENTIÈRES

## 10.1 Rayon et expression

**10.1** $R=1$, règle de d'Alembert appliquée aux séries numériques : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(3n+2)|x|^{2n+3}}{(3n+5)|x|^{2n+1}}=|x|^2$.

La fonction somme est notée $S$, elle est impaire et pour $x\in[0;1[$, $\sqrt{x}S(x^{3/2})=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{3n+2}}{3n+2}=g(x)$. On dérive et on obtient $\forall x\in]-1;1[$, $g'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^{3n+1}=\dfrac{x}{1-x^3}$ qu'on primitive en décomposant en éléments simples : $g'(x)=\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{x-1}{1+x+x^2}\Big)$. On intègre en écrivant $g'(x)=\dfrac{1}{3(1-x)}+\dfrac{(2x+1)}{6(1+x+x^2)}-\dfrac{1}{2(1+x+x^2)}$ donc comme $g(0)=0$, il vient $g(x)=-\dfrac{1}{3}\ln(1-x)+\dfrac{1}{6}\ln(1+x+x^2)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\dfrac{\pi}{6}\right]$. Il suffit donc d'écrire que pour $x\in[0;1[$, $S(x)=\dfrac{1}{x^{1/3}}g(x^{2/3})$ et c'est fait.

**10.2** **a.** Le rayon de convergence est $R=1$ par la règle de d'Alembert, il y a convergence en $1$ et en $-1$ par le critère de Riemann donc l'intervalle de convergence est $[-1;1]$.

**b.** On a $\forall x\in]-1;1[$, $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\Big(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\Big)x^n=x\ln(1+x)+\Big(\ln(1+x)-x\Big)$. On aurait aussi pu obtenir cette formule en prenant la dérivée de $f$ et en intégrant ensuite.

**c.** Comme il y a convergence normale sur $[-1;1]$ car $||u_n||_\infty=\dfrac{1}{n(n-1)}$ en posant $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$, on a $f(1)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)=2\ln(2)-1$ et $f(-1)=\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=1$.

**10.3** On pose l'équation caractéristique de cette récurrence linéaire : $z^2-2z-1=0$ dont les solutions sont $\sqrt{2}+1$ et $\sqrt{2}-1$. Après des calculs classiques : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=\dfrac{1}{2}\Big((\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n\Big)\underset{\infty}{\sim}\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^n$ donc le rayon est celui de $\sum\limits_{n\geqslant0}(\sqrt{2}+1)^nx^n$ et donc $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$.

Ensuite, en notant $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ pour $x\in]-R;R[$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n)x^{n+2}=0$ ce qui donne $(f(x)-a_1x-a_0)-2x(f(x)-a_0)-x^2f(x)=0$ et donc $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x-1}$.

**10.4** Si $r>0$, on a $(a_{2n}r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ bornée si et seulement si $r\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ et $(a_{2n+1}r^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ bornée si et seulement si $r\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{b}}$. Comme $(a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(a_{2n}r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1}r^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ le sont : $R=\dfrac{1}{\sqrt{b}}$. Alors $\forall x\in]-R;R[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(ax^2)^n+x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(bx^2)^n=\dfrac{1}{1-ax^2}+\dfrac{x}{1-bx^2}$.

**10.5** Le rayon est classiquement $R = 1$. Pour calculer la somme de la série, il suffit de décomposer en éléments simples : $\frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{2n+1+5}{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\frac{1}{2n+1}$. On distingue ensuite $x > 0$ ou $x < 0$.

Si $x > 0$, on pose $x = y^2$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{2n+1} y^{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} y^{2n} + \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2(1-y^2)} + \frac{5}{2y}\text{Argth}\,(y)$.

$\forall x \in [0;1[$, $f(x) = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{5}{2\sqrt{x}}\text{Argth}\,(\sqrt{x})$. De même : $\forall x \in ]-1;0]$, $f(x) = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{5}{2\sqrt{-x}}\text{Arctan}(\sqrt{-x})$.

**10.6** Par croissance comparée, $\left(\frac{n^2+n^3}{2^n+3^n}x^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée si et seulement si $|x| < \sqrt{3}$ : $R = \sqrt{3}$.

**10.7** **a.** $R = 1$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, la somme de la série en tout point du cercle de centre $0$ et de rayon 1 donc a fortiori aux bornes de l'intervalle $]-1;1[$

**b.** On trouve classiquement : $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - e^x$.

**c.** On trouve $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{e}$ alors que $f$ diverge en $-1$ ; et $f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{(1-x)^2}$.

**10.8** Les deux séries entières sont classiquement de rayon $1$, divergence en $\pm 1$ pour la première car le terme général ne tend pas vers $0$ et convergence en $\pm 1$ pour la seconde avec le critère de Riemann.

$\forall y \in ]-1;1[$, $F(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 y^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)y^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)y^n + \sum_{n=0}^{+\infty} y^n$ et en reconnaissant les dérivées de la série géométrique : $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 y^n = \left(\frac{1}{1-y}\right)'' - 3\left(\frac{1}{1-y}\right)' + \frac{1}{1-y} = \frac{2-3(1-y)+(1-y)^2}{(1-y)^3} = \frac{y^2+y}{(1-y)^3}$.

Ainsi : $\forall x \in ]-1;1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2(-1)^n x^{2n+1} = xF(-x^2) = \frac{x^5-x^3}{(1+x^2)^3}$.

$\forall x \in ]-1;1[\setminus\{0\}$, $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} = -\frac{x}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x}\left(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}\right)$.

**10.9** **a.** Le rayon de convergence de ces séries entières est $R_p = 1$ et il y a divergence en $1$ et en $-1$.

**b.** Les $f_p$ sont de classe $C^\infty$ (et dérivables terme à terme) sur l'intervalle ouvert de convergence donc : $\forall x \in ]-1;1[$, $xf'_p(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} n^{p+1}x^{n-1} = f_{p+1}(x)$.

**c.** On voit par récurrence sur $p$ que $f_p$ a, sur $D$, une expression du type : $f_p(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} + \sum_{j=1}^{p}\frac{a_j(p)}{(1-x)^j}$.

C'est vrai pour $p = 0, 1$ et si ça l'est pour un entier $p$, $f_{p+1}(x) = xf'_p(x) = \frac{(p+1)!x}{(1-x)^{p+2}} + x\sum_{j=1}^{p}\frac{ja_j(p)}{(1-x)^{j+1}}$ qui se met sous la bonne forme en écrivant $x = x - 1 + 1$. on a donc $f_p(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.

**d.** D'après la formule précédente, $f_p(x)$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $-1^+$.

**10.10** **a.** Par la règle de d'Alembert par exemple, on trouve $R = 1$.

**b.** Il y a convergence en $-1$ d'après le CSSA, et divergence en $1$ d'après le critère de Riemann.

**c.** Sur $[-1;0]$, on a $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ qui tend vers $0$ donc il y a convergence uniforme de la série sur $[-1;0]$ donc continuité en $-1$.

**d.** Pour $n \geqslant 1$, on a $\sqrt{n} \leqslant n$ donc pour $x \in [0;1]$, $f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ donc $\lim_{x\to 1-} f(x) = +\infty$.

**10.11** Le rayon vaut $R = \sqrt{3}$ avec d'Alembert.

On reconnaît la série entière de la fonction $\text{Arctan}$ et $f(x) = 3\sqrt{3}\,\text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$.

## 10.2 Théorie

**10.12** Notons $R$ le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $R'$ celui de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{a_n} z^n$.

Si $R > 0$ et $0 < r < R$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n r^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n r^n} = +\infty$ et ainsi $(\frac{1}{a_n} r'^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $0$ avec $r' = \frac{1}{r}$ donc $\frac{1}{r} \geqslant R'$. Ainsi $\frac{1}{r} > \frac{1}{R} \Longrightarrow \frac{1}{r} \geqslant R'$ ; ceci étant vrai pour tout $r$ vérifiant cette condition : $\frac{1}{R} \geqslant R'$ donc $RR' \leqslant 1$. C'est a fortiori vrai si $R = 0$. Dans tous les cas $RR' \leqslant 1$.

**10.13** Notons $R'$ le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 z^n$. Si $R = 0$ alors $(a_n(\sqrt{r})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ donc a fortiori $(a_n^2 r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ainsi $R' = 0$. Réciproquement, si $R' = 0$ alors $(a_n^2 r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ donc a fortiori $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ainsi $R = 0$.
Si $R > 0$ et $0 < r < R \Longleftrightarrow 0 < r^2 < R^2$, alors $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc a fortiori $(a_n^2 r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ donc $r^2 \leqslant R'$. ceci implique $R^2 \leqslant R'$ (puisque c'est vrai pour tout $r^2 \in ]0; R^2[$). Réciproquement, si $R' > 0$ et $0 < r' < R'$, on a $(a_n^2 r'^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée donc $(|a_n(\sqrt{r'}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi ce qui implique $\sqrt{r'} \leqslant R \Longleftrightarrow r' \leqslant R^2$ d'où $R' \leqslant R^2$.
Ainsi dans tous les cas, on a $R' = R^2$.

**10.14** **a.** $\forall n \in \mathbb{N}, \| b_n| \leqslant 1$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ est de rayon de convergence $1$ donc $R' \geqslant 1$.
De plus $\forall n \in \mathbb{N}, \| b_n| \leqslant |a_n|$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est de rayon de convergence $R$ donc $R' \geqslant R$. Ainsi $R' \geqslant \mathrm{Max}(1, R)$.

**b.** Si $R' > 1$, on a $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ qui converge donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ et comme $|b_n| = \frac{|a_n|}{1+|a_n|} \Longleftrightarrow |a_n| = \frac{|b_n|}{1-|b_n|}$ dès que $n$ est suffisamment grand donc $|a_n| \underset{\infty}{\sim} |b_n|$ donc $R = R'$.

**c.** Si $R' = 1$, on a $R \leqslant 1$ d'après **a.** donc $R' = \mathrm{Max}(1, R)$. D'après **b.**, dans tous les cas : $R' = \mathrm{Max}(1, R)$.

**10.15** On note $R$ le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $R'$ celui de $\sum\limits_{n\geqslant 0} S_n x^n$. Comme $a_n \leqslant S_n$, on a $R' \leqslant R$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ diverge en $1$ donc $R \leqslant 1$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{S_{n+1}}{S_n} = 1 + \frac{a_n}{S_n}$ tend vers $1$, donc $R' = 1$ d'après la règle de d'ALEMBERT. Ainsi : $R = R' = 1$.
$\forall x \in ]-1; 1[$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n x^n\right)$ par produit de CAUCHY de séries absolument convergentes donc en notant $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$, on a $(1-x)f(x) = g(x)$.

**10.16** Soit $x \in [0; R[$, posons $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors si $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n x^n$, on a $f$ de rayon $1$ et la relation : $\forall x \in [0; 1[,\ f(x) = S(Rx)$. Cela nous permet de nous ramener à $R = 1$.
On reprend donc $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $R = 1$ et on pose $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ (convergence par hypothèse). En posant $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ la somme de série, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = R_{n-1} - R_n$ avec $R_{-1} = S$. On effectue une transformation d'ABEL : $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = S - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1})$ après calculs. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$, pour un $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|R_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Or $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{n_0} R_n(x^n - x^{n+1})$ est continue en $1$ et vaut $0$ en $1$, il existe $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in [1-\alpha; 1]$, $\left|\sum\limits_{n=0}^{n_0} R_n(x^n - x^{n+1})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in [1-\alpha; 1]$ :

$|S(x)-S(1)|=|S(x)-S|=\Big|\sum_{n=0}^{+\infty}R_n(x^n-x^{n+1})\Big|\leqslant\Big|\sum_{n=0}^{n_0}R_n(x^n-x^{n+1})\Big|+\Big|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}R_n(x^n-x^{n+1})\Big|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$ car $\forall x\in[0;1],\ 0\leqslant x^n-x^{n+1}\leqslant 1$ donc $\Big|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}R_n(x^n-x^{n+1})\Big|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}(x^n-x^{n+1})=\frac{\varepsilon}{2}x^{n_0+1}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. On conclut bien que, puisque $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in[1-\alpha;1],\ |Sx)-S(1)|\leqslant\varepsilon$, on a $\lim\limits_{t\to R^-}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nR^n$.

## 10.3 Relations avec l'intégrale

**10.17** **a.** On a : $\forall t\in[0\,;1],\ \frac{t^n}{2}\leqslant\frac{t^n}{1+t^2}\leqslant t^n$ donc $\frac{1}{2(n+1)}\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{n+1}$ d'où $R=1$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement décroissante, on a convergence en $-1$ mais pas en $1$.
**b.** Pour $|x|<1$, la série de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n(t)=\frac{x^nt^n}{1+t^2}$ converge normalement sur $[0\,;1]$ car $||u_n||_\infty\leqslant|x|^n$ donc on peut intervertir série et intégrale pour avoir la relation souhaitée.
**c.** On trouve $a=\frac{x^2}{1+x^2}$, $b=\frac{x}{1+x^2}$ et $c=\frac{1}{1+x^2}$. On intègre alors pour avoir la relation suivante : $f(x)=\Big[-\frac{x}{1+x^2}\ln(1-xt)+\frac{x}{2(1+x^2)}\ln(1+t^2)+\frac{1}{1+x^2}\mathrm{Arctan}(t)\Big]_0^1=\frac{-4x\ln(1-x)+2x\ln(2)+\pi}{4(1+x^2)}$.
Ainsi $f(-1)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^na_n=\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\frac{\ln(2)}{2}+\frac{\pi}{8}$ par convergence uniforme sur $[-1\,;0]$.
**d.** $a_{n+2}+a_n=\frac{1}{n+1}$ donc $a_{2n}=(-1)^n\Big(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\Big)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, $\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

**10.18** **a.** On va trouver un encadrement de $a_n$ pour répondre à ces deux questions. Pour $t\in[0;1]$, classiquement, $0\leqslant t\leqslant\frac{1+t^2}{2}\leqslant\frac{1+t}{2}\leqslant 1$ car $(t-1)^2\geqslant 0$ et $t^2\leqslant t$. En élevant ces inégalités à la puissance $n$ et en les intégrant sur $[0;1]$, $\int_0^1 t^n dt=\Big[\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1=\frac{1}{n+1}\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{n+1}\Big(2-\frac{1}{2^n}\Big)=\Big[\frac{(1+t)^{n+1}}{2^n(n+1)}\Big]_0^1=\int_0^1\Big(\frac{1+t}{2}\Big)^n dt$ ce qui donne plus simplement l'encadrement $\frac{1}{n+1}\leqslant a_n\leqslant\frac{2}{n+1}$.
• Ainsi $a_n\geqslant\frac{1}{n+1}$ et la série harmonique $\sum_{n\geqslant0}\frac{1}{n+1}$ diverge donc $\sum_{n\geqslant0}a_n$ diverge par comparaison.
• Comme $\forall t\in[0;1],\ \frac{1+t^2}{2}\in[0;1]$, on a $\forall n\in\mathbb{N},\ \Big(\frac{1+t^2}{2}\Big)^{n+1}\leqslant\Big(\frac{1+t^2}{2}\Big)^n$ ce qui montre par croissance de l'intégrale que $a_{n+1}\leqslant a_n$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et elle tend vers $0$ par encadrement car $0\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{2n+1}$ donc $\sum_{n\geqslant0}(-1)^na_n$ converge par le critère spécial des séries alternées.
**b.** La série $\sum_{n\geqslant0}a_n$ diverge d'après **a.** donc $R\leqslant1$. De plus, la série $\sum_{n\geqslant0}(-1)^na_n$ converge d'après **a.** donc $R\geqslant1$. Ainsi, $R=1$ et l'intervalle de convergence est $[-1\,;1[$ d'après la question **a.**.
**c.** Pour $x\in]-1;1[$, en posant $u_n(t)=x^n\Big(\frac{1+t^2}{2}\Big)^n$, comme la fonction $|u_n|$ est croissante sur $[0;1]$, on a $||u_n||_{\infty,[0;1]}=|u_n(1)|=|x|^n$ et la série géométrique $\sum_{n\geqslant0}|x|^n$ converge puisque $|x|<1$. Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant0}u_n$ converge normalement sur le segment $[0;1]$ donc, par un théorème du cours et car $\Big|\frac{x(1+t^2)}{2}\Big|<1$ pour $t\in[0;1]$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\Big(\frac{x(1+t^2)}{2}\Big)^n dt=\int_0^1\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{x(1+t^2)}{2}\Big)^n\Big)dt=\int_0^1\frac{2dt}{2-x-xt^2}$. Pour $x\in]-1\,;0[$, on a donc $f(x)=\frac{2}{2-x}\int_0^1\frac{1}{1+\frac{-x}{2-x}t^2}dt=\frac{2}{2-x}\sqrt{\frac{2-x}{-x}}\int_0^1\frac{\sqrt{\frac{-x}{2-x}}}{1+\frac{-x}{2-x}t^2}dt$ car $\frac{-x}{2-x}>0$. Ainsi, on conclut

classiquement que $f(x)=\left[\dfrac{2}{\sqrt{-x(2-x)}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{-x}{2-x}}\ t\right)\right]_0^1=\dfrac{2}{\sqrt{-x(2-x)}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{-x}{2-x}}\right)$.

**d.** Avec les mêmes notations, si $x\in[-1;0]$ (on a vu la convergence de $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ en question **a.**) la suite $(a_n(-x)^n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers $0$ donc la série alternée $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n(-x)^n$ converge par le critère spécial et on peut majorer $|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k x^k\right|\leqslant a_{n+1}|x|^{n+1}\leqslant a_{n+1}$. Ainsi, $||R_n||_{\infty,[-1;0]}\leqslant a_{n+1}$ or on sait que $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}||R_n||_{\infty,[-1;0]}=0$ par encadrement et on a convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ sur $[-1;0]$. Alors, $f$ est continue sur $[-1;0]$ car toutes les fonctions $u_n$ sont continues sur $[-1;0]$ et $f(-1)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n=\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\dfrac{2}{\sqrt{-x(2-x)}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{-x}{2-x}}\right)=\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ car $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

**10.19** Comme $t\mapsto e^{-t^2}$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $f:x\mapsto\int_x^{2x}e^{-t^2}dt$ l'est aussi. Or, pour tout réel $x$, $f'(x)=2e^{-4x^2}-e^{-x^2}$ qu'on sait développer en série entière avec le développement de la série exponentielle : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=2\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n4^nx^{2n}}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(2^{2n+1}-1)x^{2n}}{n!}$. Comme le rayon de la série entière décrivant $f'(x)$ est $R+\infty$, celui de la série primitive est aussi $R=+\infty$ et on a donc en intégrant terme à terme : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(2^{2n+1}-1)x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$ car $f(0)=0$.

**10.20** $t^2-\frac{5}{2}t+1=(t-2)\left(t-\frac{1}{2}\right)=(1-2t)\left(1-\frac{t}{2}\right)$ donc $f$ est définie et $C^\infty$ sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$. On dérive : $\forall x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[,\ f'(x)=\frac{1}{x}\ln(1-2x)+\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2^n}{n}-\frac{1}{2^n n}\right)x^{n-1}$. Le rayon de cette série est $R=\frac{1}{2}$, et le rayon de la série primitive est le même donc $f$ est DSE sur $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ où $f(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2^n}{n^2}-\frac{1}{2^nn^2}\right)x^n$.

**10.21** $\forall t\in]0;1[,\ \ln(1-t)\ln(t)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n\ln(t)}{n}$ en développant en série entière $\ln(1-t)$. Si $f_n(t)=\dfrac{t^n\ln(t)}{n}$, on a bien les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues et intégrables sur $]0;1[$, $\sum_{n\geqslant 1}f_n$ converge simplement sur $]0;1[$ vers une fonction continue et $\int_{]0;1[}f_n=\left[\dfrac{t^n\ln(t)}{n(n+1)}\right]_0^1-\int_0^1\dfrac{t^n}{n(n+1)}dt=-\dfrac{1}{n(n+1)^2}$. Comme $\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1|f_n|$ converge, par le TITT : $\int_0^1\ln(t)\ln(1-t)dt=-\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n\ln(t)}{n}dt=-\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\dfrac{t^n\ln(t)}{n}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)^2}$. Ainsi $\int_0^1\ln(t)\ln(1-t)dt=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)=2-\dfrac{\pi^2}{6}$.

**10.22** On a $\forall x\in[0;1],\ \dfrac{\mathrm{Arctan}\,x}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{2n+1}$. On majore le reste de cette série par le CSSA, ce qui donne : $\forall x\in[0;1],\ |R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^kx^{2k}}{2k+1}\right|\leqslant\dfrac{x^{2n+2}}{2n+3}\leqslant\dfrac{1}{2n+3}$ donc la convergence est uniforme sur $[0;1]$. On peut donc intervertir et $\int_0^1\dfrac{\mathrm{Arctan}\,x}{x}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{2n+1}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{2n+1}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

**10.23** La fonction $f$ est prolongeable par continuité (faire un DL) en $0$ en posant $f(0)=-2$, elle est continue et strictement négative sur $]-1;1[$. On a $f(t)\underset{1}{\sim}\ln(1-t)$ or $\ln$ est intégrable sur $]0;1]$ donc $t\mapsto\ln(1-t)$ l'est sur $[0;1[$. De même $f(t)\underset{-1}{\sim}\ln(1+t)$ or $\ln$ est intégrable sur $]0;1]$ donc $t\mapsto\ln(1+t)$ l'est sur $]-1;0]$. Ainsi $f$ est intégrable sur $]-1;1[$. Ensuite, on constate que $f(t)=-2\dfrac{\mathrm{Argth}\,(t)}{t}$ si $t\neq 0$ et $f(0)=-2$ donc $f$ est développable en série entière en $\forall t\in]-1;1[,\ f(t)=-2\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{t^{2n}}{2n+1}$. Soit $F$ la primitive de $f$ qui s'annule en

0, on a $\forall t \in ]-1;1[,\ F(t) = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

L'intégrale à calculer vaut $\lim_{t\to 1^-} F(t) - \lim_{t\to -1^+} F(t) = 2\lim_{t\to 1^-} F(t) = -4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ (par imparité de $F$ et convergence normale sur $[-1;1]$ de la série associée). Alors $\int_{-1}^{1} f(t)dt = -\frac{\pi^2}{2}$.

## 10.4 Équation différentielle

**10.24** **a.** On sait que $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sont DSE avec un rayon 1 donc $f$ est aussi DSE avec un rayon au moins égal à 1 par produit de CAUCHY.
**b.** On dérive $f$ et on trouve $\forall x \in ]-1;1[,\ (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$ par calculs.
**c.** On note $\forall x \in ]-1;1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ ce développement en série entière car $f$ est impaire. Alors on a : $\forall x \in ]-1;1[,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1)a_{n-1}x^{2n-2}$ donc $x^2f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1)a_{n-1}x^{2n}$ et $xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{2n}$ d'où, en remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient : $a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}((2n+1)a_n - (2n-1)a_{n-1} - a_{n-1})x^{2n} = 1$ donc $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{2n}{2n+1}a_{n-1}$. Par récurrence, on trouve : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ et on vérifie que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ donc $f$ est bien DSE avec un rayon $R = 1$ et on a $\forall x \in ]-1;1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

**10.25** **a.** Par la méthode classique, on montre que si $\varphi$ est DSE et solution de $(E)$, alors elle est proportionnelle à $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$. D'après d'ALEMBERT, le rayon de cette série entière est $R = +\infty$. On a clairement, $\varphi(x) = \text{ch}(\sqrt{x})$ si $x > 0$, $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$. En remontant les calculs sur les coefficients de la série entière, on constate que $\varphi$ est bien solution DSE de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.
**b.** Par la méthode LAGRANGE, on pose $z = y\,\text{ch}(\sqrt{x})$ et on parvient à l'équation $z'' + \left(\frac{\text{th}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x}\right)z' = 0$. On intègre en reconnaissant les primitives et on obtient $z' = \frac{K_1}{\sqrt{x}(\text{ch}(\sqrt{x}))^2}$ donc $z = 2K_1\text{th}(\sqrt{x}) + K_2$ donc $y = A_1\text{ch}(\sqrt{x}) + A_2\text{sh}(\sqrt{x})$. Du côté négatif et on obtient $y = B_1\cos(\sqrt{-x}) + B_2\sin(\sqrt{-x})$.
**c.** Pour un prolongement $C^1$ en $0$ : $A_2 = B_2 = 0$ et $A_1 = B_1$ en utilisant les développements limités.

**10.26** **a.** Par la méthode classique, on montre que si $\varphi$ est DSE et solution de $(E)$, alors elle est proportionnelle à $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$. D'après d'ALEMBERT, le rayon de cette série entière est $R = +\infty$. On a clairement, $\varphi(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x}$ si $x \neq 0$, $\varphi(0) = 1$. En remontant les calculs sur les coefficients de la série entière, on constate que $\varphi$ est bien solution DSE de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.
**b.** Par la méthode LAGRANGE, on pose $z = y\varphi(x)$ et on parvient à l'équation $z'' + \text{coth}(x)z' = 0$. On intègre en reconnaissant les primitives et on obtient $z' = \frac{K_1}{\text{sh}(x)^2}$ donc $z = -K_1\text{coth}(x) + K_2$ et alors cela donne $y = A_1\frac{\text{ch}(x)}{x} + A_2\frac{\text{sh}(x)}{x}$ (sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$).
**c.** Par un prolongement $C^1$ en $0$ : $A_1 = B_1 = 0$ et $A_2 = B_2$ en utilisant les développements limités.

## 10.5 Produit de Cauchy et dénombrement

**10.27** **a.** On a $b_1 = 1$, $a_2 = 1$, $b_3 = 2$, $a_4 = 5$ et $b_5 = 16$ en les écrivant toutes ces permutations zig-zag sous la forme de liste $(\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$. Par exemple $a_4 = 5$ car les seules permutations zig-zag pour $n = 4$ sont $(1,3,2,4)$, $(1,4,2,3)$, $(2,3,1,4)$, $(2,4,1,3)$, $(3,4,1,2)$.

**b.** Comme $a_n \leqslant n!$ et $b_n \leqslant n!$, on a $0 \leqslant \dfrac{a_n}{n!} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{b_n}{n!} \leqslant 1$ donc les rayons vérifient $R_a \geqslant 1$ et $R_b \geqslant 1$.

**c.** Soit $n \geqslant 2$ pair, on compte le nombre de permutations up-down de $[\![1; n+1]\!]$ pour lesquelles la position de $n+1$ (le plus grand élément) dans la liste est $2k$ (forcément une position paire $2 \leqslant 2k \leqslant n$ puisque ça monte et ça descend) :

- il faut d'abord choisir les $2k-1$ entiers parmi les $n$ entiers de $[\![1; n]\!]$ qui sont avant $n+1$ dans la liste : cela fait $\dbinom{n}{2k-1}$ choix.
- ensuite il faut choisir la permutation up-down qui contient ces $2k-1$ éléments : cela fait $b_{2k-1}$ choix (ce nombre ne dépend que du nombre d'éléments et pas des éléments eux-mêmes).
- ensuite il faut choisir la permutation up-down qui contient les $n-2k+1$ entiers qui sont après $n+1$ (pas besoin de choisir ces entiers, ce sont ceux qui restent) : cela fait $b_{n-2k+1}$ choix.

Comme on obtient une partition des permutations up-down quand on fait varier l'entier $2k$ entre 2 et $n$, on obtient : $b_{n+1} = \displaystyle\sum_{2 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k-1} b_{2k-1} b_{n-2k+1}$ ; mais avec les conventions : $b_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k b_{n-k}$.

Soit $n \geqslant 3$ impair, on compte le nombre de permutations up-down de $[\![1; n+1]\!]$ pour lesquelles la position de $n+1$ dans la liste est $2k$ :

- choisir les $2k-1$ entiers dans $[\![1; n]\!]$ qui sont avant $n+1$ dans la liste : cela fait $\dbinom{n}{2k-1}$ choix.
- ensuite il faut choisir la permutation up-down qui contient ces $2k-1$ éléments : cela fait $b_{2k-1}$ choix.
- ensuite il faut choisir la permutation up-down qui contient les $n-2k+1$ entiers qui sont après $n+1$ (pas besoin de choisir ces entiers, ce sont ceux qui restent) : cela fait $a_{n-2k+1}$ choix.

De nouveau, $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{2 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k-1} b_{2k-1} a_{n-2k+1}$ qui se transforme avec les conventions et le changement d'indices $k = n - j$ en la formule plus homogène $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k a_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j b_{n-j}$.

**d.** $\forall x \in ]-R_b; R_b[$, $b(x)^2 = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{b_i}{i!} x^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b_j}{j!} x^j\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+j=n} \frac{b_i}{i!} \frac{b_j}{j!}\right) x^n$ ce qui nous donne aussi $b^2(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k b_{n-k}\right) \frac{x^n}{n!}$.

$\forall x \in ]-R_b; R_b[$, $b(x)^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k b_{n-k}\right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_{n+1}}{n!} x^n = b'(x) - 1$.

$\forall x \in ]-R_b; R_b[$, $\dfrac{b'(x)}{1 + b(x)^2} = 1$ donc $x \mapsto \mathrm{Arctan}(b(x)) - x$ est constante sur cet intervalle et comme on a la condition initiale $b(0) = 0$ il vient : $b(x) = \tan(x)$.

**e.** Comme $\tan$ est DSE sur $]-1; 1[$ au moins, elle est égale à sa série de TAYLOR donc $b_{2n+1} = \dfrac{\tan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}$.

Si $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{2k+1} x^{2k+1} + \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^x (x-t)^{2n+1} \tan^{(2n+2)}(t) dt$ mais comme on sait que $\tan' = 1 + \tan^2$, on montre par une récurrence facile que $\tan^{(k)}$ est positive sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{2k+1} x^{2k+1} \leqslant \tan(x)$ donc $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} b_{2k+1} x^{2k+1}$ est convergente et on a $R_b \geqslant \frac{\pi}{2}$. Comme la fonction $\tan$ n'admet pas de limite finie en $\frac{\pi}{2}$, on a aussi $R_b \leqslant \frac{\pi}{2}$ ce qui donne au final : $R_b = \frac{\pi}{2}$.

On a donc par imparité de $\tan$ : $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1}x^{2n+1} = \tan(x)$.

**f.** Si $R = \mathrm{Min}(R_a, R_b)$, $\forall x \in ]-R;R[$, $a(x)b(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}\right)\dfrac{x^n}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{n!}x^n = a'(x)$.

Alors $a'(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}a(x)$ qui est une équation linéaire homogène du premier ordre ; comme $x \mapsto \ln(|\cos(x)|)$ est une primitive de $x \mapsto \tan(x)$ et que $a(0) = 1$ il vient : $a(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

Comme avant on montre par récurrence avec la formule $\left(\dfrac{1}{\cos}\right)' = \tan \times \left(\dfrac{1}{\cos}\right)$ que les dérivées successives de $\dfrac{1}{\cos}$ sont positives donc que $R_a = \dfrac{\pi}{2}$. Par parité de $\dfrac{1}{\cos}$ : $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_{2n}}{(2n)!}x^{2n} = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

Une formule simple relie ces nombres tangents aux valeurs de la fonction zeta de Riemann en les nombres entiers : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2n) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^{2n}} = \dfrac{b_{2n-1}}{2(4^n-1)(2n-1)!}\pi^{2n}$ de sorte qu'on a les jolies relations :

$\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \dfrac{2}{2(16-1)3!}\pi^4 = \dfrac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \dfrac{16}{2(64-1)5!}\pi^6 = \dfrac{\pi^6}{945}$, $\zeta(8) = \dfrac{272}{2(256-1)7!}\pi^6 = \dfrac{\pi^8}{9450}$.

Comme on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\zeta(2n) = 1$, on a l'équivalent : $b_{2n-1} \underset{\infty}{\sim} \left(\dfrac{4}{\pi^2}\right)^n(2n-1)!$.

**10.28** **a.** On sépare les involutions de $[\![1;n+2]\!]$ : celles qui fixent $n+2$ au nombre de $I_{n+1}$ (une involution de $[\![1;n+1]\!]$ induite) et celles qui ne fixent pas $n+2$ (qui l'échange avec $k$ ($n+1$ choix) ce qui induit une involution de $[\![1;n+1]\!] \setminus \{k\}$). Comme $I_n \leqslant n!$, on a $R \geqslant 1$.

**c.** $\forall x \in ]-1\,;1[$, $(1+x)S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{I_n}{n!}x^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{I_{n-1}}{(n-1)!}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{I_n + nI_{n-1}}{n!}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{I_{n+1}}{n!}x^n = S'(x)$.

On en déduit, puisque $S(0) = 1$ et en intégrant l'équation différentielle, que $\forall x \in ]-1\,;1[$, $S(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$.

**d.** Alors $S(x) = \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}x^k\right) \times \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{j!2^j}x^{2j}\right)$ et comme $R > 0$ : $I_n = \sum\limits_{i+2j=n}\dfrac{n!}{i!j!2^j}$, $I_{2n} = \sum\limits_{j=0}^{n}\dfrac{(2n)!}{(2n-2j)!j!2^j}$.

**10.29** Ces séries sont absolument convergentes : en effet, si $x \in ]-1;0[\cap]0;1[$, en notant $u_k = \binom{k}{m}x^{k-m}$, on a $\forall k \geqslant m$, $\left|\dfrac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \dfrac{k}{k-m+1}|x| \to |x| < 1$ et on utilise la règle de d'Alembert.

Pour $m = 0$ et $x \in ]-1;1[$, il s'agit d'une simple série géométrique absolument convergente de raison $x$ tel que $|x| < 1$ donc $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}x^k = \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{(1-x)^{0+1}}$ : c'est bon pour l'initialisation !

Soit $m \geqslant 0$, supposons que $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum\limits_{k=m}^{+\infty}\binom{k}{m}x^{k-m} = \dfrac{1}{(1-x)^{m+1}}$. Comme les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}\binom{n+m}{m}x^n$ et $\sum\limits_{k\geqslant 0}x^k$ convergent absolument, on peut utiliser le théorème sur le produit de Cauchy de telles séries.

On obtient la convergence absolue (mais on le savait déjà) de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\sum\limits_{j=0}^{n}\binom{j+m}{m}\right)x^n$ avec la formule :

$$\forall x \in ]-1;1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{j+m}{m}\right)x^n = \left(\sum_{n\geqslant 0}\binom{n+m}{m}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right).$$

Il suffit alors de se rappeler que, par récurrence, on montre $\sum\limits_{j=0}^{n}\binom{j+m}{m} = \binom{n+m+1}{m+1}$ pour obtenir $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{n+m+1}{m+1}x^n = \sum\limits_{k=m+1}^{+\infty}\binom{k}{m+1}x^{k-m-1} = \dfrac{1}{(1-x)^{m+2}}$ et avoir l'hérédité.

Par principe de récurrence, on a bien $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum\limits_{k=m}^{+\infty}\binom{k}{m}x^{k-m} = \dfrac{1}{(1-x)^{m+1}}$.

**10.30** **a.** On choisit les $p$ qui ne bougent pas et on dérange le reste : $N(n,p) = \binom{n}{p} D(n-p)$.

**b.** $D(n) \leqslant n!$ donc $R \geqslant 1$ car $\dfrac{D(n)}{n!} \leqslant 1$. Comme $\sum\limits_{p=0}^{n} N(n,p) = n!$, on a $\sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{D(n-p)}{(n-p)!} \times \dfrac{1}{p!} = 1$. Ainsi, par produit de CAUCHY car le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ est infini : $e^x f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ donc $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ et en développant le produit de CAUCHY : $\dfrac{D(n)}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} \sim \dfrac{1}{e}$.

**c.** Il vient simplement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!} N(n,p) = \dfrac{1}{e.p!}$

**10.31** **a.** Par construction, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leqslant 1$ donc le rayon $R'$ est supérieur à celui de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$, ce qui prouve que $R' \geqslant 1$. De plus, la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers $0$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ diverge donc $R' \leqslant 1$ car $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n x^n$ diverge pour $x = 1$. Par conséquent, $R' = 1$.
Comme il existe une infinité de termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont supérieurs ou égaux à $1$ (il y a une infinité de carrés parfaits), on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge, ce qui prouve que $R \leqslant 1$. Comme $a_n = \text{card}\,\{k \in [\![0; \lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!] \mid n - k^2 \text{ est un carré parfait}\}$, on a $a_n \leqslant \sqrt{n} + 1 \leqslant n + 1$ et comme la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} (n+1)x^n$ est de rayon $1$, on a $R \geqslant 1$. Par conséquent, $R = 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum\limits_{\substack{(u,v)\in[\![0;\lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!]^2 \\ u^2+v^2=n}} 1 = \sum\limits_{\substack{(i,j)\in[\![0;n]\!] \\ i+j=n}} b_i b_j$ (en posant $i = u^2$ et $j = v^2$) par définition des $b_n$. Par exemple, $a_5 = b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3 + b_3b_2 + b_4b_1 + b_5b_0 = 2$ car $b_2 = b_3 = b_5 = 0$ et $b_0 = b_1 = b_4 = 1$ ce qui correspond aux deux écritures $5 = 1 + 4 (= 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^1 =) 4 + 1$. Par produit de CAUCHY de deux séries entières, pour $x \in ]-R'; R'[ = ]-1; 1[$, on a $g(x)^2 = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k b_{n-k} = \sum\limits_{\substack{(i,j)\in[\![0;n]\!]^2 \\ i+j=n}} b_i b_j = a_n$. Ainsi, $g(x)^2 = f(x)$ ce qui prouve que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge pour $x \in ]-1; 1[$ (on déduit de ce calcul, indépendamment de ce qui précède, que $R \geqslant 1$).

**b.** Si $x \in ]0; 1[$, $h_x : t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a $h_x(t) = e^{t^2 \ln(x)} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car $\ln(x) < 0$ donc $h_x$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN.

**c.** En posant $t = \dfrac{u}{\sqrt{-\ln(x)}} = \varphi(u)$, $\varphi$ étant une bijection strictement croissante de classe $C^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, par changement de variable $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln(x)} dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}}$.
Comme la fonction $h_x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\forall k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_k^{k+1} h_x(t) dt \leqslant x^{k^2} = h_x(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} h_x(t) dt$.
On somme pour $k$ allant de $1$ à $+\infty$ (tout converge) donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \leqslant g(x) \leqslant \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt + h_x(0)$. Ainsi : $g(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-\pi}{\ln(x)}}$ d'où l'on déduit que $f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{-\pi}{4\ln(x)}$ car $f(x) = g(x)^2$.

**10.32** **a.** Il est clair que $C_2 = 1$ et on a déjà vu que dans l'énoncé que $C_3 = 2$, $C_4 = 5$. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, le nombre de parenthésages d'un mot à $n$ éléments qui scindent les $n$ éléments en $k$ à gauche et $n-k$ à droite (pour la dernière évaluation) vaut $C_k C_{n-k}$ en prenant $C_1 = 1$ (pas le choix pour “arranger” un terme). Comme un parenthésage correct doit couper les $n$ éléments en deux parties non vides, on obtient, en effectuant une partition, la relation de récurrence : $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$ avec $C_0 = 0$.

**b.** Pour $x \in ]-R;R[$, on $C(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right)x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} C_n x^n = C(x) - C_1 x - C_0 = C(x) - x$. Ainsi $C(x)$ est racine du polynôme $X^2 - X + x$ dont le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4x \geqslant 0$ puisque $C(x)$ est réel. En posant $R' = \mathrm{Min}\left(R, \frac{1}{4}\right) > 0$, on a donc $\forall x \in ]-R';R'[,\ C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$. En posant $f(x) = \frac{2C(x)-1}{\sqrt{1-4x}}$, la fonction $f$ est continue sur $]-R';R'[$ par opérations et on a $f(x)^2 = 1$ par calculs, ainsi $f$ est constante valant $1$ ou $-1$ sur cet intervalle. Comme $f(0) = -1$, on a $\forall x \in ]-R';R'[,\ f(x) = -1$ donc $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$.

**c.** Réciproquement, soit $D : \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[ \to \mathbb{R}$ définie par $D(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$. $D$ est développable en série entière sur $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$ et $D(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)}(-4)^n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2(n!)^2(2n-1)}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n x^n$ d'après le cours. Mais comme $D(x)^2 - D(x) + x = 0$, par produit de Cauchy, on a aussi (on en vient) $D_0 = 0$, $D_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ D_n = \sum_{k=0}^{n} D_k D_{n-k}$. Comme les suites $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les mêmes conditions initiales et la même relation de récurrence, elles sont égales : $\forall n \geqslant 1,\ C_n = D_n = \frac{(2n)!}{2(n!)^2(2n-1)} = \frac{\binom{2n}{n}}{2(2n-1)}$.

## 10.6 Développement en série entière

**10.33** **a.** On a $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ et $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

**b.** $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \int_0^x \frac{\left(1-\frac{t}{x}\right)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt < \int_0^y \frac{\left(1-\frac{t}{y}\right)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ car $1 - \frac{t}{x} \leqslant 1 - \frac{t}{y}$ pour $t \in [0;x]$ et que $f^{(n+1)}(t) \geqslant 0$. On a donc $R_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} R_n(y)$ et on conclut par encadrement ($x$ fixé).

**c.** Ce qui précède prouve que $f$ est développable en série entière sur $[0;\alpha[$ mais comme $f$ est paire ou impaire, elle l'est sur $]-\alpha;\alpha[$.

**10.34** Posons $f : x \mapsto \mathrm{sh}(\mathrm{Arcsin}\, x)$, en dérivant sur $]-1;1[$, on trouve que $f$ vérifie l'équation différentielle $(E)\ :\ (1-x^2)y'' - xy' - y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Si $f$ est DSE sur $]-R;R[$ avec $0 < R \leqslant 1$, alors on aurait $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in ]-R;R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. En remplaçant dans l'équation, on trouve que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{n^2+1}{(n+2)(n+1)}a_n$ d'où, par récurrence : $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)!}\prod_{k=1}^{p}((2p-1)^2+1)$.

Réciproquement, par d'Alembert, le rayon de cette série est bien $R = 1$ car si $u_p = a_{2p+1}x^{2p+1}$, on a $\lim_{p\to+\infty}\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right| = |x|^2$. En remontant les calculs précédents, la fonction : $g : x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}x^{2p+1}$ est solution de l'équation différentielle $(E)$ et elle vérifie bien $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$ donc $f = g$ par le théorème de Cauchy-Lipschitz et $f$ est bien DSE sur $]-1;1[$ avec le développement ci-dessus.

**10.35** **a.** Les fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sont DSE sur $]-1;1[$ avec $\forall x \in ]-1;1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ or ici $\alpha = -\frac{1}{2}$ donc $\binom{\alpha}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = a_n$.

**b.** Si $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{b_{n+1}x^{2n+2}}{b_n x^{2n}} = \dfrac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^2}x^2 = \dfrac{2(2n+3)}{(n+1)}x^2 \to (4x^2)^+$. D'après D'ALEMBERT, on a convergence si $|x| < \dfrac{1}{2}$ donc $R \geqslant \dfrac{1}{2}$ et divergence si $|x| > \dfrac{1}{2}$ donc $R \leqslant \dfrac{1}{2}$ : $R = \dfrac{1}{2}$.

De plus, pour $x \in \left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$, on a $x(1-4x^2)^{\frac{-1}{2}} = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n+1}$ qu'on peut dériver (on le peut à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence) pour avoir la relation $f(x) = \left(x(1-4x^2)^{\frac{-1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

• Il y a divergence quand $x = \pm R$ car $\left(|b_n R^{2n}|\right)_{n\geqslant 0}$ croît (au moins à partir d'un certain rang) d'après **b.**.

• Ou aussi par STIRLING : $\dfrac{b_n}{2^{2n}} = \dfrac{(2n+1)(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(2n)(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}e^{2n}}{e^{2n}2^{2n}n^{2n}(2\pi n)} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}$ qui ne tend même pas vers $0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n R^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n b_n R^{2n}$ divergent grossièrement.

**10.36** **a.** Le rayon vaut $R = 1$ par les méthodes habituelles. Par RIEMANN, la série converge quand $x = 1$ et quand $x = -1$ donc le domaine de définition $D$ de $\varphi$ est $[-1;1]$.

**b.** En posant $u_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n^2-1}$, on a $||u_n||_{\infty,[-1;1]} = \dfrac{1}{n^2-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^2-1}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ CVN sur $[-1]$ et comme toutes les $u_n$ sont continues, $\varphi$ est continue sur $[-1;1]$.

Si $x \in ]-1;1[$, comme $\dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{1}{2(n-1)} - \dfrac{1}{2(n+1)}$, on a $\varphi(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{2(n-1)} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{2(n+1)}$ donc

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{2}\left(-x - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = -\frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\ln(1-x).$$

On a donc $\forall x \in ]-1;1[,\ \varphi(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(1+x)(1-x)}{2}\ln(1-x)$ et par continuité de $\varphi$ sur $[-1;1]$, on obtient $\varphi(1) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \dfrac{3}{4}$ et $\varphi(-1) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \varphi(x) = \dfrac{1}{4}$.

**10.37** **a.** Il s'agit d'une récurrence simple car $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{3}{2}$ et si $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour un entier $n \geqslant 2$, alors on a simplement $1 \leqslant 1 + \dfrac{1}{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 + \dfrac{3}{n+1} \leqslant 2$. $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{3}{2}$ puis hérédité simple.

On en déduit successivement que :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ car $u_n = 1 + \dfrac{2u_{n-1}-1}{n}$ et $(2u_{n-1}-1)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
- $u_n - 1 \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ car $u_n - 1 = \dfrac{2u_{n-1}-1}{n}$ et $(2u_{n-1}-1)_{n\geqslant 1}$ tend vers 1.
- $u_n \underset{\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car $u_n - 1 - \dfrac{1}{n} = 2\dfrac{u_{n-1}-1}{n}$ et que $u_{n-1} - 1 \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

**b.** Le rayon $R$ de cette série est entre ceux des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2x^n$ donc $R = 1$. Ou alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} 1$ direct.

Pour $x \in ]-1;1[$, on a $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)u_{n+1}x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n + 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$. On reconnaît la série géométrique et sa dérivée donc $S'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} + 2S(x) - \dfrac{1}{1-x} = 2S(x) + \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Classiquement avec variation de la constante : $S(x) = \dfrac{1}{2} + e^{2x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{te^{-2t}}{(1-t)^2}dt$ et on peut aussi en déduire que $S$ est DSE sur $]-1;1[$ par produit de CAUCHY et intégration des fonctions DSE.

**c.** D'après **a.**, comme $u_n \underset{\infty}{=} a + \dfrac{b}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ : $\exists A > 0,\ \forall n \geqslant 1,\ \left|u_n - 1 - \dfrac{1}{n}\right| \leqslant \dfrac{A}{n^2}$. En sommant ces inégalités après les avoir multipliées par $x^n$, on obtient : $\forall x \in ]0;1[,\ \left|S(x) - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1-x} + 1 + \ln(1-x)\right| \leqslant A\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ or

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est bornée au voisinage de $1^-$ donc $S(x) - \frac{1}{1-x} + \ln(1-x) \underset{1^-}{=} O(1)$.

$\boxed{\textbf{10.38}}$ **a.** $f$ est clairement continue donc $f$ est de classe $C^1$, etc.. : récurrence sur la classe de $f$.

**b.** Si $f$ est DSE (avec rayon $R > 0$) et solution de l'équation différentielle, alors $\forall x \in ]-R;R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On remplace dans l'équation et on trouve : $\forall x \in ]-R;R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - \alpha a_n - \lambda^n a_n)x^n = 0$ donc par unicité des coefficients dans une série entière de rayon strictement positif : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{\alpha + \lambda^n}{n+1} a_n$. Réciproquement, si on définit $f$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant cette récurrence et par exemple $a_0 = 1$, on a bien $R = +\infty$ avec d'ALEMBERT et $f$ est solution de l'équation en remontant les calculs.
**c.** Soit $f \in E$ tel que $f(0) = 0$, alors $f'(0) = \alpha f(0) + f(0) = 0$ et, plus généralement, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n+1)}(0) = \alpha f^{(n)}(0) + \lambda^n f^{(n)}(0) = 0$. Soit $a > 0$, alors si on note $M_p = \underset{x\in[a-;a]}{\text{Sup}} |f^{(p)}(x)|$, on a avec l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-a;a]$, $\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \leqslant \frac{a^{n+1}M_{n+1}}{(n+1)!}$. Mais puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-a;a]$, $f^{(n+1)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \lambda^n f^{(n)}(\lambda x)$ donc $M_{n+1} \leqslant (\alpha+1)M_n$ et donc $M_n \leqslant (\alpha+1)^n M_0$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-a;a]$, $\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \leqslant \frac{a^{n+1}(\alpha+1)^{n+1}M_0}{(n+1)!}$ qui tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Ainsi, $f$ est DSE sur $[-a;a]$ et $f = 0$ sur $[-a;a]$ pour tout $a > 0$ : $f = 0$ sur $\mathbb{R}$.
**d.** Si $g$ est une solution quelconque de l'équation, alors posons $h = g - g(0)f$ où $f$ est la solution DSE de la question **b.** valant $1$ en $0$. Comme $h$ est de classe $C^\infty$ et vaut $0$ en $0$ par construction, on a $h = 0$ d'après la question **c.** car $h$ est solution de l'équation aussi. Ainsi $g = g(0)f$ : $E = \text{Vect}(f)$.

$\boxed{\textbf{10.39}}$ **a.** Le critère spécial des séries alternées prouve l'existence de $f(x)$ si $x \in ]-1;+\infty[$.

Pour $\beta > -1$ et $x \in ]\beta;+\infty[$, on a $\left|\frac{p!(-1)^{n+p-1}}{(x+n)^{p+1}}\right| \leqslant \frac{p!}{(n+\beta)^{p+1}}$ qui est le terme général d'une série convergente d'après RIEMANN ; d'après le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions et par récurrence (comme il y a convergence simple pour $f$) : $f$ est de classe $C^\infty$ et on a les dérivées successives sous forme de séries de fonctions : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in ]-1;+\infty[$, $f^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p!(-1)^{n+p-1}}{(x+n)^{p+1}}$.

**b.** Pour $x \in ]-1;1[$, comme $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+1}} = a_k = (-1)^k \frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}}\zeta(k+1)$ (classique), alors pour $p \in \mathbb{N}$ : $\left|f(x) - \sum_{k=0}^{p} a_k x^k\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{x+n} - \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k x^k}{n^k}\right)\right|$ ce qui amène la majoration $\left|f(x) - \sum_{k=0}^{p} a_k x^k\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{x+n} - (-1)^{n-1}\frac{1-(-x/n)^{p+1}}{x+n}\right)\right| = |x|^{p+1}\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(x+n)n^{p+1}}\right| \leqslant \frac{|x|^{p+1}}{x+1}$ d'où la convergence vers $f$ vers sa série de TAYLOR. On peut aussi utiliser TAYLOR reste intégral.
**c.** On a facilement : $\forall x > -1$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$ donc, comme $f$ continue en $0$ et $f(0) = \ln(2)$, on a $f(x) \underset{-1^+}{\sim} \frac{1}{x+1}$. De plus, $f$ est décroissante sur $]-1;+\infty[$ car $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} < 0$ ce qui justifie l'inégalité $\forall x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1} \leqslant 2f(x) \leqslant \frac{1}{x} = f(x) + f(x-1)$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

$\boxed{\textbf{10.40}}$ Le rayon vaut $R = 1$ par d'ALEMBERT car $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Il y a convergence en $-1$ par le CSSA et divergence en $1$ car alors le terme général de la série est équivalent à $\frac{1}{n}$. Donc convergence sur $[-1;1[$. Par le CSSA, si $x \in [-1;0]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|R_n(x)| = \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)x^p\right| \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ donc il y a convergence uniforme sur $[-1;0[$ et donc continuité de la somme sur $[-1;1[$.

En $1^-$, on encadre $\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big) = -\ln\Big(1-\dfrac{1}{n+1}\Big) > \dfrac{1}{n+1}$ et $\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big) \leqslant \dfrac{1}{n}$ ; ainsi, si $x \in [0;1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)x^n = f(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ donc $\dfrac{1}{x}\big(-\ln(1-x)-x\big) \leqslant f(x) \leqslant -\ln(1-x)$. En terme d'équivalent, cela donne : $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\ln(1-x)$. De plus, déjà vu cette année en TD : $f(-1) = \ln\Big(\dfrac{2}{\pi}\Big)$.

**10.41** D'abord la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge car $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ et on utilise Riemann $(2 > 1)$.

De plus, pour $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{(-1)^{2k-2}}{(2k-1)^2} + \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k)^2}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2}$ en séparant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair. En notant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ la somme partielle de la série de Riemann pour $\alpha = 2$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = S_{2n} - \frac{1}{2}S_n$ qui tend vers $\dfrac{\pi^2}{12}$ en $+\infty$. Ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Soit $f$ définie sur $[0;1]$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ si $x > 0$ ; $f$ est DSE donc continue sur $[0;1]$ car $\forall x \in ]0;1[,\ f(x) = \displaystyle\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1}$ (valable pour $x = 0$ (clair) et $x = 1$ (classique)).

Pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0;1]$, $|R_n(x)| = \Big|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{k-1}\Big| \leqslant \frac{x^n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$ donc $||R_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \to 0$ ce qui garantit la convergence uniforme de la série de fonctions sur $[0;1]$ donc la continuité de $f$ sur $[0;1]$ (et la formule pour $x = 1$ aussi d'ailleurs). Par convergence uniforme sur un segment, on peut intégrer terme à terme : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1}\Big)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1}dx\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

## 10.7 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

**10.42** **a.** Pour $\rho \geqslant 0$, si $P$ est de degré $d$, la suite $\Big(\dfrac{P(n)\rho^n}{n!}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $0$ par croissance comparée car $P(n) \underset{+\infty}{=} O(n^d)$ donc $P(n)\rho^n \underset{+\infty}{=} o(\rho+1)^n) \underset{+\infty}{=} o(n!)$. Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{P(n)}{n!}z^n$ est de rayon $R = +\infty$.

**b.** La famille $\big(1, X, X(X-1), \cdots, X(X-1)\cdots(X-d+1)\big)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_d[X]$ de degrés échelonnés, elle est donc une base de $R_d[X]$ grâce à la dimension.

Si $\deg(P) = 0$, alors $P = a_0 \in \mathbb{Z}$. Si $\deg(P) = 1$, alors $P = a_1X + a_0$ avec $a_0$ et $a_1$ entiers.

Si on suppose que pour un entier $d$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré inférieur ou égal à $d$, on a $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$ avec $a_0, \cdots, a_d$ entiers, alors soit $Q \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $d+1$. On écrit $Q = a_{d+1}X^{d+1} + \cdots$ avec $a_{d+1} \in \mathbb{Z}$, alors $Q - a_{d+1}\displaystyle\prod_{i=0}^{d}(X-i)$ est un polynôme à coefficients entiers de degré inférieur à $d$ qu'on peut écrire par hypothèse de récurrence $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$ avec des entiers $a_0 \ldots, a_d$. Ainsi $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d+1} a_k \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$ ce qui clôt la récurrence.

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{d} a_k \prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \sum_{k=0}^{d} a_k\Big(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)\Big) = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!}$ (somme d'un nombre fini de séries numériques convergentes) donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} = \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k\Big)e \in \mathbb{Z}e$.

**10.43** **a.** $f_n : x \to a_n x^n$ est continue sur $[0;R]$ et $||f_n||_{\infty,[0;R]} = |a_n|R^n$. Par hypothèse, la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n|R^n$ converge donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[0;R]$ et $f$ est donc continue sur $[0;R]$, donc en $R$.

**b.** $f$ est continue sur $]0;1[$. Si $x \in ]0;1[$, on a $f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{x}\big(\ln(1-x) - \ln(1+x)\big)$ donc $f(x) \underset{1^-}{\sim} \ln(1-x) \underset{1^-}{\sim} o\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\Big)$ et $f$ est intégrable sur $\Big[\frac{1}{2};1\Big[$. $f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x}\big(-x+o(x)-x+o(x)\big) \underset{0}{\sim} -2$ et $f$ continue sur $[0;1[$ en posant $f(0) = -2$ : $f$ est intégrable sur $\Big[0;\frac{1}{2}\Big]$. Par conséquent : $\int_0^1 f(t)dt$ converge.

Pour $x \in ]0;1[$, $f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{x}\big(\ln(1-x) - \ln(1+x)\big) = -\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$. On a donc : $\forall x \in [0;1[$, $f(x) = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$. Posons alors $g_n : x \mapsto -\frac{2x^{2n}}{2n+1}$.
Les fonctions $g_n$ sont continues sur $[0;1[$ et $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge simplement vers $f$ qui est continue sur $[0;1[$.
De plus, $\int_0^1 |g_n| = \frac{2}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)^2}$ converge. Par le théorème d'intégration terme à terme, on en déduit que $f$ est intégrable sur $[0;1[$ (ce qu'on savait déjà) et que $\int_0^1 f = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 g_n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2}$.

**c.** Comme $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, en séparant les termes pairs et impairs, on montre que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Pour $x > 1$, $f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{x-1}{1+x}\right) = \frac{1}{x}\big(\ln(x-1) - \ln(1+x)\big)$ donc $f(x) \underset{1^+}{\sim} \ln(x-1) \underset{1^+}{\sim} o\Big(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\Big)$ donc $f$ est intégrable sur $]1;2]$. $f(x) = \frac{1}{x}\left(\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big)-\frac{1}{x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x^2}$ donc $f$ est intégrable sur $[2;+\infty[$. $f$ est donc intégrable sur $]1;+\infty[$ d'où sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ ce qui permet d'écrire $\int_0^1 f(t)dt$.
Dans $\int_1^{+\infty} f(t)dt$, on effectue le changement de variable $t = \frac{1}{u} = \varphi(u)$ avec $\varphi$ qui est une bijection strictement décroissante de classe $C^1$ de $]0;1[$ dans $]1;+\infty[$ : $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \int_1^0 f\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big(-\frac{1}{u^2}\Big)du$.

Enfin : $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \int_1^0 u\ln\left(\frac{\frac{1}{u}-1}{1+\frac{1}{u}}\right)\Big(-\frac{1}{u^2}\Big)du = \int_0^1 f(u)du$. Ainsi : $\int_0^{+\infty} f(t)dt = 2\int_0^1 f(t)dt = -\frac{\pi^2}{2}$.

**10.44** **a.** Comme la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers $0$, par le critère spécial des séries alternées, la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge donc $a_n \underset{+\infty}{=} O(1)$. Ainsi, $\frac{a_n}{n!} \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n!}\Big)$ et comme le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ vaut $+\infty$, on en déduit que le rayon $R$ de la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}x^n$ vérifie $R \geqslant +\infty$ donc $R = +\infty$.

**b.** Avec l'énoncé, $a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^k dt = \int_0^1\Big(\sum_{k=0}^{n}(-t)^k\Big)dt = \int_0^1\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}dt$ par linéarité de l'intégrale. Comme $\int_0^1\frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$, par inégalité de la moyenne, on majore $|a_n - \ln(2)| = \left|\int_0^1\frac{(-t)^{n+1}}{1+t}dt\right| = \int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}dt \leqslant \int_0^1 t^{n+1}dt = \frac{1}{n+2}$. Par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ln(2)$.

**c.** Méthode 1 : pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|g(x) - \ln(2)| = \left|e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n - e^{-x}\ln(2)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right| = e^{-x}\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a_n-\ln(2))x^n}{n!}\right|$ donc, comme $|a_n - \ln(2)| \leqslant \frac{1}{n+1}$ d'après **b.**, $|g(x) - \ln(2)| \leqslant e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|a_n-\ln(2)|x^n}{n!}\Bigg| \leqslant e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$.

Ainsi, $|g(x)-\ln(2)| \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ln(2)$ puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{x} = 0$.

Méthode 2 : (méthode générale dès que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente) Écrivons $a_n = \ln(2)+r_n$ avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$. Comme $\dfrac{r_n}{n!} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n!}\Big)$, le rayon de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{r_n}{n!}x^n$ vaut aussi $+\infty$. Comme tout converge, en notant $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{r_n x^n}{n!}$, puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\ln(2)}{n!}x^n = \ln(2)e^x$, $g(x) = (\ln(2)e^x + h(x))e^{-x} = \ln(2) + e^{-x}h(x)$. Montrons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}h(x) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |r_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. De plus, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{n_0}\dfrac{r_n x^n}{n!} = 0$ par croissances comparées car $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{n_0}\dfrac{r_n x^n}{n!}$ est polynomiale, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geqslant x_0,\ \left|e^{-x}\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0}\dfrac{r_n x^n}{n!}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Si $x \geqslant x_0$, $|e^{-x}h(x)| \leqslant \left|e^{-x}\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0}\dfrac{r_n x^n}{n!}\right| + e^{-x}\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\dfrac{|r_n|x^n}{n!} \leqslant \varepsilon$ car $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\dfrac{|r_n|x^n}{n!} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{\varepsilon}{2}e^x$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}h(x) = 0$. Par somme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ln(2)$.

**10.45** Cette série converge par le CSSA. Il est clair que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}$ est égal à $R = 1$. On pose donc $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}$ pour $x \in [-1;1]$ (cil y a convergence aux bornes).

On sait que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-1;1[$. Pour $x \in ]-1;1[$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{4n} = \dfrac{1}{1+x^4}$.

Comme $1+x^4 = (1+2x^2+x^4)-2x^2 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$, on peut décomposer en éléments simples cette fraction rationnelle : $\dfrac{1}{1+x^4} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\Big(\dfrac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\Big)$.

Ainsi : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\Big(\dfrac{-2x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \dfrac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\Big) + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{(\sqrt{2}x-1)^2+1} + \dfrac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}\Big)$ et il vient alors $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\Big[-\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)+\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)\Big]' + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\text{Arctan}\,(\sqrt{2}x-1)+\text{Arctan}\,(\sqrt{2}x+1)\Big]'$. Comme $f(0) = 0$, on a donc en intégrant (sur un intervalle), pour un réel $x$ dans $]-1;1[$ :

$f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\Big[-\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)+\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)\Big] + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\text{Arctan}\,(\sqrt{2}x-1)+\text{Arctan}\,(\sqrt{2}x+1)\Big]$.

Comme $f$ est continue en 1 : $f(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1-} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\Big(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\Big) + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\text{Arctan}\,(\sqrt{2}-1)+\text{Arctan}\,(\sqrt{2}+1)\Big]$ ce qui donne $f(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\big(3+2\sqrt{2}\big) + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{3\pi}{8}\Big] = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\big(3+2\sqrt{2}\big) + \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

**10.46** **a.** L'équation homogène $(E_0)$ : $\ln(x)y' + \dfrac{y}{x} = 0$ a pour solutions les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \dfrac{\lambda}{\ln(x)}$ sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ car une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln|\ln(x)|$. Par variation de la constante, on a comme solutions de $(E)$ les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \dfrac{x+\lambda}{\ln(x)}$ sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

**b.** $g$ se prolonge par continuité en $0$ en posant $g(0) = 1$. De plus, $g$ est de classe $C^\infty$ sur $]-1;+\infty[$ car elle est développable en série entière sur $]-1;1[$ avec $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n+1}$ (vrai même pour $x = 0$) et qu'elle est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations. On constate aussi que la fonction $g$ ne s'annule pas sur $]-1;+\infty[$ car $\ln$ ne s'annule qu'en $1$ et que $g(0) = 1 \neq 0$.

**c.** Si $y$ est une solution de $(E)$ sur $]0;+\infty[$, d'après la question **a.**, il existe deux constantes réelles $\lambda_1$ et $\lambda_2$ telles que $\forall x \in ]0;1[,\ y(x) = \dfrac{x+\lambda_1}{\ln(x)}$ et $\forall x \in ]1;+\infty[,\ y(x) = \dfrac{x+\lambda_2}{\ln(x)}$. Or la continuité de $y$ en $1$ impose $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. On a alors $\forall x \in ]0;1[\cup]1;+\infty[,\ y(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)} = \dfrac{1}{g(x-1)}$. Mais comme $y(1) = 1$ et $g(0) = 1$, on a donc $\forall x > 0,\ y(x) = \dfrac{1}{g(x-1)}$. Réciproquement, cette fonction $y : x \mapsto \dfrac{1}{g(x-1)}$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question **b.** et solution de $(E)$ d'après la question **a.**.

**10.47** **a.** La suite $\left(\dfrac{n}{(2n+1)!}x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout réel $x$ par croissance comparée. Ou alors, si $x \neq 0$, $\left|\dfrac{n+1}{(2n+3)!}x^{n+1} \times \dfrac{(2n+1)!}{nx^n}\right| = \dfrac{(n+1)|x|}{n(2n+2)(2n+3)}$ tend vers $0$ : le rayon de convergence est $R = +\infty$.

**b.** On sait que : $\forall y \in \mathbb{R},\ \sin(y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\mathrm{sh}\,(y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

**c.** Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{(2n+1)!}$ est $+\infty$. Pour $x > 0$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \dfrac{\mathrm{sh}\,(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ d'après **b.**. Par contre, si $x < 0$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \dfrac{\sin(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$. Et $\Phi(0) = 1$.

**d.** Posons $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{(2n+1)!}x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$. Par dérivation d'une série entière sur le disque ouvert de convergence : $\forall x \in \mathbb{R},\ x\Phi'(x) = x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\dfrac{x^{n-1}}{(2n+1)!} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{nx^n}{(2n+1)!} = f(x)$.

Ainsi $f(0) = 0$ et $\forall x > 0,\ f(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{sh}\,(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{\sqrt{x}\mathrm{ch}\,(\sqrt{x}) - \mathrm{sh}\,(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

De même, $\forall x < 0,\ f(x) = x\left(\dfrac{\sin(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}\right)' = \dfrac{\sqrt{-x}\cos(\sqrt{-x}) - \sin(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}}$.

**10.48** **a.** Pour dénombrer les permutations qui ont $k$ points fixes exactement, on choisit ces point fixes ce qui fait $\dbinom{n}{k}$ choix et on doit ensuite choisir une permutation des $n-k$ éléments restants sans point fixe, au nombre de $A_{n-k,0}$. On obtient donc $A_{n,k} = \dbinom{n}{k}A_{n-k,0}$.

**b.** Comme on a $0 \leqslant A_{n,0} \leqslant n!$ donc $0 \leqslant \dfrac{A_{n,0}}{n!} \leqslant 1$. Ainsi le rayon $R$ de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{A_{n,0}}{n!}z^n$ est supérieur à celui de $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$. Par conséquent $R \geqslant 1$ donc $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A_{n,0}}{n!}z^n$ converge si $|z| < 1$.

**c.** On partitionne $\boldsymbol{\sigma}_n$ selon le nombre de points fixes de la permutation et on obtient $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} A_{n,k}$ sachant que $A_{n,1} = 0$ clairement. Comme le rayon de la série exponentielle est égal à $+\infty$, pour tout complexe $z$ tel que $|z| < 1$, par produit de CAUCHY de deux séries entières, on obtient la relation suivante : $e^z f(z) = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A_{n,0}}{n!}z^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{A_{n-k,0}}{k!(n-k)!}\right)z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$. Donc $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{1-z}$.

Si on avait $R > 1$, alors le rayon de convergence de la série produit de CAUCHY serait au moins égal à $R$ d'après le cours or il vaut $1$ (série géométrique). Par l'absurde, on a donc $R = 1$.

**d.** Encore un produit de CAUCHY et si $|z| < 1$ : $f(z) = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n z^n}{n!}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}\right)z^n$ donc, par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n,0} = n!\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

**10.49** **a.** Par inégalité de la moyenne $|a_n| = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 t\prod_{k=1}^{n-1}(k-t)dt \leqslant \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 \prod_{k=1}^{n-1} k dt \leqslant \dfrac{1}{n}$ dès que $n \geqslant 1$. Comme le rayon de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ est égal à $1$ (série logarithmique), alors $R \geqslant 1$.

**b.** Soit $x \in ]-1;1[$, si on pose $u_n(t) = \left(\prod\limits_{k=0}^{n-1}(t-k)\right)\dfrac{x^n}{n!}$, alors on a vu que si $n \geqslant 2$, on avait la majoration

$\forall t \in [0;1],\ |u_n(t)| \leqslant \dfrac{|x|^n}{n(n-1)}$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0}$ converge normalement sur $[0;1]$ et on peut intervertir terme à terme de sorte que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\dfrac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)x^n\Big)dt = \int_0^1 (1+x)^t dt$ (série entière à connaître par cœur). Ainsi, $S(x) = \Big[\dfrac{(1+x)^t}{\ln(1+x)}\Big]_0^1 = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$.

**c.** Comme à la question **a.**, on a $|a_n| = \dfrac{1}{n!}\int_0^1 t\prod_{k=1}^{n-1}(k-t)dt \geqslant \dfrac{1}{n!}\int_0^1 t(1-t)\prod_{k=2}^{n-1}(k-1)dt = \dfrac{1}{4n(n-1)}$.
Comme le rayon de la série $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{x^n}{4n(n-1)}$ vaut aussi 1, on a bien $R=1$.

**10.50** **a.** Soit $f : ]-1;1[\times[0;\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(\alpha,x) = \dfrac{\ln(1+\alpha\cos(x))}{\cos(x)}$ avec la valeur $f\Big(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\Big) = \alpha$ qui est un prolongement par continuité puisque $\lim_{x\to\pi/2}\cos(x) = 0$ donc, si $\alpha \neq 1$, $\ln(1+\alpha\cos(x)) \underset{\pi/2}{\sim} \alpha\cos(x)$.

- $\forall x \in [0;\pi]$, $\alpha \mapsto f(\alpha,x)$ est de classe $C^1$ sur $]-1;1[$ (même si $x = \dfrac{\pi}{2}$).
- $\forall \alpha \in ]-1;1[$, les fonctions $x \mapsto f(\alpha,x)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial\alpha}(\alpha,x) = \dfrac{1}{1+\alpha\cos(x)}$ sont continues donc intégrables sur $[0;\pi]$ car $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}(\alpha,\pi/2) = 1 = \dfrac{1}{1+\alpha.0}$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}(\alpha,x) = \dfrac{1}{1+\alpha\cos(x)}$ est valable pour tout $x \in [0;\pi]$.

On en déduit que I est de classe $C^1$ sur $]-1;1[$ et que $I'(\alpha) = \int_0^\pi \dfrac{dx}{1+\alpha\cos(x)}$.
On pose $x = 2\,\mathrm{Arctan}(t)$ dans cette intégrale et on obtient classiquement $I'(\alpha) = \int_0^{+\infty}\dfrac{2dt}{1+\alpha+(1-\alpha)t^2}$.
On calcule encore et on parvient à $I'(\alpha) = \dfrac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\Big[\mathrm{Arctan}\Big(t\sqrt{\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}}\Big)\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.
**b.** Comme $f(0)=0$ et que $]-1;1[$ est un intervalle : $\forall\alpha \in ]-1;1[,\ I(\alpha) = \pi\,\mathrm{Arcsin}(\alpha)$.
**c.** On connaît le DSE de $\alpha \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ qu'on intègre pour trouver celui de Arcsin et on a (c'est presque du cours) : $\forall\alpha\in]-1;1[,\ I(\alpha) = \pi\,\mathrm{Arcsin}(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}\alpha^{2n+1}$. Le rayon de convergence de cette série entière vaut 1 soit parce qu'on le sait, soit en utilisant comme dans le cours la règle de D'ALEMBERT.
On aurait aussi pu faire cette question indépendamment des résultats précédents en écrivant, puisque $\alpha\cos(x) \in ]-1;1[$ pour $\alpha\in]-1;1[$ et $x\in[0;\pi]$, la relation $\ln(1+\alpha\cos(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cos^n(x)\alpha^n}{n}$. On a donc $I(\alpha) = \int_0^\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cos^{n-1}(x)\alpha^n}{n}dx$. On pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}\cos^{n-1}(x)\alpha^n}{n}$ si $n\geqslant 1$. Comme il est clair que $||f_n||_{\infty,[0;\pi]} = \dfrac{|\alpha|^n}{n}$ : $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{|\alpha|^n}{n}$ converge. On a donc convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur le segment $[0;\pi]$ donc $\forall\alpha\in]-1;1[,\ I(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n\alpha^n$ en notant $I_n = \int_0^\pi\dfrac{(-1)^{n+1}\cos^{n-1}(x)}{n}dx$.
Ceci prouve que I est développable en série entière avec un rayon supérieur ou égal à 1.
Comme $\cos(\pi-x) = -\cos(x)$, par le changement de variable $x = \pi - t$ dans l'intégrale, on a $I_{2n} = 0$ et $I_{2n+1} = \dfrac{2W_{2n}}{2n+1}$ où $W_{2n} = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$ est la classique intégrale de WALLIS. Ainsi, par STIRLING ou directement WALLIS, $|I_{2n+1}| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}$ et le rayon de convergence vaut 1 par croissances comparées.

**10.51** **a.** $\forall x\in]-1;1[,\ f_1(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ et on dérive $p-1$ fois (on le peut terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence), sachant que $f_1^{(p-1)}(x) = \dfrac{(p-1)!}{(1-x)^p}$ par une récurrence très classique : $\forall x\in]-1;1[,\ \dfrac{(p-1)!}{(1-x)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(n+p-1)!}{n!}x^n$ et on divise par $(p-1)!$ pour avoir le développement attendu :

$\forall x \in ]-1;1[,\ f_p(x) = \dfrac{1}{(1-x)^p} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{n+p-1}{p-1} x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{n+p-1}{n} x^n = \sum\limits_{n=p-1}^{+\infty} \dbinom{n}{p-1} x^{n-p+1}$.

**b.** Pour $p \geqslant 0$, il suffit d'écrire que $\forall x \in ]-1;1[,\ f_{p+2}(x) = f_{p+1}(x) \times f_1(x)$ qui s'écrit aussi d'après la question précédente : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{n+p+1}{p+1} x^n = \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{n+p}{n} x^n\Big) \times \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n\Big)$. Comme les séries intervenant dans cette formule sont absolument convergentes, on sait que $\forall x \in ]-1;1[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{n+p+1}{n} x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{k+p}{k}\Big) x^n$ par produit de Cauchy. On peut identifier car le rayon commun de ces séries vaut $1 > 0$ et on obtient donc $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{k+p}{k} = \dbinom{n+p+1}{p+1}$ (déjà vu par ailleurs par récurrence).

**10.52** Pour $x \in \mathbb{R}$, par croissances comparées, on a $\Big(\dfrac{x^{4n}}{4n+1}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$. Ainsi, par définition du rayon de convergence $R$ de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{4n}}{4n+1}$, on a $R = 1$. Pour $x = \pm 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{4n}}{4n+1} = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{4n+1}$ diverge par comparaison à la série harmonique. Posons $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{4n}}{4n+1}$, le domaine de définition de $g$ est donc $D_g = ]-1;1[$. Pour $x \in ]-1;1[$, $f(x) = xg(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$ et on sait d'après le cours que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-1;1[$ avec $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \dfrac{1}{1-x^4}$. Comme $1 - x^4 = (1-x)(1+x)(1-x^2)$, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1-x^4}$ est $\dfrac{1}{1-x^4} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x} + \dfrac{cx+d}{1+x^2}$. En identifiant par exemple, on trouve $a = b = \dfrac{1}{4}$, $c = 0$ et $d = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\forall x \in ]-1;1[,\ \dfrac{1}{1-x^4} = \dfrac{1}{4(1-x)} + \dfrac{1}{4(1+x)} + \dfrac{1}{2(1+x^2)}$. Ainsi $f'(x) = \Big[\dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{4} + \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{2}\Big]'$, comme $f(0) = 0$, en intégrant, sur l'intervalle $]-1;1[$, on a $\forall x \in ]-1;1[,\ f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{4} + \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{2}$.

On en conclut que $g(0) = 1$ et que $\forall x \in ]-1;0[\cup]0;1[,\ g(x) = \dfrac{1}{4x} \ln\Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big) + \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{2x}$.

**10.53** **a.** Pour $n \geqslant 1$, on partitionne les involutions $\sigma$ de $[\![1;n+2]\!]$ en deux catégories :

- celles pour lesquelles $\sigma(n+2) = n+2$ sont au nombre de $I_{n+1}$ car il n'y a pas de choix à faire pour $\sigma(n+2)$ qu'on impose égal à $n+2$, ensuite $\sigma$ induit alors sur $[\![1;n+1]\!]$ une involution de $[\![1;n+1]\!]$.
- celles telles que $\sigma(n+2) = k \neq n+2$ sont au nombre de $(n+1)I_n$ car pour les choisir de manière bijective, il y a $n+1$ choix pour l'entier $k$ qui est l'image de $n+2$ par $\sigma$ et, une fois ce choix effectué, cela implique que $\sigma(k) = \sigma(\sigma(n+2)) = n+2$ car $\sigma$ doit être une involution, et on a alors $I_n$ choix pour finir de déterminer $\sigma$ qui doit induire sur $[\![1;n+1]\!] \setminus \{k\}$ une involution de cet ensemble à $n$ éléments.

Cette partition implique la relation $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$ pour $n \geqslant 1$ et, comme $I_2 = 2 = 1 + 1.1 = I_1 + 1.I_0$ avec la convention choisie pour $I_0$, on a bien : $\forall n \geqslant 0,\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

**b.** Comme les involutions sont des permutations et qu'il y a $n!$ permutations de $[\![1;n]\!]$, on en déduit que $I_n \leqslant n!$ d'où $0 \leqslant \dfrac{I_n}{n!} \leqslant 1$. Comme la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ a pour rayon 1, par comparaison, on a $R \geqslant 1$.

**c.** Les calculs qui suivent sont valides car le rayon de convergence $R$ est supérieur à $1$ : pour $x \in ]-1;1[$, on a $(1+x)\varphi(x) = \varphi(x) + x\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{I_n}{n!} x^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{I_n + nI_{n-1}}{n!} x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{n!} x^n = \varphi'(x)$.

**d.** On en déduit en intégrant l'équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme normalisée sans second membre, comme une primitive de $x \mapsto 1+x$ est $x \mapsto x+\dfrac{x^2}{2}$ sur l'intervalle $]-1;1[$, que l'on a $\forall x \in ]-1\,;1[,\ \varphi(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$ puisque $\varphi(0) = I_0 = 1$ par convention.

**e.** Alors $\forall x \in ]-1;1[,\ \varphi(x) = \left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{1}{i!}x^i\right) \times \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{1}{j!2^j}x^{2j}\right)$. Ces deux séries ont pour rayon $+\infty$ donc on peut effectuer le produit de Cauchy et obtenir $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{n!}{i!j!2^j}\Big)x^n$. En identifiant (par unicité) les coefficients entre les deux expressions de $S(x)$ sous forme de série entière, $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{I_n}{n!} = \sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{1}{i!j!2^j}$ donc $I_n = \sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{n!}{i!j!2^j}$. Puisque $2j \leqslant n$ et $i = n-2j$, on a la formule $I_n = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{n!}{(n-2j)!j!2^j}$.

Pour expliquer cette relation de manière combinatoire, on peut constater qu'une involution $\sigma$ de $[\![1;n]\!]$ est une application telle que pour tout entier $x$ entre $1$ et $n$, on a deux choix :

- soit $\sigma(x) = x$ et $x$ est appelé un point fixe de $\sigma$.
- soit $\sigma(x) = y \neq x$ et alors, comme $\sigma^2 = \mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$, on a forcément $\sigma(y) = x$.

Ainsi, si $\sigma \in A_n$, le nombre $f$ de points fixes de $\sigma$ a la même parité que $n$ de sorte qu'il existe $2j$ entiers de $[\![1;n]\!]$ qui ne sont pas fixes par $\sigma$ avec $f = n-2j$ avec $0 \leqslant j \leqslant \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$. On peut donc écrire $A_n = \bigcup\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,j}$ où $A_{n,j} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma \text{ admet } f = n-2j \text{ points fixes}\}$.

Pour construire une involution $\sigma$ de $A_{n,j}$ :

- on choisit les $n-2j$ éléments de $[\![1;n]\!]$ qui sont fixes par $\sigma$ : $\dbinom{n}{n-2j} = \dbinom{n}{2j}$ choix.
- on choisit l'image $y$ du plus petit élément $x$ qui reste : $(2j-1)$ choix (et alors $\sigma(x) = y$ et $\sigma(y) = x$).
- on choisit l'image $t$ du plus petit élément $z$ qui reste : $(2j-3)$ choix etc...

Ainsi $\mathrm{card}\,(A_{n,j}) = \dbinom{n}{2j} \times (2j-1) \times (2j-3) \times \cdots \times 3 \times 1 = \dfrac{n!}{(n-2j)!(2j)!} \times \dfrac{(2j)!}{2^j j!}$ en multipliant en haut et en bas par les termes pairs qui manquent. On retrouve bien $I_n = \mathrm{card}\,(A_n) = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathrm{card}\,(A_{n,j}) = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{n!}{(n-2j)!2^j j!}$.

**10.54** **a.** Comme $\tan$ est strictement positive sur $\left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[$, $\forall n \geqslant 0,\ u_n > 0$. De plus, $\forall x \in \left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[,\ 0 < \tan(x) < 1$ donc $\tan^{n+1}(x) < \tan^n(x)$ et $u_{n+1} < u_n$ en intégrant. La suite de fonctions $(\tan^n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[$ et on a la domination par la fonction constante égal à $1$ sur l'intervalle. Par théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Ainsi, par le CSSA, $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge.

**b.** Comme $\tan' = 1+\tan^2$, on a $u_{n+2}+u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\tan'(x)dx = \left[\dfrac{\tan^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \dfrac{1}{n+1}$. Comme $u_{n+2} \leqslant u_n$, on a $2u_n \geqslant u_n + u_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$. Comme la série harmonique diverge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge donc $R \leqslant 1$. Mais $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge donc $R \geqslant 1$. Enfin : $R = 1$.

**c.** À nouveau, $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^{n^2} u_n$ converge d'après **a.** car $n^2$ a la même parité que $n$ : $R' \geqslant 1$.

**d.** Si $x \in ]-1;1[$, posons $f_n : t \mapsto \tan^n(t)x^n$, alors $||f_n||_{\infty,[0;\pi/4]} = |x|^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}|x|^n$ converge (série géométrique). Ainsi, par convergence normale sur un segment, on peut intervertir série et intégrale et avoir : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/4} f_n = \int_0^{\pi/4} \Big( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \Big) dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 - x\tan(t)} dt$. On pose $u = \tan(t)$ et on a classiquement $f(x) = \int_0^1 \frac{du}{(1-xu)(1+u^2)} = \int_0^1 \Big( \frac{x^2}{1+x^2} \times \frac{1}{1-xu} + \frac{x}{1+x^2} \times \frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{1+x^2} \times \frac{1}{1+u^2} \Big) du$ en décomposant en éléments simples.

Ainsi $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Big[ \mathrm{Arctan}(u) + \frac{x}{2} \ln(1+u^2) - x\ln(1-xu) \Big]_0^1 = \frac{\pi + 2x\ln(2) - 4x\ln(1-x)}{4(1+x^2)}$.

**e.** En posant $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \tan^k(t)$, on a $\forall t \in \Big[0; \frac{\pi}{4}\Big[$, $0 \leqslant \tan(t) < 1$ donc $|R_n(t)| \leqslant \tan^{n+1}(t)$ par le CSSA. En intégrant cette inégalité : $\Big| \int_0^{\pi/4} R_n(t)dt \Big| = \Big| \int_0^{\pi/4} \Big( \frac{1}{1+\tan(t)} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tan^k(t) \Big) dt \Big| \leqslant u_{n+1}$.

Ainsi : $\Big| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k - \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1+\tan(t)} \Big| \leqslant u_{n+1}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$, on en déduit, en posant à nouveau le changement de variable $u = \tan(t)$, que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1+\tan(t)} = \frac{\pi + 2\ln(2)}{8} \sim 0,57$.

**10.55** **a.** Il est clair que $0 \leqslant W_n \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc le rayon $R$ est supérieur à celui de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\pi x^n}{2}$ qui vaut clairement $1$ donc $R \geqslant 1$. Par le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - \theta$, on trouve $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta) d\theta$ et on sait, par concavité de la fonction $\sin$ sur $\Big[0; \frac{\pi}{2}\Big]$, que $\forall \theta \in \Big[0; \frac{\pi}{2}\Big]$, $\sin(\theta) \geqslant \frac{2\theta}{\pi}$. En élevant à la puissance $n$ et en intégrant, on trouve $W_n \geqslant \frac{\pi}{2(n+1)}$ donc $R$ est inférieur au rayon de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\pi x^n}{2(n+1)}$ qui vaut aussi classiquement $1$. On a au final $R = 1$.

**b.** Par le TCD (avec domination par $1$), comme $\lim_{n\to+\infty} \cos^n(t) = 0$ si $t \in \Big]0; \frac{\pi}{2}\Big]$, on a $\lim_{n\to+i} W_n = 0$. Comme la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est aussi décroissante par croissance de l'intégrale, $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n W_n$ converge par le CSSA.

Comme $W_n \geqslant \frac{\pi}{2(n+1)}$ et que la série harmonique diverge, $\sum_{n\geqslant 0} W_n$ diverge.

**c.** Soit $x \in ]-1;1[$, posons $f_n : t \to \cos^n(t) x^n$, alors $||f_n||_{\infty,[0;\pi/2]} = |x|^n$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur le segment $\Big[0; \frac{\pi}{2}\Big]$ vers la fonction $S : t \mapsto \frac{1}{1 - x\cos(t)}$. De plus, toutes les fonctions $f_n$ et même $S$ sont continues sur le segment $\Big[0; \frac{\pi}{2}\Big]$, on sait que ceci implique l'intégration terme à terme (la convergence uniforme suffirait) : $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)dt = \int_0^{\pi/2} S(t)dt$.

On calcule cette intégrale par le changement de variable habituel issu des règles de BIOCHE (hors programme néanmoins) $u = \tan\Big(\frac{t}{2}\Big)$ et on trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = \int_0^1 \frac{2du}{1 - x + (1+x)u^2}$ qui s'intègre avec les techniques usuelles en $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = \Big[ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{Arctan}\Big( \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} u \Big) \Big]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{Arctan}\Big( \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Big)$.

**10.56** **a.** Si on avait $\lim_{n\to+\infty} \sin(n\theta) = 0$, on aurait alors $\lim_{n\to+\infty} \sin((n+1)\theta) = 0$. Mais comme on sait que $\sin((n+1)\theta) = \sin(\theta)\cos(n\theta) + \cos(\theta)\sin(n\theta)$, on a $\sin(\theta)\cos(n\theta) = \sin((n+1)\theta) - \cos(\theta)\sin(n\theta)$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sin(\theta)\cos(n\theta) = 0$. Mais comme $\sin(\theta) \neq 0$ puisque $\theta \in ]0;\pi[$ par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} \cos(n\theta) = 0$. On aurait alors $\lim_{n\to+\infty} (\sin^2(n\theta) + \cos^2(n\theta)) = 0^2 + 0^2 = 0$ ce qui est impossible puisque $\sin^2(n\theta) + \cos^2(n\theta) = 1$.

On conclut ce raisonnement par l'absurde : la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $0$.

**b.** D'après la question **a.**, $\sum_{n\geqslant 0} \sin(n\theta) 1^n$ diverge grossièrement, comme $\sum_{n\geqslant 0} \sin(n\theta) z^n$ diverge pour $z = 1$, on a donc $R \leqslant 1$. De plus, comme $|\sin(n\theta)| \leqslant 1$ et que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ vaut 1, on déduit du cours que $R \geqslant 1$. Au final, $R = 1$.

**c.** Si $|z| = 1$, on a $|\sin(n\theta)z^n| = |\sin(n\theta)|$ d'où $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(n\theta)z^n$ diverge grossièrement avec **a.**.

**d.** Si $|z| < 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(n\theta)z^n$ converge absolument car $R = 1$ et $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}z^n$ par la formule d'EULER classique puis $S(z) = \dfrac{1}{2i}\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(ze^{i\theta})^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(ze^{-i\theta})^n\Big)$ avec DE MOIVRE donc on obtient $S(z) = \dfrac{1}{2i}\Big(\dfrac{1}{1-ze^{i\theta}} - \dfrac{1}{1-ze^{-i\theta}}\Big) = \dfrac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})z}{2i(1-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})z+z^2)} = \dfrac{z\sin(\theta)}{1-2z\cos(\theta)+z^2}$.

**10.57** **a.** On calcule $a_0 = 1$, $a_1 = -\dfrac{1}{2}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \dfrac{1}{24}$, $a_4 = 0$, $a_5 = -\dfrac{1}{240}$. On constate que $\forall n \in [\![0;5]\!]$, $|a_n| \leqslant 1$. Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $|a_k| \leqslant 1$, alors par inégalité triangulaire, on obtient la majoration $|a_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{|a_{n-k}|}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{e-1}{2} \leqslant 1$. Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 1$.

Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(a_nx^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour $|x| \leqslant 1$ donc $R \geqslant 1$.

**b.** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n!}$ convergent absolument (car le rayon de la série exponentielle vaut $+\infty$) et on a par produit de CAUCHY : $\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nz^n\Big) \times \Big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}\Big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_{n-k}}{k!}\Big)z^n$ ce qui revient à $S(z)(e^z-1) = -2(S(z)-1)$ qui s'écrit aussi $S(z)(e^z+1) = 2$. Ceci prouve que $e^z \neq -1$ et qu'on a la relation attendue $S(z) = \dfrac{2}{e^z+1}$. Si on avait $R > \pi$, on aurait pu prendre $z = i\pi$ dans le calcul précédent et ceci contredirait la condition $e^z + 1 \neq 0$. Ainsi, $R \leqslant \pi$.

**c.** Si $x \in \Big]-\dfrac{R}{2};\dfrac{R}{2}\Big[$, $|2ix| < R \leqslant \pi$ donc, d'après la question **b.**, $S(2ix) = \dfrac{2}{e^{2ix}+1}$ d'où, par les formules d'EULER, $1 - S(2ix) = \dfrac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1} = i\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})} = i\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = i\tan(x)$.

**d.** On sait déjà que $R \leqslant \pi$. Pour $x \in \Big]-\dfrac{R}{2};\dfrac{R}{2}\Big[$, $i\tan(x) = 1 - S(2ix) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^ni^na_nx^n$ car $a_0 = 1$ et $|2ix| < R$ donc $\tan(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^ni^{n-1}a_nx^n$. Ainsi, $\tan$ est développable en série entière sur $\Big]-\dfrac{R}{2};\dfrac{R}{2}\Big[$ et, par imparité de $\tan$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} = 0$.

Par conséquent, $\tan(x) = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^{2n+1}i^{2n}a_{2n+1}x^{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^{2n+1}(-1)^{n+1}a_{2n+1}x^{2n+1}$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{2n+1}(-1)^{n+1}a_{2n+1} = \dfrac{\tan^{2n+1}(0)}{(2n+1)!}$. Par exemple, si $n = 0$, $-2a_1 = \tan'(0) = 1$.

Soit $x \in \Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\tan(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{\tan^{2k+1}(0)x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^{2n+1}\tan^{2n+2}(t)}{(2n+1)!}dt$ par la formule de TAYLOR reste intégral. Or, pour $x \in \Big]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\Big[$, $\tan(x) = P_0(\tan(x))$ et $\tan'(x) = 1+\tan^2(x) = P_1(\tan(x))$ avec $P_0 = X$ et $P_1 = X^2+1$. Si on suppose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, que $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$ avec $P_n$ un polynôme de degré $n+1$ et de coefficients entiers naturels, alors $\tan^{(n+1)}(x) = \tan'(x)P_n'(\tan(x)) = P_{n+1}(\tan(x))$ avec $P_{n+1} = (1+X^2)P_n'(X)$ qui est bien de degré $n+2$ et de coefficients entiers naturels. On conclut que principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \Big]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\Big[$, $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$ avec $P_n \in \mathbb{N}[X]$ et $\deg(P_n) = n+1$.

Ainsi, $\forall x \in [0;\pi/2[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^{2n+1}\tan^{2n+2}(t)}{(2n+1)!} \geqslant 0$ donc $0 \leqslant \sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{\tan^{2k+1}(0)x^{2k+1}}{(2k+1)!} \leqslant \tan(x)$. Les sommes partielles de cette série numérique à termes positifs étant majorées, $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{\tan^{2n+1}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ converge. Or $\forall n\in\mathbb{N},\ 2^{2n+1}(-1)^{n+1}a_{2n+1}=\dfrac{\tan^{2n+1}(0)}{(2n+1)!}$ d'où la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} ia_{2n+1}(2ix)^{2n+1}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} a_nz^n$ converge donc en $2ix$ pour $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ ce qui assure que $R\geqslant\pi$. Au final, $R=\pi$. La fonction $\tan$ est développable en série entière sur $\left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x\in\left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}2^{2n+1}(-1)^{n+1}a_{2n+1}x^{2n+1}$.

**10.58** $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{(3n)!}$ converge car, par croissances comparées, $\dfrac{1}{(3n)!}\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{n!}\right)$ et que la série exponentielle converge. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n)!}=\text{ch}(1)=\dfrac{e^1+e^{-1}}{2}$ et qu'on utilise $\mathbb{U}_2=\{1,-1\}$ pour le calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n)!}$, on peut penser à utiliser les racines troisièmes de l'unité pour le calcul de $S_0=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(3n)!}$. Comme on sait que $\forall z\in\mathbb{C},\ e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$, on a déjà $e^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(3n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(3n+1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(3n+2)!}$ donc $e^1=S_0+S_1+S_2$ en posant $S_1=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(3n+1)!}$ et $S_2=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(3n+2)!}$.

Mais on a aussi $e^j=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{j^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{j^{3n}}{(3n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{j^{3n+1}}{(3n+1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{j^{3n+2}}{(3n+2)!}=S_0+jS_1+j^2S_2$ car $j^3=1$. De plus, $e^{j^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{j^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{j^{6n}}{(3n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{j^{6n+2}}{(3n+1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{j^{6n+4}}{(3n+2)!}=S_0+j^2S_1+jS_2$ car $j^4=j$.

Cela donne un système trois équations/trois inconnues mais, comme on sait que $1+j+j^2=0$, il suffit de sommer ces trois relations pour avoir $3S_0=e+e^j+e^{j^2}$ donc $S_0=\dfrac{e+e^j+e^{j^2}}{3}=\dfrac{e+e^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}}+e^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-i\sqrt{3}}{2}}}{3}$ car $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\overline{j^2}$. Ainsi, $S_0=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(3n)!}=\dfrac{1}{3}\left(e+\dfrac{2}{\sqrt{e}}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\sim 1,168$.

De même, on aurait $3S_1=e+j^2e^j+je^{j^2}$ et $3S_2=e+je^j+j^2e^{j^2}$.

**10.59** **a.** Notons $R$ le rayon de convergence $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ où $a_n=\ln\left(\dfrac{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right)=\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Or $a_n\underset{+\infty}{=}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n}+O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. Comme $|a_n|\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, pour $z\neq 0$, on a $\lim_{n\to+\infty}|a_{n+1}z^{n+1}|a_nz^n|=|z|$. Si $|z|<1$, la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ converge d'après D'ALEMBERT donc $R\geqslant 1$.

Mais, toujours avec D'ALEMBERT, si $|z|>1$, la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ diverge donc $R\leqslant 1$. Ainsi, $R=1$.

**b.** $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le CSSA, si $u_n\underset{+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$, alors $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge par RIEMANN et enfin $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge toujours d'près RIEMANN. Par somme $\sum_{n\geqslant 0}a_n$ diverge.

De plus $(-1)^na_n\underset{+\infty}{=}\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{(-1)^n}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. À nouveau, $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge et si $u_n\underset{+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$, alors $\sum_{n\geqslant 0}u_n$. Par somme $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^na_n$ diverge. L'intervalle de convergence de $S$ est $]-1;1[$.

**10.60** Soit $a_n=\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$ et $x\neq 0$, alors $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{2n+2}}{a_nx^{2n}}\right|=\dfrac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^2}|x|^2$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{2n+2}}{a_nx^{2n}}\right|=4x^2$. Si $|x|>\dfrac{1}{2}$, alors $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^{2n}$ diverge grossièrement par la règle de D'ALEMBERT donc $R\leqslant\dfrac{1}{2}$.

Si $|x| < \dfrac{1}{2}$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^{2n}$ converge absolument par la règle de D'ALEMBERT donc $R \geqslant \dfrac{1}{2}$. Ainsi $R = \dfrac{1}{2}$.

Méthode 1 : pour $n \geqslant 0$, on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2(2n+3)}{n+1}$ donc $(n+1)a_{n+1} = 2(2n+3)a_n$. On essaie de faire intervenir des termes du type $a_n x^{2n}$ (qui vont donner $S(x)$) ou des termes du type $2(n+1)a_{n+1}x^{2n+1}$ ou $2na_n x^{2n-1}$ (qui vont donner $S'(x)$). On écrit donc $2(n+1)a_{n+1} = 8na_n + 12a_n$.

Pour $x \in \left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$, comme tout converge : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^{2n+1} = 8\sum\limits_{n=0}^{+\infty} na_n x^{2n+1} + 12\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ qui s'écrit encore $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^{2n+1} = 4x^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n)a_n x^{2(n-1)} + 12x\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$. On reconnaît enfin $S'(x) = 4x^2S'(x) + 12xS(x)$. $S$ est donc solution de l'équation $(E)$ : $(1-4x^2)y' = 12xy$ sur $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ avec la condition $S(0) = 1$. Comme une primitive de $x \mapsto \dfrac{12x}{1-4x^2}$ est la fonction $x \mapsto -\dfrac{3}{2}\ln(1-4x^2)$, on en déduit avec la condition initiale $S(0) = 1$ que $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$, $S(x) = (1-4x^2)^{-3/2}$.

Méthode 2 : en notant $T$ la primitive de $S$ sur $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ qui s'annule en $0$, par intégration terme à terme, on a $T(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n+1} = x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ et on reconnaît presque un développement classique en série entière : $\forall t \in ]-1;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+t}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}t^n$. Pour $x \in \left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$, en posant $t = -4x^2 \in ]-1;0] \subset ]-1;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}(-4)^n x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^{2n}$, ce qui montre que $T(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}} = x(1-4x^2)^{-1/2}$. Il suffit de dériver pour avoir, comme par la méthode précédente, $S(x) = T'(x) = (1-4x^2)^{-1/2} + 4x^2x(1-4x^2)^{-3/2} = (1-4x^2+4x^2)(1-4x^2)^{-3/2} = (1-4x^2)^{-3/2}$.

**10.61** Comme $\dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{2n^3}$ si $x \neq 0$, par croissances comparées, la suite $\left(\dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée si et seulement si $x \in [-1;1]$ donc le rayon de convergence de cette série entière vaut $R = 1$. Si $x = \pm 1$, $\dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$ converge absolument par RIEMANN. Ainsi, l'ensemble de définition de $f$ est $I = [-1;1]$.

La fraction $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ se décompose en éléments simples $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$. En réduisant au même dénominateur, $a(n+1)(2n+1) + bn(2n+1) + cn(n+1) = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ ce qui donne, par identification, $2a + 2b + c = 3a + b + c = a - 1 = 0$ donc $a = 1$, $b = 1$ et $c = -4$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{4}{2n+1}$. Pour tout $x \in ]-1;1[$, comme $|x| < R$ et que les trois séries convergent, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n+1} - 4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{2n+1}$.

On reconnaît des développements en série entière classiques du cours : $\forall x \in ]-1;1[$, $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$ et $\forall x \in ]0;1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{2n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Big(\ln(1+\sqrt{x}) - \ln(1-\sqrt{x}) - 2\sqrt{x}\Big) = \dfrac{\mathrm{Argth}(\sqrt{x}) - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et $\forall x \in ]-1;0[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{2n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{-x}}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{\mathrm{Arctan}(\sqrt{-x}) - \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$. Ainsi, $f(0) = 0$ et :

- Si $x \in ]0;1[$, $f(x) = -\ln(1-x) + \dfrac{1}{x}\Big(-\ln(1-x) - x\Big) - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) - 2\sqrt{x}\right)$.

• Si $x \in ]-1;0[$, $f(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}\Big(-\ln(1-x) - x\Big) - \frac{4}{\sqrt{-x}}\Big(\text{Arctan}(\sqrt{-x}) - \sqrt{-x}\Big)$.

De plus, en notant $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$, $||u_n||_{\infty,[-1;1]} = \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^3}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^3}$ converge par RIEMANN donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[-1;1]$ d'où la continuité de $f$ sur le segment $[-1;1]$.

Pour $x \in ]0;1[$, en écrivant $1-x = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$ et avec les propriétés de $\ln$, on trouve la nouvelle expression $f(x) = 3 - \dfrac{(1+\sqrt{x})^2}{x}\ln(1+\sqrt{x}) - \dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{x}\ln(1-\sqrt{x})$. Puisque $\lim\limits_{y\to 0^+} y^2\ln(y) = 0$, et comme on sait que $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, on trouve $f(1) = 3 - 4\ln(2) \sim 0,23$. Pour obtenir cette valeur, en notant $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, on aurait pu transformer $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(2k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} - 4\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k+1}$ ce qui donne en rajoutant et en enlevant les termes pairs, $S_n = H_n + H_{n+1} - 1 - 4\Big(\sum\limits_{k=1}^{2n+1} \dfrac{1}{k} - 1\Big) + 4\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$ et $S_n = 3 + 4H_n - 4H_{2n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{4}{2n+1}$ et on termine en sachant que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

De même, $f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -1 - \pi + 4 = 3 - \pi \sim -0,14$ avec la relation ci-dessus.

$\boxed{\textbf{10.62}}$ **a.** Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(n)$ diverge donc $R \leqslant 1$ car $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$ diverge pour $x = 1$. Si $|x| < a < 1$, par croissances comparées, on a $\ln(n)x^n \underset{+\infty}{=} o(a^n)$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} a^n$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$ converge par comparaison et $R \geqslant 1$. Ainsi $R = 1$.

**b.** Comme $\forall n \geqslant 2,\ \ln(n) \geqslant \ln(2)$, pour $x \in [0;1[$, $\ln(n)x^n \geqslant \ln(2)x^n$ donc $S(x) \geqslant \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln(2)x^n = \dfrac{\ln(2)x^2}{1-x}$ en sommant. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(2)x^2}{1-x} = +\infty$, on a par minoration la limite $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$.

Une preuve plus générale en se servant seulement du fait que $\forall n \geqslant 1,\ \ln(n) \geqslant 0$ et que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(n)$ diverge : toutes les $x \mapsto \ln(n)x^n$ sont croissantes sur $[0;1[$ donc $S$ est aussi croissante sur $[0;1[$. Par le théorème de la limite monotone, la fonction $S$ admet donc une limite $\ell$ en $1^-$ qui est finie ou qui vaut $+\infty$.

Posons $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)x^k$ les sommes partielles qui sont polynomiales donc continues. Comme $S_n \leqslant S$ sur $[0;1[$, $\lim\limits_{x\to 1} S_n(x) = S_n(1) \leqslant \ell$ (même si cette limite est infinie). Or $S_n(1) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(1) = +\infty$. Ainsi l'inégalité $S_n(1) \leqslant \ell$ montre que $\ell$ ne peut pas être finie. Au final : $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$.

**c.** Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a les inégalités $\forall k \geqslant 1,\ \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ (1) et $\forall k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$ (2). En sommant (1) pour $k \in [\![1;n]\!]$ et (2) pour $k \in [\![2;n]\!]$, on obtient l'encadrement $\ln(n+1) \leqslant H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1$ par CHASLES. En multipliant par $x^n$ pour $x \in [0;1[$ et en sommant ces inégalités, on trouve $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1)x^n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n x^n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n$. Or, par produit de CAUCHY, $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \Big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}x^n\Big) \times \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n\Big) = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$. Ce qui donne, puisque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1)x^n = \dfrac{S(x)}{x}$, l'encadrement $\dfrac{\ln(1-x)}{x-1} - \dfrac{1}{1-x} \leqslant S(x) \leqslant \dfrac{x\ln(1-x)}{x-1}$. Par théorème d'encadrement, puisque $\dfrac{\ln(1-x)}{x-1} - \dfrac{1}{1-x} \underset{1^-}{\sim} \dfrac{x\ln(1-x)}{x-1} \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$, nous avons établi que $S(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$.

**10.63** **a.** On note $S_n$ l'ensemble de toutes les permutations de $[\![1;n]\!]$. On sait que $\text{card}(S_n) = n!$. On partitionne (ou plutôt on partage) $S_n$ selon le nombre de points fixes des permutations. Notons donc $S_{n,k}$ l'ensemble des permutations de $S_n$ qui ont exactement $k$ points fixes. Alors $S_n = \bigcup_{k=0}^{n} S_{n,k}$ (réunion disjointe) avec $S_{n,n-1} = \emptyset$ car si une permutation a au moins $n-1$ points fixes, c'est forcément l'identité donc elle a en fait $n$ points fixes. On a donc $\forall n \geqslant 1,\ \text{card}(S_n) = n! = \sum_{k=0}^{n} A_n(k) = \sum_{k=0}^{n} \text{card}(S_{n,k})$.

Pour dénombrer $S_{n,k}$, on choisit les $k$ points fixes parmi les éléments de $[\![1;n]\!]$ ce qui fait $\binom{n}{k}$ choix ; ensuite on choisit une permutation des $n-k$ éléments restants sans point fixe, elles sont au nombre de $A_{n-k}(0)$ par définition (le nombre de dérangements, c'est le nom des permutations de $S_{n,0}$, ne dépend que du nombre d'éléments de l'ensemble qu'on "dérange"). On obtient donc $\text{card}(S_{n,k}) = A_n(k) = \binom{n}{k} A_{n-k}(0)$.

Pour $n = 0$, on a $0! = A_0(0) = \sum_{k=0}^{0} A_0(k) = 1$ par convention et $A_0(0) = \binom{0}{0} A_{0-0}(0) = 1$ donc les formules sont valables aussi pour $n = 0$.

**b.** Comme $S_{n,0} \subset S_n$, on a $0 \leqslant A_n(0) \leqslant n!$ donc $0 \leqslant \dfrac{A_n(0)}{n!} \leqslant 1$. On sait d'après le cours que le rayon $R$ de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{A_n(0)}{n!} z^n$ est alors supérieur à celui de $\sum_{n\geqslant 0} z^n$. Comme $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ est de rayon de convergence 1, on a $R \geqslant 1$ donc $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A_n(0)}{n!} z^n$ converge si $|z| < 1$.

**c.** Comme le rayon de convergence de la série exponentielle est égal à $+\infty$, si $|z| < 1$, par produit de CAUCHY de deux séries absolument convergentes, $e^z f(z) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A_n(0)}{n!} z^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{A_{n-k}(0)}{k!(n-k)!}\Big) z^n$. Or $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{A_{n-k}(0)}{k!(n-k)!} = \dfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{n-k}(0) = 1$ d'après **a.**. Ainsi, $e^z f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$. À nouveau, le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ vaut 1 et d'après le cours sur le rayon de convergence d'un produit de CAUCHY de deux séries entières, $1 \geqslant \text{Min}(R, +\infty)$ ce qui donne $R \leqslant 1$ et, au final, $R = 1$.
De plus, si $|z| < 1$, on a $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{1-z}$. On effectue encore un produit de CAUCHY et si $|z| < 1$, il vient à nouveau par produit de CAUCHY, $f(z) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}\Big) z^n$ donc, par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n(0) = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

**d.** Avec ces notations de l'énoncé, $p_n = \dfrac{A_n(0)}{n!}$ donc $p_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$ qui est la somme partielle de la série exponentielle associée à $e^{-1}$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{e} \sim 0,36$.

**10.64** **a.** Soit $x \in ]-1;1[$, alors $g_x : t \mapsto \dfrac{\ln(1+xt)}{t}$ est continue sur $]0;1]$ car $\forall t \in [0;1],\ 0 < 1-|x| \leqslant 1+xt \leqslant 1+|x|$. Si $x = 0$, $g_x$ est nulle sur $]0;1]$ et si $x \neq 0$, comme $\ln(1+xt) \underset{0}{\sim} xt$, $g_x$ se prolonge par continuité en 0 en posant $g_x(0) = x$. Ainsi $g_x$ est intégrable sur $]0;1]$ donc $g(x)$ est bien défini. Ainsi $]-1;1[ \subset \mathcal{D}_g$.

**b.** Si $|x| < 1$, on a $|xt| < 1$ pour $t \in [0;1]$ donc $\ln(1+xt) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n t^n}{n}$. Ainsi $g(x) = \int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)\Big) dt$ avec $g_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = (-1)^{n-1} \dfrac{x^n t^{n-1}}{n}$ car $\forall t \in [0;1],\ g_x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$. Comme

$||g_n||_{\infty,[0;1]} = \dfrac{|x|^n}{n}$ et que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{|x|^n}{n}$ converge car $|x| < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement vers $g_x$ sur le segment $[0;1]$ donc on peut intervertir et avoir $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 g_n(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

**c.** En tant que somme d'une série entière de rayon $R = 1$ (car $\left(\dfrac{x^n}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$ par croissances comparées), la fonction $g$ est $C^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1;1[$ et $g'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^{n-1}}{n}$. On reconnaît, pour $x \in ]-1;0[\cup]0;1[$, $g'(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

**d.** Posons $f : ]0;1[\times]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{\ln(1+xt)}{t}$ de sorte que $g(x) = \int_0^1 f(x,t)dt$.

- Pour $x \in ]0;1[$, $t \mapsto f(x,t)$ est de classe $C^1$ sur $]0;1]$.
- Pour $t \in ]0;1]$, $t \mapsto f(x,t) = g_x(t)$ est continue et intégrable sur $]0;1]$ (on vient de le voir). De plus, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{1+xt}$ est continue sur $]0;1]$.
- Pour $(x,t) \in ]0;1[\times]0;1]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1 = \varphi(t)$ et $\varphi$ est continue et intégrable sur $]0;1]$.

Par dérivation sous le signe somme, $g$ est $C^1$sur $]0;1[$ et $g'(x) = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+xt} = \left[\dfrac{\ln(1+xt)}{x}\right]_0^1 = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
Pourtant, la meilleure méthode est, pour $x \neq 0$, d'effectuer le changement de variable $t = \dfrac{u}{x}$ dans l'intégrale $g(x) = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+xt)}{t}dt$ pour avoir $g(x) = \int_0^x \dfrac{\ln(1+u)}{u}du$ et tout est limpide par le théorème fondamental de l'intégration car $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ est continue sur $]-1;1[$.

**10.65** **a.** La fonction $f : x \mapsto x + e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = 1 - e^{-x} \geqslant 0$ ($f'$ ne s'annule qu'en $0$). Or $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, $f$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[1;+\infty[$. Par conséquent, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\exists! x_n \geqslant 0,\ f(x_n) = e^{x_n} - x_n = n$. Par exemple $x_1 = 0$.
**b.** Pour $n \geqslant 1$, comme $e^{-n} > 0$, $f_n(x_n) = n \leqslant f_n(n)$ d'où $x_n < n$ par stricte croissance de $f$. De plus, $f(n-1) = n - 1 + e^{-(n-1)} \leqslant n$ car $e^{-(n-1)} \leqslant 1$. À nouveau, $n - 1 \leqslant x_n$. Au final, $\forall n \geqslant 1,\ x_n \in [n-1;n[$.
**c.** D'après la question précédente, $\forall n \geqslant 1,\ 0 < a_n = n - x_n \leqslant 1$. Comme le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 1} x^n$ vaut $1$ : $R \geqslant 1$. Mieux, comme $a_n = n - x_n = e^{-x_n}$, on a d'après **b.** l'encadrement $e^{-n} \leqslant a_n \leqslant e \times e^{-n}$. Comme les rayons des deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-n}x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} e.e^{-n}x^n$ valent clairement $R' = e$, on a d'après le cours $R = e$.
$a_n e^n = (n - x_n)e^n = e^{-x_n}e^n = e^{n-x_n} = e^{a_n}$. Comme $a_n \geqslant 0$, on a $e^{a_n} \geqslant 1$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n e^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n(-e)^n$ divergent grossièrement. L'intervalle de convergence de cette série est $]-e;e[$.

**10.66** **a.** Par croissances comparées, la suite $\left(\dfrac{x^n}{4n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$. Ainsi, $R = 1$. De plus, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{4n+1}$ diverge d'après RIEMANN car $\dfrac{1}{4n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{4n+1}$ converge par le CSSA car la suite $\left(\dfrac{1}{4n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers $0$. L'intervalle de convergence de cette série vaut $[-1;1[$.

**b.** Posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{4k+1}$. Comme $\dfrac{1}{4k+1} = \int_0^1 t^{4k}dt$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a par linéarité de l'intégrale :
$|S_n - I| = \left|\int_0^1 \left(\sum\limits_{k=0}^{n} t^{4k} - \dfrac{1}{1+t^4}\right)dt\right| = \left|\int_0^1 \left(\dfrac{1-(-t^4)^{n+1}}{1+t^4} - \dfrac{1}{1+t^4}\right)dt\right| = \int_0^1 \dfrac{t^{4n+4}}{1+t^4}dt \leqslant \int_0^1 t^{4n+4}dt$
donc $|S_n - I| \leqslant \dfrac{1}{4n+5}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = I = S(-1) = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^4}$.
**c.** $1 + X^4 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = (X^2+1)^2 - (\sqrt{2}X)^2 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.

On sait qu'alors, il existe quatre constantes $a, b, c, d$ telles que $\dfrac{1}{X^4+1} = \dfrac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \dfrac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}$.

On procède par identification et on trouve $a = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $b = \dfrac{1}{2}$, $c = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $d = \dfrac{1}{2}$.

**d.** Ainsi, $\dfrac{1}{1+t^4} = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\dfrac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\dfrac{2t+2\sqrt{2}}{t^2+2\sqrt{2}t+1} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}$. On en déduit classiquement que $S(-1) = \left[\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right) + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}t+1) + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}t-1)\right]_0^1$.

Il vient donc $S(-1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1) + \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}} \sim 0,867$.

**10.67** **a.** On calcule les premiers termes : $a_0 = 1$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = \dfrac{7}{24}$. Soit $A(n) =$ "$\forall k \in [\![0;n]\!],\ 0 < a_k \leqslant 1$".

Initialisation : $0 < a_0 = 1 \leqslant 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A(n)$ soit vraie, alors $0 < a_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{n-k+2}$ par hypothèse, donc $0 < a_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = \dfrac{n+1}{n+1} = 1$. Par principe de récurrence que $\forall k \in [\![0;n]\!],\ 0 < a_k \leqslant 1$.

Ainsi, le rayon de convergence $R$ de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est supérieur à celui de $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$, d'où $R \geqslant 1$.

**b.** Comme $\dfrac{1}{2} \in ]-1;1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge donc $L$ existe et $L = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

**c.** $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-1;1[$. Pour $x \in ]-1;1[$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{a_k}{n-k+2}x^n$. Or $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n+2}x^n$ est de rayon 1. Par produit de CAUCHY, $\forall x \in ]-1;1[$, $f'(x) = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n+2}x^n\right)$.

**d.** Pour $x \in ]0;1[$, posons $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n+2}x^n = \dfrac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n+2}x^{n+2}\right) = -\dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2}$. $f$ est solution sur $]0;1[$ de l'équation différentielle $y' = g(x)y$ dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{G(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $G$ est une primitive sur $]0;1[$ de $g$. On trouve par intégration par parties que $G : x \mapsto -\ln(1-x) + \dfrac{\ln(1-x)+x}{x}$ convient. De plus, comme les $a_n$ sont strictement positifs, $f$ est strictement positive sur $]0;1[$ donc $\lambda > 0$ et $\ln(f(x)) = \ln(\lambda) - \ln(1-x) + \dfrac{\ln(1-x)+x}{x}$. En faisant tendre $x$ vers $0^+$, on trouve que $\ln(\lambda) = 0$ donc on a la relation $\forall x \in ]0;1[,\ \ln(f(x)) = -\ln(1-x) + \dfrac{\ln(1-x)+x}{x}$.

Ainsi, $\ln\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln(2) + 2\left(-\ln(2) + \dfrac{1}{2}\right) = 1 - \ln(2)$ d'où $L = e^{1-\ln(2)} = \dfrac{e}{2} \sim 1,36$.

**10.68** **a.** Posons les deux sommes partielles associées : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k$.

- Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ converge, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers $S$). Or $S'_n = S_{2n+1}$ donc $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $S$ en tant que suite extraite d'une suite convergente donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} y_n$ converge.
- Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} y_n$ converge, alors la suite $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers $S'$). Or $S_{2n+1} = S'_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = S'$ et $S_{2n} = S_{2n+1} - x_{2n+1} = S'_n - x_{2n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S'$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} = 0$ par hypothèse. Par conséquent, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S'$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ converge.

Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} y_n$ sont de même nature et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ en cas de convergence.

**b.** Comme $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$, la suite $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée si et seulement si $\left(\dfrac{x^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, c'est-à-dire si et seulement si $|x| \leqslant 1$ par croissances comparées. Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est $R = 1$. De plus, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ est absolument convergente par RIEMANN donc $f$ est définie aussi en $\pm 1$. Le domaine de définition $D$ de $f$ vaut donc $D = [-1;1]$.

**c.** Si $x \in ]0;1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{2n} - \frac{x^n}{2n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ (les deux séries convergent) donc $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{\sqrt{x}}\Big(\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\Big) - \sqrt{x}\Big)$.

**d.** Les $u_n : x \mapsto \frac{x^n}{2n(2n+1)}$ sont continues sur $[-1;1]$ et $||u_n||_{\infty,[-1;1]} = \frac{1}{2n(2n+1)}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[-1;1]$ par RIEMANN. Ainsi, $f$ est continue sur $[-1;1]$ donc $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$. Comme $f(x) = 1 - \frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\ln(1+\sqrt{x}) + \frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\ln(1-\sqrt{x})$ car $1-x = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$, on trouve $f(1) = 1-\ln(2)$ par croissances comparées. Or $f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}\Big) = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ d'après **a.** en posant $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ car on a bien $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. En identifiant, on a bien $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

**10.69** **a.** Comme $h$ est de classe $C^\infty$ sur $J$, par la formule de TAYLOR reste intégral, on a, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in J$, la relation $R_N(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} h^{(N+1)}(t)dt$.

**b.** Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $0 < x < y < a$, $\frac{R_N(x)}{x^{N+1}} = \frac{1}{N!}\int_0^x \Big(1-\frac{t}{x}\Big)^N h^{(N+1)}(t)dt \leqslant \frac{1}{N!}\int_0^y \Big(1-\frac{t}{y}\Big)^N h^{(N+1)}(t)dt$ car $1-\frac{t}{x} \leqslant 1-\frac{t}{y}$ pour $t \in [0\,;x]$ et que $h^{(n+1)}(t) \geqslant 0$. On a donc $R_N(x) \leqslant \frac{x^{N+1}}{y^{N+1}} R_N(y) = \Big(\frac{x}{y}\Big)^{N+1} R_N(y)$.

**c.** Soit $y \in ]0;a[$ et $x \in ]0;y[$, alors comme $\lim_{N\to+\infty} \Big(\frac{x}{y}\Big)^{N+1} = 0$, on a par encadrement $\lim_{N\to+\infty} R_N(x) = 0$ d'après **b.**. Ainsi, $h$ est développable en série entière sur $[0;a[$ donc sur $]-a;a[$ par parité ou imparité de $h$.

**d.** La fonction $\tan$ est de classe $C^\infty$ sur $\big]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\big[$. $\tan$ et $\tan' = 1+\tan^2$ sont positives sur $\big[0;\frac{\pi}{2}\big[$. Soit $n \geqslant 1$ tel que $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\tan^{(k)}$ est positive sur $\big[0;\frac{\pi}{2}\big[$. Alors, d'après la formule de LEIBNIZ en dérivant $n$ fois la relation $\tan' = 1+\tan^2$, on obtient $\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tan^{(k)}\tan^{(n-k)}$ donc $\tan^{(n+1)}$ est positive sur $\big[0;\frac{\pi}{2}\big[$. Par principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)}$ est positive sur $\big[0;\frac{\pi}{2}\big[$. Par conséquent, d'après la question précédente, $\tan$ est développable en série entière sur $\Big]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\Big[$.

Question de cours : la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon $R$ converge normalement sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert $]-R;R[$ de convergence (si $R > 0$ bien sûr). Si $\sum_{n\geqslant 0} |a_n|$ converge, $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[-R;R]$ car si $u_n : x \mapsto a_n x^n$, on a $||u_n||_{\infty,[R;R]} = |a_n|$ et que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge absolument.

**10.70** **a.** On sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} = \mathrm{Arctan}'(0) = 1$ donc $h$ se prolonge par continuité en $0$ en posant $h(0) = 1$. Comme $h$ est continue par opérations sur $\mathbb{R}^*$ car $\mathrm{Arctan}$ l'est, la fonction $h$ est maintenant continue sur $\mathbb{R}$.

**b.** On sait que, si $x \in ]-1;1[$, $\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ donc, pour $x \in ]-1;0[\cup]0;1[$, on a la relation $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$. Cette relation est aussi vraie pour $x = 0$ car $\frac{(-1)^0}{2.0+1} = 1 = h(0)$. Ainsi, $h$ est bien DSE sur $]-1;1[$ et la rayon de cette série entière est classiquement $R = 1$ car $\Big(\frac{x^{2n}}{2n+1}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et

seulement si $|x| \leqslant 1$ par croissances comparées.
**c.** Comme $h$ est paire, il suffit de vérifier que la décomposition de $h$ en série entière est valable sur $[0;1]$, c'est-à-dire en $1$ puisque on vient de le voir sur $[0;1[$ à la question précédente.
La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge par le CSSA car $\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers $0$.
Posons $u_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$, alors pour $x \in [0;1]$, $|R_n(x)| = \Big|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\Big| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$ par le CSSA donc $||R_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$ ce qui prouve la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ vers $h$ sur $[0;1]$. Comme toutes les $u_n$ sont continues sur $[0;1]$, on a $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Or $h$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = h(1) = \frac{\pi}{4}$. Puisque $\forall x \in [0;1[,\ h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$, on trouve en identifiant $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Ainsi, $\forall x \in [0;1],\ h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$. Par parité, cette relation est valable sur $[-1;1]$.
**d.** La fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $H(x) = \int_0^x h(t)dt$ est la primitive qui s'annule en $0$ de la fonction $h$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $H'(0) = h(0) = 1$. Ceci se traduit par $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{H(x)-H(0)}{x-0} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ ce qui nous permet de prolonger $f$ par continuité en $0$ en posant $f(0) = 1$.
**e.** Puisque $H$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de $h$, la fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par opérations avec $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x} - \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x h(t)dt = \dfrac{xh(x) - \int_0^x h(t)dt}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x (h(x)-h(t))dt$ si $x \neq 0$. Comme $h$ est $C^1$, $h(x) - h(t) = (x-t)h'(c)$ par le théorème des accroissements finis et $|h'(c)| \leqslant ||h'||_{\infty,\widetilde{[0;x]}} = m_x$. Par l'inégalité de la moyenne, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^2}\Big|\displaystyle\int_0^x |x-t| m_x dt\Big| = \dfrac{m_x}{2}$. Or $h'$ étant continue en $0$ et $h'(0) = 0$, il vient $\lim\limits_{x\to 0} m_x = 0$. Ainsi, par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$ donc, par le théorème de prolongement $C^1$, $f$ est dérivable en $0$, $f'(0) = 0$ et $f'$ est continue en $0$. Par conséquent, la fonction $f$ est bien de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
**f.** Comme $h$ est DSE sur $]-1;1[$, $\forall x \in ]-1;1[$, $\displaystyle\int_0^x h(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1}\right)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ (intégration terme à terme). Ainsi, $\forall x \in ]-1;1[$, si $x \neq 0$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)^2}$. Or, comme $f(0) = 1$, cette relation marche aussi si $x = 0$ donc $f$ est DSE sur $]-1;1[$.

$\boxed{\textbf{10.71}}$ Puisque la fonction $\sin$ est 1-lipschitzienne car $|\sin'| = |\cos| \leqslant 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leqslant |a|^n|x|$. Comme $|a| < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a^n||x|$ converge donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument et la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Ainsi $F_a$ est définie sur $\mathbb{R}$.

- $(H_1)$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $F_a$.
- $(H_2)$ Toutes les fonctions $f_n$ sont de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- $(H_3)$ Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n^{(p)}(x) = a^{np}\sin\left(a^n x + p\frac{\pi}{2}\right)$ donc $f_n^{(p)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $||f_n^{(p)}||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant |a|^{np}$ (on a même égalité). Or la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a|^{np}$ converge car $|a| < 1$, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(p)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Par un théorème du cours, $F_a$ est de classe $C^\infty$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_a^{(p)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^{np}\sin\left(a^n x + p\frac{\pi}{2}\right)$. On en déduit que $F_a^{(p)}(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^{np}\sin\left(p\frac{\pi}{2}\right)$ donc $F_a^{(p)}(0) = 0$ si $p$ est pair et, si $p = 2k+1$, on trouve

$F_a^{(2k+1)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n(2k+1)} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k a^{n(2k+1)} = \frac{(-1)^k}{1-a^{2k+1}}$.
D'après le cours, $F_a$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ si et seulement si le reste intégral d'ordre $k$, à savoir $\frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k F_a^{(k+1)}(t)dt$, tend vers $0$ quand $k$ tend vers $+\infty$ pour tout réel $x$. Or, par inégalité de la moyenne, $\left|\frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k F_a^{(k+1)}(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{k!}\left|\int_0^x |x-t|^k |F_a^{(k+1)}(t)|dt\right|$. Avec l'expression de $F_a^{(k+1)}(t)$ vue avant, et $|F_a^{(k+1)}(t)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a^{n(k+1)} \sin\left(a^n t + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^{n(k+1)} = \frac{1}{1-|a|^{k+1}}$. On arrive donc à la majoration $\left|\frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k F_a^{(k+1)}(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{k!(1-|a|^{k+1})}\left|\int_0^x |x-t|^k dt\right| = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!(1-|a|^{k+1})}$ car, $x-t$ étant de signe constant sur $\widetilde{[0;x]}$, on a $\left|\int_0^x |x-t|^k dt\right| = \left|\int_0^x (x-t)^k dt\right| = \left|\left[-\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^x\right| = \frac{|x|^{k+1}}{k+1}$. Par croissances comparées, $\lim_{k\to+\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!(1-|a|^{k+1})} = 0$, donc $F_a$ est bien développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et, étant égale à sa série de Fourier, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_a(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!(1-a^{2p+1})}$ grâce à ce qui précède.
Comme la fonction $\sin$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, $F_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k a^{n(2k+1)} x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$.
Or la famille $\left(\frac{(-1)^k a^{n(2k+1)} x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable car, par sommation par paquets, on a le calcul $\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{|a|^{n(2k+1)}|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|a|^{n(2k+1)}|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!(1-|a|^{2k+1})} < +\infty$ car si $x \neq 0$, $\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!(1-|a|^{2k+1})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} = \text{sh}(|x|) < +\infty$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, on peut développer en série entière $F_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^{n(2k+1)}\right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!(1-a^{2k+1})}$.

**10.72** **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $0$ donc $\frac{a_n x^n}{n!} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{x^n}{n!}\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n x^n}{n!} = 0$ et le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n x^n}{n!}$ est donc $R = +\infty$.
**b.** La fonction $g : t \mapsto f(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $f$ l'est en tant que somme de série entière de rayon infini. De plus, $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n e^{-t}}{n!}$. On pose $u_n : t \mapsto \frac{a_n t^n e^{-t}}{n!}$ de sorte que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement vers $g$ sur $\mathbb{R}_+$. Les $u_n$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ comme la fonction $g$. De plus, $u_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $t^n e^{-t} \underset{+\infty}{=} o(e^{-t/2})$. Enfin, $\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} \frac{|a_n| t^n e^{-t}}{n!} dt = \frac{|a_n|}{n!}\Gamma(n+1) = |a_n|$ et la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n|$ converge par hypothèse. Ainsi, par le TITT, on a $\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

**10.73** Posons $a_n = n^{(-1)^n}$, alors $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant n$ (considérer $n$ pair et $n$ impair) et les séries entières $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} n x^n$ ont classiquement pour rayon $1$ car $(nx^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$ et $\left(\frac{x^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$. Ainsi, le rayon de convergence $R$ de $\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n$ vérifie $1 \geqslant R \geqslant 1$ d'après le cours : $R = 1$. De plus, comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée, l'intervalle de convergence est $]-1;1[$.
En séparant termes pairs et impairs, on a $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2n x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
Comme $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, en dérivant et en multipliant par $x$ : $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ donc

$\sum_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$. On sait que $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$.
En sommant : $\forall x \in ]-1;1[$, $2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\big(= \text{Argth}(x)\big)$.
On pouvait aussi écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} x^{2n}$ en séparant termes d'indices pairs et impairs et on reconnaît $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1+x)^2}{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\big(= \text{Argth}(x)\big)$.
On pouvait aussi, pour $x \in ]-1;1[$, intégrer terme à terme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\right) dt$ (car $\widetilde{[0;x]}$ est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence) : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{ddt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
Ainsi, $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

**10.74** **a.** Il est archi-classique que $X^2 + 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$ avec la formule d'Euler.

**b.** Comme les racines de $X^2 + 2\cos(\theta)X + 1$ sont complexes non réelles, la fonction $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Identifions : $\frac{1}{1 + 2x\cos(\theta) + x^2} = \frac{a}{x - e^{i\theta}} + \frac{b}{x - e^{-i\theta}} = \frac{(a+b)x - (ae^{-i\theta} + be^{i\theta})}{1 + 2x\cos(\theta) + x^2}$ d'après la question **a.**. On résout le système $a + b = ae^{-i\theta} + be^{i\theta} + 1 = 0$ pour avoir $a = -b = \frac{1}{2i\sin(\theta)}$. On peut donc conclure que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2i\sin(\theta)(x - e^{i\theta})} - \frac{1}{2i\sin(\theta)(x - e^{-i\theta})}$.

**c.** Si $|x| < 1$, en écrivant $f(x) = \frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(\frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{1 - xe^{-i\theta}}\right)$, comme $|xe^{i\theta}| < 1$ et $|xe^{i\theta}| < 1$, on trouve $f(x) = \frac{1}{2i\sin(\theta)} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta})$ en utilisant les séries géométriques ce qui donne le développement $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} x^n$ en série entière. Si le rayon $R$ de cette série était strictement supérieur à 1, la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} z^n$ de la variable complexe aurait le même rayon donc la fonction $g : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} z^n$ serait continue sur $B(0,R)$ donc en particulier en $z = e^{i\theta}$ ce qui est impossible puisqu'en remontant les calculs, on a $g(z) = \frac{1}{2i\sin(\theta)(z - e^{i\theta})} - \frac{1}{2i\sin(\theta)(z - e^{-i\theta})}$ et $g$ ne peut pas être continue en $e^{i\theta}$. Ainsi, le rayon de $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} x^n$ vaut exactement $R = 1$.

**10.75** Posons $u_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{2^{n+1}}$, par croissances comparées, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2^n} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge par comparaison aux séries de Riemann. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, comme $(2n^2+3n+1)x^n \underset{+\infty}{\sim} 2n^2 x^n$, toujours par croissances comparées, la suite $\big((2n^2 + 3n + 1)x^n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$ donc le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 0} (2n^2 + 3n + 1)x^n$ vaut $R = 1$. Posons donc $\forall x \in ]-1;1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n^2 + 3n + 1)x^n$.

On écrit $2n^2 + 3n + 1 = 2(n+2)(n+1) - 3(n+1)$ pour avoir $f(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$ (les deux séries convergent) donc $f(x) = 2\left(\frac{1}{1-x}\right)'' - 3\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{4}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} = \frac{1+3x}{(1-x)^3}$. Enfin, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (2n^2 + 3n + 1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1 + (3/2)}{(1/8)} = 10$.

**10.76** **a.** Pour $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ est continue sur le segment $\widetilde{[x; 3x]}$ donc $F$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$. Comme $f$ est impaire sur $\mathbb{R}^*$, $F(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-3x} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_x^{3x} \frac{\cos(-u)}{-u}(-du) = F(x)$ par le changement de variable $t = -u$ facile à justifier. Ainsi, $F$ est paire.

**b.** Comme $\cos(t) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$, on a $f(t) \underset{0}{=} \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{2} + o(t)$ ce qui signifie que $f(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{2} + t\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha < 0$ tel que $\forall t \in ]-\alpha; \alpha[\setminus\{0\}$, $|\varepsilon(t)| \leqslant \varepsilon$. Alors, si $x \neq 0$ mais $|x| < \dfrac{\alpha}{3}$, on a $\left| \displaystyle\int_x^{3x} (f(t) - \frac{1}{t} - \frac{t}{2}) dt \right| \leqslant \left| \int_x^{3x} \varepsilon t dt \right| = 4\varepsilon x^2$. On en déduit donc que $F(x) \underset{0}{=} \ln(3) - 2x^2 + o(x^2)$.

On pouvait invoquer la primitivation des DL en calculant $F'(x) = 3\dfrac{\cos(3x)}{3x} - \dfrac{\cos(x)}{x}$ et son DL d'ordre 1.

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = \ln(3)$ et on peut donc prolonger $F$ par continuité en $0$ en posant $F(0) = \ln(3)$. De plus, le DL précédent montre que $F$ ainsi prolongée est dérivable en $0$ avec $F'(0) = 0$.

**c.** Soit $x > 0$, par une intégration par parties facile, on obtient $F(x) = \left[\dfrac{\sin(t)}{t}\right]_x^{3x} + \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ et $\left| \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \right| \leqslant \int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x} = \frac{2}{3x}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{\sin(t)}{t}\right]_x^{3x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = 0$ par la majoration précédente, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$. Par parité de $F$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

**d.** Soit $x \neq 0$, alors $F(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1}{t} dt + \int_x^{3x} \frac{\cos(t) - 1}{t} dt = \ln(3) + \int_x^{3x} \frac{\cos(t) - 1}{t} dt$. Or $t \mapsto \dfrac{\cos(t) - 1}{t}$ est développable en série entière avec un rayon infini et $\dfrac{\cos(t) - 1}{t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n)!}$ donc, en intégrant terme à terme, on a $\forall x \neq 0$, $F(x) = \ln(3) + \displaystyle\int_x^{3x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n)!} dt = \ln(3) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n ((3x)^{2n} - x^{2n})}{(2n)(2n)!}$. C'est aussi vrai si $x = 0$ donc $F$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \ln(3) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (3^{2n} - 1)}{(2n)(2n)!} x^{2n}$.

**10.77** L'hypothèse de l'énoncé montre que $a_n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc que $a_n \underset{+\infty}{=} o(1)$. Comme le rayon de $\sum\limits_{n \geqslant 1} x^n$ vaut 1, le rayon $R$ de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$ ce qui justifie l'existence de la fonction $f$ sur $]-1; 1[$.

**a.** On constate d'abord, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \mathbb{N}$, que :

- si $i \geqslant n$, alors $1 - \dfrac{i}{n} \leqslant 0 \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^i$ donc $1 - \dfrac{i}{n} \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^i$ est vérifié.

- si $i = 0$, $1 - \dfrac{i}{n} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^i = 1$ donc $1 - \dfrac{i}{n} \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^i$ est à nouveau vrai.

- si $i = 1$, $1 - \dfrac{i}{n} = 1 - \dfrac{1}{n} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^1$ donc $1 - \dfrac{i}{n} \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^i$ est encore valide.

Ceci nous conduit à effectuer une récurrence sur $i \in [\![0; n]\!]$. L'initialisation vient d'être faite.

Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$ tel que $1 - \dfrac{i}{n} \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^i$. Alors $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{i+1} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^i \times \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ donc, puisque $1 - \dfrac{1}{n} \geqslant 0$, l'hypothèse de récurrence montre que $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{i+1} \geqslant \left(1 - \dfrac{i}{n}\right) \times \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{i+1}{n} + \dfrac{i}{n^2} \geqslant 1 - \dfrac{i+1}{n}$ et l'hérédité est établie. Par principe de récurrence, on a donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \dfrac{i}{n} \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^i$.

**b.** Pour $n \geqslant 1$, en décomposant la somme et par inégalité triangulaire, comme la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_i \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^i$ est absolue puisque $\left|1 - \dfrac{1}{n}\right| < R$ et comme $f\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i +$

$\sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^i$, d'après la question précédente

$$\begin{aligned}\Big|\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)-f\big(1-\frac{1}{n}\big)\Big| &= \Big|\sum_{i=0}^{n} a_i\Big(1-\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^i\Big)+\sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^i\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}|a_i|i+\sum_{i=n+1}^{+\infty}|a_i|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^i\end{aligned}$$

Comme la suite $(i|a_i|)_{i\in\mathbb{N}}$ tend vers $0$ par hypothèse, le théorème de CESARO (hors programme mais à savoir re-démontrer) permet d'affirmer que la suite des moyennes arithmétiques $\Big(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}|a_i|i\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $0$. Or comme $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}|a_i|i=0$. De plus, cette même suite étant bornée, on peut majorer $\forall i\geqslant n+1,\ i|a_i|\leqslant \operatorname{Sup}\limits_{j\geqslant n+1} j|a_j|=M_n$ ce qui donne

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty}|a_i|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^i\leqslant\sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{M_n}{i}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^i\leqslant\frac{M_n}{n+1}\sum_{i=n+1}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^i=\frac{M_n}{n+1}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n+1}\times\frac{1}{1-\big(1-\frac{1}{n}\big)}$$

et on conclut enfin que $\sum_{i=n+1}^{+\infty}|a_i|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^i\leqslant\frac{nM_n}{n+1}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n+1}\leqslant M_n$. Mais puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=0$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}M_n=0$ ce qui montre qu'on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=n+1}^{+\infty}|a_i|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^i=0$.

Grâce à la majoration précédente, on peut conclure par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(\Big(\sum_{i=0}^{n}a_i\Big)-f\big(1-\frac{1}{n}\big)\Big)=0$.

**c.** Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)=1$ et que $f$ admet une limite finie, disons $\ell$, quand $x$ tend vers $1$, en composant on a $\lim\limits_{n\to+\infty}f\big(1-\frac{1}{n}\big)=\ell$. En notant $S_n=\sum_{i=0}^{n}a_i$ la somme partielle de $\sum_{n\geqslant0}a_n$, ce qui précède montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=0+\ell=\ell$ car $S_n=\Big(S_n-f\big(1-\frac{1}{n}\big)\Big)+f\big(1-\frac{1}{n}\big)$. Ainsi, $\sum_{n\geqslant0}a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=\ell$.

**10.78** **a.** Pour $x\in\mathbb{R}$, $g_x: t\mapsto\frac{t^x}{1+t}$ est continue et positive sur $]0;1]$ car $g_x(t)=\frac{e^{x\ln(t)}}{1+t}$. De plus, $g_x(t)\underset{0}{\sim}\frac{1}{t^{-x}}$ donc, par RIEMANN, $g_x$ est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $-x<1\iff x>-1$. Ainsi, comme $g_x$ est positive, $F(x)$ est défini si et seulement si $x>-1$, d'où $D=]-1;+\infty[$.

**b.** Posons $f:]-1;+\infty[\times]0;1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,t)=\frac{t^x}{1+t}$.

- Pour $t\in]0;1]$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $C^\infty$ sur $]-1;+\infty[$.
- Pour $x\in]-1;+\infty[$, $t\mapsto f(x,t)=g_x(t)$ est continue et intégrable sur $]0;1]$ (on vient de le voir).
- Pour $x\in]-1;+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $t\mapsto\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)=\frac{(\ln t)^k t^x}{1+t}$ est continue sur $]0;1]$ et, si $a\in]-1;+\infty[$, on a la majoration $\forall x\in[a;+\infty[,\ \forall t\in]0;1],\ \Big|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\Big|\leqslant\frac{|\ln t|^k t^a}{1+t}=\varphi_a(t)$ avec $\varphi_a$ continue et intégrable sur $]0;1]$ d'après RIEMANN car, par croissances comparées, on a $\varphi_a(t)\underset{0}{=}o\Big(\frac{1}{t^{\frac{1-a}{2}}}\Big)$ et $\frac{1-a}{2}<1$.

D'après un théorème du cours, $F$ est de classe $C^\infty$ sur $]-1;+\infty[$ et $\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x>-1,\ F^{(k)}(x)=\int_0^1\frac{(\ln t)^k t^x}{1+t}dt$.

**c.** Pour $x\in]-1;1[$, $F(x)=\int_0^1\frac{t^x}{1+t}dt=\int_0^1\Big(\frac{1}{1+t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n\ln(t)^n}{n!}\Big)dt=\int_0^1\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n\ln(t)^n}{n!(1+t)}\Big)dt$. Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $f_n:]0;1]\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(t)=\frac{x^n\ln(t)^n}{n!(1+t)}$.

- La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers $g_x$ sur $]0;1]$ (on en vient).
- Les fonctions $f_n$ et $g_x$ sont continues sur $]0;1]$. $f_n$ est intégrable sur $]0;1]$ car $f_0(t) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} f_n(t) = 0$ pour $n \geqslant 1$ par croissances comparées.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|dt \leqslant \frac{|x|^n}{n!}\int_0^1 |\ln(t)|^n dt$. Posons $J_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(t))^n dt$. On effectue une intégration par parties avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto (\ln(t))^n$, $u$ et $v$ sont $C^1$ sur $]0;1]$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc $J_n = [t\ln^n t]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 t.\frac{n\ln^{n-1} t}{t}dt = -nJ_{n-1}$. Par une récurrence, simple, comme $J_0 = 1$ et $J_1 = [t\ln(t) - t]_0^1 = -1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = (-1)^n n!$. On aurait aussi pu poser le changement de variable $t = \varphi(x) = e^{-x}$ avec $\varphi$ bijection strictement décroissante et de classe $C^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0;1]$ pour avoir, après calculs, $J_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = (-1)^n\Gamma(n+1) = (-1)^n n!$ (classique). Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|dt \leqslant |x|^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} |x|^n$ car $|x| < 1$ (série géométrique).

Alors, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n\ln(t)^n}{n!(1+t)}\Big)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{x^n \ln(t)^n}{n!(1+t)}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ par le théorème d'intégration terme à terme en posant $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)^n}{n!(1+t)}dt$. Ainsi, $F$ est développable en série entière sur $]-1;1[$.

Méthode 1 : Comme $\forall t \in ]0;1]$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ , on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(t)|^n}{2.n!}dt \leqslant |a_n| \leqslant \int_0^1 \frac{|\ln(t)|^n}{n!}dt$ et, puisque $\displaystyle\int_0^1 |\ln(t)|^n dt = n!$ d'après les calculs précédents, $\dfrac{1}{2} \leqslant |a_n| \leqslant 1$. Comme les rayons de convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{2}$ valent $1$, le rayon $R$ de $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ vaut aussi $R = 1$.

Méthode 2 : D'abord $a_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \ln(2)$ et, si $n \geqslant 1$, on peut calculer effectivement $a_n$ en écrivant que $\forall t \in ]0;1[$, $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^k$ donc $a_n = \displaystyle\int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{t^k\ln(t)^n}{n!}\Big)dt$. Soit $g_k : t \mapsto (-1)^k\dfrac{t^k\ln(t)^n}{n!}$.

- La série $\sum_{k\geqslant 0} g_k$ converge simplement vers $h : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{t^k\ln(t)^n}{n!}$ sur $]0;1]$ (on en vient).
- Les fonctions $g_k$ et $h$ sont continues sur $]0;1]$. $g_k$ est intégrable sur $]0;1]$ car $g_k$ se prolonge en une fonction continue sur $[0;1]$ si $k \geqslant 1$ et $g_0(t) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$.
- Pour $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 |g_k(t)|dt = \frac{1}{n!}\int_0^1 t^k|\ln(t)|^n dt$. Posons $t = e^{-x}$ dans $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^k\ln^n(t)dt$ et on a $I_k = (-1)^n\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-(k+1)x}dx$ puis $x = \dfrac{u}{k+1}$ et $I_k = \dfrac{(-1)^n}{(k+1)^{n+1}}\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}du = \frac{(-1)^n n!}{(k+1)^{n+1}}$ comme ci-dessus. On aurait pu poser $K_{p,n} = \displaystyle\int_0^1 t^p\ln^n(t)dt$, faire des intégrations par parties. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 |g_k(t)|dt = \frac{1}{(k+1)^{n+1}}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(k+1)^{n+1}}$ converge (série de Riemann car $n+1 > 1$).

Alors, $a_n = (-1)^n\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^{n+1}} = (-1)^n\theta(n+1)$ par le théorème d'intégration terme à terme où $\theta$ est la seconde fonction de Riemann : $\theta(\alpha) = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^\alpha}$ pour $\alpha > 0$.

On sait que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\theta(\alpha) = 1$ (classique par double limite) donc, pour $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = 1$ et la règle de d'Alembert permet de conclure que $R = 1$.

Question de cours : si $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une suite de complexes ne s'annulant par et si on suppose l'existence de $\ell = \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \in \overline{\mathbb{R}_+}$, alors on a deux implications qui constituent le critère de D'ALEMBERT :

- si $\ell < 1$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument.
- si $\ell > 1$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement.
- si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure comme le prouvent les séries de RIEMANN.

**10.79** **a.** Posons $u_n = n^{(-1)^n}$, alors $\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant n$ et les séries entières $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{x^n}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} nx^n$ ont classiquement pour rayon 1 donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n}x^n$ est $R = 1$ par encadrement.
De plus, comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée, les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ divergent grossièrement et l'intervalle de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} n^{(-1)^n}x^n$ est $]-1;1[$.

**b.** En séparant termes pairs et impairs, on a $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
Comme $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$, en dérivant et en multipliant par $x$, $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} = \dfrac{2x^2}{(1-x^2)^2}$ car $x^2 \in ]-1;1[$. On sait que $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \ln(1+x)$ et que $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$. En sommant, on obtient $\forall x \in ]-1;1[$, $2\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\big(= \text{Argth}\,(x)\big)$. Ainsi, $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n}x^n = \dfrac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

**10.80** **a.** Si $f$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$, alors $f$ est au moins dérivable sur $\mathbb{R}$. Mais $x \mapsto f(x) + f(\lambda x)$ est alors dérivable par opérations donc $f'$ est aussi dérivable donc $f$ est deux fois dérivable. Par une récurrence classique, on montre comme ceci que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant $n$ fois la relation $(E)$, on a $f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x) + \lambda^n f^{(n)}(x)$ $(E_n)$. Soit $a > 0$, la fonction $f^{(n)}$ est continue sur le segment $[-a;a]$ donc elle y est bornée et on peut définir $M_n = \operatorname{Sup}_{x\in[-a;a]} |f^{(n)}(x)| = ||f^{(n)}||_{\infty,[-a;a]}$. D'après $(E_n)$, comme $\lambda x \in [-a;a]$ si $x \in [-a;a]$ car $|\lambda| < 1$, on a $\forall x \in [-a;a]$, $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant |f^{(n)}(x)| + |\lambda|^n|f^{(n)}(\lambda x)| \leqslant M_n + |\lambda|^n M_n$ donc $M_{n+1} \leqslant (1+\lambda^n)M_n \leqslant 2M_n$. Par une récurrence simple, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n \leqslant 2^n M_0$.
Par TAYLOR reste intégral, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-a;a]$, $f(x) - \sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ donc $\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{n!}2^n M_0 \leqslant \dfrac{2^n a^{n+1}}{n!}M_0$. Par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{2^n a^n}{n!} = 0$ quel que soit $a > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ce qui prouve que $f$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc avec un rayon $R = +\infty$.

**b.** Soit $f$ solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$, d'après la question **a.**, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\lambda^n x^n$. En remplaçant dans $(E)$, on obtient $\forall x \in ]-R;R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)a_{n+1} - a_n - \lambda^n a_n)x^n = 0$ donc, par unicité des coefficients dans une série entière de rayon strictement positif : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{1+\lambda^n}{n+1}a_n$. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{a_0}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(1+\lambda^k)$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_0 g(x)$ avec $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1+\lambda^k)\right)\dfrac{x^n}{n!}$. L'ensemble des solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ est

donc la droite vectorielle engendrée par $g$.

**10.81** **a.** Pour tout réel $x$, la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t^2}\text{sh}(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\text{sh}(xt) = \dfrac{e^{xt} - e^{-xt}}{2} \underset{+\infty}{=} O(e^{|x|t})$ donc $e^{-t^2}\text{sh}(xt) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t^2+|x|t}) \underset{+\infty}{=} O\big(e^{-t}\big)$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t^2+|x|t+t} = 0$ donc, par comparaison, la fonction $h_x$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, la fonction $F$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

**b.** $\forall t \geqslant 0,\ \text{sh}(xt) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, donc $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)dt$ avec $f_n : t \mapsto \dfrac{x^{2n+1}t^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{-t^2}$.

- La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers $h_x$ sur $\mathbb{R}_+$ (on en vient).
- Les fonctions $f_n$ et la fonction $h_x$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
- Les fonctions $f_n$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ car $f_n(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées.
- Posons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n+1}e^{-t^2}dt$, en posant $u : t \mapsto t^{2n}$ et $v : t \mapsto -\dfrac{e^{-t^2}}{2}$, $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, pour tout $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = n\int_0^{+\infty} t^{2n-1}e^{-t^2}dt = nI_{n-1}$. Comme $I_0 = \Big[-\dfrac{e^{-t^2}}{2}\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{2}$, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{n!}{2}$. On aurait aussi pu poser $t = \sqrt{u} = \varphi(u)$ avec $\varphi$ bijection de classe $C^1$ strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ ce qui donne $I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-u^2}du = \dfrac{\Gamma(n+1)}{2} = \dfrac{n!}{2}$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n| = \dfrac{|x|^{2n+1}n!}{2(2n+1)!} = \dfrac{|x|^{2n+1}}{2(2n+1)\times\cdots\times(n+1)}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n| \leqslant \dfrac{|x|^{2n+1}}{(n+1)!}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{|x|^{2n+1}}{(n+1)!}$ converge (série exponentielle).

Par le théorème d'intégration terme à terme, on a donc l'intégrabilité de $h_x$ sur $\mathbb{R}_+$ (on le savait déjà) et surtout le développement en série entière de $F$ : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}n!}{2(2n+1)!}$.

On pouvait aussi dériver sous le signe somme, soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = e^{-t^2}\text{sh}(xt)$, alors :

- $\forall t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de le faire).
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = te^{-t^2}\text{ch}(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $a > 0$, on a la majoration $\forall x \in [-a;a],\ \forall t \geqslant 0,\ \Big|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| \leqslant te^{-t^2}\text{ch}(at) = \varphi_a(t)$ et $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{=} o\big(e^{-t}\big)$ comme avant donc la fonction $\varphi_a$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\text{ch}(xt)dt$. On pose $u(t) = \text{ch}(xt)$ et $v(t) = -\dfrac{e^{-t^2}}{2}$, alors $u$ et $v$ sont $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, on a $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\text{sh}(xt)dt = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}F(x)$. Ainsi, $F$ est la solution sur $\mathbb{R}$ de $(E)\ :\ y' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}y$ qui vérifie la condition de Cauchy $F(0) = 0$. Comme $x \mapsto \dfrac{x^2}{4}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$, on sait d'après le cours que $y_0 : x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}$ est un vecteur directeur de la droite des solutions de l'équation homogène $(E_0)\ :\ y' = \dfrac{x}{2}y$. Par méthode de variation de la constante, on trouve par exemple comme solution particulière de $(E)$ la fonction $y_p : x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{\frac{x^2}{4}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}}dt$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = y_p + \lambda y_0$. Comme $F(0) = 0 = \lambda$, $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = x \mapsto \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}}\,dt$.

On peut à partir de là retrouver un développement en série entière de $F$ par produit de Cauchy car

$$e^{\frac{x^2}{4}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{4^n n!} \quad \text{et} \quad \int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n n!}\Big)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n n!}dt\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4^n n!(2n+1)}$$

en intégrant terme à terme sur $[0;x]$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $\mathbb{R}$. Comme les séries précédentes convergent absolument pour $x \in \mathbb{R}$, en notant $a_n = \frac{x^{2n}}{4^n n!}$ et $b_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4^n n!(2n+1)}$, par produit de Cauchy, $2F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ si $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2n-2k}}{4^{n-k}(n-k)!}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{4^k k!(2k+1)} = \Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}\Big)\frac{x^{2n+1}}{4^n n!}$.
Par unicité du développement en série entière dès lors que le rayon est strictement positif (et c'est le cas ici), on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n!}{2(2n+1)!} = \frac{1}{2.4^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$ ou $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{2.4^n(n!)^2}{2(2n+1)!} = \frac{2^{2n-2}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

**10.82** **a.** La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge clairement par le critère spécial des séries alternées donc son reste d'ordre $n$ noté ici $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ existe bien pour tout entier $n \geqslant 1$ : la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie. Comme toute suite de restes, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**b.** Le critère spécial nous apprend aussi que $u_n$ est du signe de son premier terme donc de $(-1)^n$ ainsi $v_n$ est un terme positif. Enfin, on déduit encre du critère spécial des séries alternées que $|u_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ donc $|v_n| \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)$ donc $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge d'après Riemann.

**c.** En notant $S = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ pour $n \geqslant 1$, on a donc $S_n = S - u_n$ ce qui donne $w_n = \frac{(-1)^n S}{n} - \frac{(-1)^n}{n}u_n = \frac{(-1)^n S}{n} - v_n$. Comme la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n S}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées et que $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge d'après la question précédente, par somme, la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ converge.

**d.** Comme $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ converge, le rayon $R$ de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} w_n x^n$ vérifie déjà $R \geqslant 1$. Mais si on regarde ce qui se passe quand $x = -1$, on a $w_n(-1)^n = \frac{S}{n} - (-1)^n v_n$. Comme la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n v_n$ converge puisque $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge absolument d'après **b.** et que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{S}{n}$ diverge, par somme, la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n w_n$ diverge. Ainsi, on a $R \leqslant 1$. Au final, $R = 1$.

**10.83** **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $|a_n| = 1$, on a $\left|\frac{a_n}{n!}\right| = \frac{1}{n!}$ et on sait que le rayon de convergence de la série entière (exponentielle) $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ vaut $+\infty$. Ainsi, par comparaison, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}x^n$ vaut$R = +\infty$. Ainsi, la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

**b.** Supposons que $a_0 = 1$ (le cas $a_0 = -1$ s'obtient en considérant $-f$ à la place de $f$ avec les mêmes hypothèses sur $f$ en remplaçant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la suite $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Comme $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet des développements limités à n'importe quel ordre qui sont donnés d'après le théorème de Taylor-Young par $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$. Or, d'après le cours, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_n}{n!} = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ donc $a_n = f^{(n)}(0)$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) \underset{0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{k!}x^k + o(x^n)$ (ce qui est une troncature de la série entière). De même, on sait qu'on peut dériver une série entière terme à terme : $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(m)}(x) = \sum\limits_{n=m}^{+\infty} \dfrac{a_n}{(n-m)!}x^{n-m} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a_{k+m}}{k!}x^k$. Par exemple $f^{(m)}(x) \underset{0}{=} a_m + a_{m+1}x + o(x)$.

• Initialisation : comme $f(0) = a_0 = 1$, $f$ est positive localement au voisinage de $0$. Avec le développement limité à l'ordre $1$ de $f$ au voisinage de $0$, on a $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1x + o(x) \underset{0}{=} 1 + a_1x + o(x)$ donc, comme $a_1 \neq 0$, il vient $f(x) - 1 \underset{0}{\sim} a_1x$. Si on avait $a_1 = 1$, alors $f(x) - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc $f(x) - 1$ serait strictement positif au voisinage de $0^+$ ce qui est contraire à l'hypothèse $|f(x)| = f(x) \leqslant 1$ si $x > 0$. On conclut ce raisonnement : $a_1 = -1$.

• Hérédité : soit $m \geqslant 1$ et supposons que $\forall n \in [\![1;m]\!]$, $a_n = (-1)^n$. Alors $f^{(m)}(x) \underset{0}{=} a_m + a_{m+1}x + o(x)$ donc, par continuité de $f^{(m)}$ en $0$, $f^{(m)}$ est du signe de $(-1)^m$ au voisinage de $0$ donc $|f^{(m)}(x)| = (-1)^m f^{(m)}(x)$ au voisinage de $0$. Or on a vu que $f^{(m)}(x) \underset{0}{=} a_m + a_{m+1}x + o(x)$ donc $|f^{(m)}(x)| \underset{0}{=} 1 + (-1)^m a_{m+1}x + o(x)$. Si on avait $a_{m+1} = (-1)^m$, on aurait alors $|f^{(m)}(x)| \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$ donc $|f^{(m)}(x)| - 1 \underset{0}{\sim} x$ ce qui contredit encore une fois le fait que $\forall x > 0$, $|f^{(m)}(x)| \leqslant 1$. Par l'absurde, on a donc prouvé que $a_{m+1} = (-1)^{m+1}$.

• Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n!} = e^{-x}$.

En regroupant les deux cas selon $a_0$, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!}x^n$ et qu'on suppose que $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $f : x \mapsto e^{-x}$ ou $f : x \mapsto -e^{-x}$.

**10.84** L'ensemble $E$ contient la suite nulle et, si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de $E$, comme $|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ converge absolument par comparaison et, par linéarité de la somme de séries convergentes, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)2^{-kn} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n 2^{-kn} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n 2^{-kn} = 0 + 0$ donc $u + v \in E$. Ainsi, $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (et même de $\ell^1(\mathbb{C})$) donc $E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E$, comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n z^n$ est de rayon $R \geqslant 1$ car il y a convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n z^n$ au moins sur le disque $B_f(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ par comparaison. Posons $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ quand il y a convergence. Par hypothèse, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{1}{2^k}\right) = 0$. Comme $f$ est continue sur $]-1;1[$ car elle y est développable en série entière, on a $f(0) = \lim\limits_{k\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{2^k}\right) = 0$ donc $f(0) = u_0 = 0$.

Soit un entier $p \in \mathbb{N}$, supposons qu'on ait déjà montré que $u_0 = \cdots = u_p = 0$. Alors, on obtient $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n 2^{-kn} = \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} u_n 2^{-kn} = \dfrac{1}{2^{k(p+1)}} \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} u_n 2^{-kn+k(p+1)} = 0$ donc, en changeant d'indice, $\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} u_n 2^{-kn+k(p+1)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n+p+1} 2^{-kn} = 0$. Par conséquent, en posant $f_p(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n+p+1} z^n$, le rayon de convergence de cette série entière est à nouveau supérieur ou égal à $1$ car $\forall z \in B_f(0,1)$, $f(z) = z^p f_p(z)$. Ce qui précède montre que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_p\left(\dfrac{1}{2^k}\right) = 0$ et, avec les mêmes arguments que précédemment, le terme constant de $f_p$ est nul ce qui montre que $u_{p+1} = 0$ et l'hérédité est établie.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Ainsi, $E$ est réduit à la suite nulle !

**10.85** Comme $\left(\dfrac{(-1)^n x^n}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$ par croissances comparées, le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n x^n}{3n+1}$ vaut $R = 1$. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{3n+1}$ pour $x \in ]-1;1]$. En effet, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n x^n}{3n+1}$ converge si $x \in ]-1;1[$ d'après le cours et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ converge aussi par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{3n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers $0$. Par contre, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{3n+1}$ diverge car $\dfrac{1}{3n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$ et que la série harmonique diverge. Posons $g(x) = xf(x^3)$, alors $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$. Le rayon de cette série entière est aussi $1$, on sait donc que $g$ est dérivable sur $]-1;1[$ et que $g'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} = \dfrac{1}{1+x^3}$. Ainsi, puisque $g(0) = 0$, par le théorème fondamental de l'intégration, $\forall x \in ]-1;1[$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x g'(t)dt = \int_0^x \dfrac{dt}{1+t^3}$.

Or, comme $(1+X^3) = (1+X)(1-X+X^2)$, on peut décomposer $\dfrac{1}{1+X^3} = \dfrac{a}{(1+X)} + \dfrac{bX+c}{1-X+X^2}$ avec $a, b, c$ des réels. En réduisant au même dénominateur, en identifiant et en résolvant le système, on trouve sans peine $\dfrac{1}{1+X^3} = \dfrac{1}{3(1+X)} + \dfrac{2-X}{3(1-X+X^2)}$. Ainsi, pour $x \in ]-1;1[$, en faisant apparaître des dérivées usuelles, $g(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\dfrac{1}{3(1+t)} + \dfrac{2-t}{3(1-t+t^2)}\right)dt = \dfrac{1}{3}\int_0^x \dfrac{dt}{1+t} - \dfrac{1}{6}\int_0^x \dfrac{(2t-1)dt}{1-t+t^2} + \dfrac{1}{2}\int_0^x \dfrac{dt}{1-t+t^2}$. En mettant sous forme canonique, $\dfrac{1}{1-t+t^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \dfrac{(2/\sqrt{3})}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$, on a l'expression de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles

$$g(x) = \left[\dfrac{\ln(1+t)}{3} - \dfrac{\ln(1-t+t^2)}{6} + \dfrac{\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}\right]_0^x = \dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{(1+x)^2}{1-x+x^2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

car $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$. On peut maintenant revenir à l'expression de $f(x)$.

Si $x = 0$, $f(x) = 1$. Si $x \neq 0$, soit $\sqrt[3]{x}$ l'antécédent de $x$ par la bijection $y \mapsto y^3$ de $]-1;1[$ dans $]-1;1[$, alors $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} g(\sqrt[3]{x}) = \dfrac{1}{6\sqrt[3]{x}} \ln\left(\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{1-\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{x}} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{18\sqrt[3]{x}}$.

Pour aller plus loin, en posant $u_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n x^n}{3n+1}$ et $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ pour $x \in [0;1]$, d'après le critère spécial des séries alternées car $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers $0$, $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{3n+1}$ d'où $||R_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant \dfrac{1}{3n+1}$ ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,[0;1]} = 0$ par encadrement et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[0;1]$. Comme toutes les $u_n$ sont continue sur $[0;1]$, $f$ est elle aussi continue sur $[0;1]$ donc $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left[\dfrac{1}{6\sqrt[3]{x}} \ln\left(\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{1-\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{x}} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{18\sqrt[3]{x}}\right] = \dfrac{\ln(2)}{3} + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

**10.86** **a.** Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1} + 1$ $(R)$. On suppose que cette suite converge vers un réel $\ell$. En passant à la limite dans $(R)$, on trouve $\ell = 0 + 1 = 1$. Soit $b \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_1 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{n+1} + 1$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{n+1}$, on montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - v_n = \dfrac{u_1 - v_1}{n!} = \dfrac{a-b}{n!}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$. Ainsi, comme $v_n = u_n - (u_n - v_n)$, par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1 - 0 = 1$.

Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge pour un réel $a$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge pour toute valeur de $a$ vers $1$.

**b.** On a $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{3}{2} = 1,5$ mais aussi $u_3 = \frac{3}{2}$, $u_4 = \frac{11}{8} = 1,375$. Soit $n \geqslant 1$ tel que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, alors $1 \leqslant u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} + 1 \leqslant \frac{2}{n+1} + 1 \leqslant 2$. Par principe de récurrence, $\forall n \geqslant 1,\ u_n \in [1;2]$ donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Ainsi, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n+1} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 1$ ce qui équivaut au fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

**c.** Soit $n \geqslant 1$, alors $s_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{k!}{(n+1)!} = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{k!}{(n+1)!}\Big) + \frac{(n+1)!}{(n+1)!}$ donc, comme $(n+1)! = (n+1).n!$, on a $s_{n+1} = \frac{s_n}{n+1} + 1$ avec $s_1 = 1$. La question précédente montre que $(s_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 1.

**d.** Comme $s_n \underset{+\infty}{\sim} 1$, le rayon de convergence $R$ de $\sum\limits_{n\geqslant 1} s_n x^n$ est, d'après le cours, le même que celui de $\sum\limits_{n\geqslant 1} x^n$, donc $R = 1$. Pour $x \in ]-1;1[$, posons $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} s_n x^n$. La fonction $f$ est alors dérivable sur $]-1;1[$ et $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)s_{n+1}x^n$. Or $\forall n \geqslant 1,\ (n+1)s_{n+1} = s_n + (n+1)$ donc, en reportant dans l'expression de $f'(x)$, on a $f'(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)s_{n+1}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(s_n + (n+1))x^n = 1 + f(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n$. Comme on sait que $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$, en dérivant, on a $1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ donc $f'(x) = f(x) + \frac{1}{(1-x)^2}$ $(E)$. Les solutions réelles sur $]-1;1[$ de l'équation homogène $(E_0)\ :\ y' = y$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par la méthode de variation de la constante, on trouve $\lambda'(x) = \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}$ et on peut prendre par exemple $\lambda(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}dt}{(1-t)^2}$. Les solutions de $(E)$ sur $]-1;1[$ sont donc toutes les fonctions $y : x \mapsto \Big(\lambda + \int_0^x \frac{e^{-t}dt}{(1-t)^2}\Big)e^x$. Comme $f$ est solution de $(E)$ sur $]-1;1[$ et que $f(0) = 0$, on a $\lambda = 0$ donc, pour tout réel $x \in ]-1;1[$, il vient $f(x) = e^x \int_0^x \frac{e^{-t}dt}{(1-t)^2}$.

**10.87** **a.** Pour $n \geqslant 1$, on partitionne les involutions $\sigma$ de $[\![1;n+2]\!]$ en deux catégories :

- celles pour lesquelles $\sigma(n+2) = n+2$ sont au nombre de $I_{n+1}$ car il n'y a pas de choix à faire pour $\sigma(n+2)$ qu'on impose égal à $n+2$, ensuite $\sigma$ induit alors sur $[\![1;n+1]\!]$ une involution de $[\![1;n+1]\!]$.
- celles telles que $\sigma(n+2) = k \neq n+2$ sont au nombre de $(n+1)I_n$ car pour les choisir de manière bijective, il y a $n+1$ choix pour l'entier $k$ qui est l'image de $n+2$ par $\sigma$ et, une fois ce choix effectué, cela implique que $\sigma(k) = \sigma(\sigma(n+2)) = n+2$ car $\sigma$ doit être une involution, et on a alors $I_n$ choix pour finir de déterminer $\sigma$ qui doit induire sur $[\![1;n+1]\!] \setminus \{k\}$ une involution de cet ensemble à $n$ éléments.

Cette partition implique la relation $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$ pour $n \geqslant 1$ et, comme $I_2 = 2 = 1+1.1 = I_1 + 1.I_0$ avec la convention choisie pour $I_0$, on a bien : $\forall n \geqslant 0,\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

**b.** Comme les involutions sont des permutations et qu'il y a $n!$ permutations de $[\![1;n]\!]$, on en déduit que $I_n \leqslant n!$ d'où $0 \leqslant \frac{I_n}{n!} \leqslant 1$. Comme la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ a pour rayon 1, par comparaison, on a $R \geqslant 1$.

**c.** Les calculs qui suivent sont valides car le rayon de convergence $R$ est supérieur à 1 : pour $x \in ]-1\,;1[$, on a $(1+x)\varphi(x) = \varphi(x) + x\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}x^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n + nI_{n-1}}{n!}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{n!}x^n = \varphi'(x)$.

**d.** On en déduit en intégrant l'équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme normalisée sans second membre, comme une primitive de $x \mapsto 1+x$ est $x \mapsto x + \frac{x^2}{2}$ sur l'intervalle $]-1;1[$, que l'on a

$\forall x \in ]-1\,;1[,\ \varphi(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$ puisque $\varphi(0) = I_0 = 1$ par convention.

**e.** Alors $\forall x \in ]-1;1[,\ \varphi(x) = \left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{1}{i!}x^i\right) \times \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{1}{j!2^j}x^{2j}\right)$. Ces deux séries ont pour rayon $+\infty$ donc on peut effectuer le produit de CAUCHY et obtenir $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{n!}{i!j!2^j}\right)x^n$. En identifiant (par unicité) les coefficients entre les deux expressions de $S(x)$ sous forme de série entière, $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{I_n}{n!} = \sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{1}{i!j!2^j}$ donc $I_n = \sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{n!}{i!j!2^j}$. Puisque $2j \leqslant n$ et $i = n-2j$, on a la formule $I_n = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{n!}{(n-2j)!j!2^j}$.

Pour expliquer cette relation de manière combinatoire, on peut constater qu'une involution $\sigma$ de $[\![1;n]\!]$ est une application telle que pour tout entier $x$ entre 1 et $n$, on a deux choix :

- soit $\sigma(x) = x$ et $x$ est appelé un point fixe de $\sigma$.
- soit $\sigma(x) = y \neq x$ et alors, comme $\sigma^2 = \mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$, on a forcément $\sigma(y) = x$.

Ainsi, si $\sigma \in A_n$, le nombre $f$ de points fixes de $\sigma$ a la même parité que $n$ de sorte qu'il existe $2j$ entiers de $[\![1;n]\!]$ qui ne sont pas fixes par $\sigma$ avec $f = n-2j$ avec $0 \leqslant j \leqslant \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$. On peut donc écrire $A_n = \bigcup\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,j}$ où $A_{n,j} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma \text{ admet } f = n-2j \text{ points fixes}\}$.

Pour construire une involution $\sigma$ de $A_{n,j}$ :

- on choisit les $n-2j$ éléments de $[\![1;n]\!]$ qui sont fixes par $\sigma$ : $\dbinom{n}{n-2j} = \dbinom{n}{2j}$ choix.
- on choisit l'image $y$ du plus petit élément $x$ qui reste : $(2j-1)$ choix (et alors $\sigma(x) = y$ et $\sigma(y) = x$).
- on choisit l'image $t$ du plus petit élément $z$ qui reste : $(2j-3)$ choix etc...

Ainsi $\mathrm{card}\,(A_{n,j}) = \dbinom{n}{2j} \times (2j-1) \times (2j-3) \times \cdots \times 3 \times 1 = \dfrac{n!}{(n-2j)!(2j)!} \times \dfrac{(2j)!}{2^j j!}$ en multipliant en haut et en bas par les termes pairs qui manquent. On retrouve bien $I_n = \mathrm{card}\,(A_n) = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathrm{card}\,(A_{n,j}) = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{n!}{(n-2j)!2^j j!}$.

**10.88** **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto \dfrac{1}{x+e^t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ si $x > -1$ et sur $[0;\ln(-x)[\cup]\ln(-x);+\infty[$ si $x \leqslant -1$. Comme $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{-t}$, la fonction $f_x$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si $x > -1$. De plus, $f_{-1}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_{-1}(t) = \dfrac{1}{e^t - 1} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t}$ donc $f(-1)$ n'existe pas par comparaison à une intégrale de RIEMANN. Comme $f$ est définie sur $]-1;1[$ et pas sur $[-1;1]$, on en déduit que le réel $\alpha > 0$ maximal tel que $f$ soit définie sur $]-\alpha;\alpha[$ est le réel $\alpha = 1$.

**b.** Si $x \in ]-1;1[$, $\forall t \geqslant 0$, $f_x(t) = e^{-t} \times \dfrac{1}{1+xe^{-t}} = e^{-t}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n e^{-nt} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ si on définit $u_n(t) = (-1)^n x^n e^{-(n+1)t}$. La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ d'après ce qui précède. Les $u_n$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ car $n+1 > 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n| = \dfrac{|x|^n}{n+1}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{|x|^n}{n+1}$ converge car $\dfrac{|x|^n}{n+1} \underset{+\infty}{=} o(|x|^n)$ et que la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$. Ainsi, si $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ car on reconnaît le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $]-1;1[$. Bien sûr, $f(0) = 1$.

**10.89** **a.** La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^{1/2}}$ donc $f$ est intégrable sur $]0;1]$ par RIEMANN ($\frac{1}{2} < 1$). De plus, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3/2}}$ donc $f$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ par RIEMANN ($\frac{3}{2} > 1$). Ainsi, $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

**b.** Dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$, on pose $x = \dfrac{1}{t} = \varphi(t)$ avec $\varphi$ strictement décroissante, de classe $C^1$ et bijective de $]0;1]$ dans $[1;+\infty[$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^0 f\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big(-\frac{1}{t^2}\Big)dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}} = \int_0^1 f(t)dt$. Par CHASLES, on a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$.

**c.** D'après le cours que $\forall x \in ]-1;1[$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ avec $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.
Si $u \in ]-1;1[$, $u^4 \in [0;1[\subset]-1;1[$ donc $\forall u \in [0;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+u^4}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)\cdots(-n+(1/2))}{n!} u^{4n}$ avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Classiquement, on factorise les 2, on multiplie au numérateur et au dénominateur par les termes $2.4.\cdots.(2n)$, ce qui donne $\dbinom{-1/2}{n} = \dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et, enfin, $\dfrac{1}{\sqrt{1+u^4}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!u^{4n}}{2^{2n}(n!)^2}$.

**d.** Pour $u \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n(u) = \dfrac{(2n)!u^{4n}}{2^{2n}(n!)^2}$. La suite $(v_k(u))_{k\geqslant 0}$ est décroissante car si $u \in ]0;1]$, on a $\dfrac{v_{k+1}(u)}{v_k(u)} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}u^4 = \dfrac{2n+1}{2n+2}u^4 < 1$ et $v_n(0) = \delta_{n,0}$. La suite $(v_k(u))_{k\geqslant 0}$ tend aussi vers $0$ si $u \in [0;1[$ puisque la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k v_k(u)$ converge d'après **c.**. De plus, si $u = 1$, par STIRLING, on a $v_n(1) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{2n}}{2^{2n}(2\pi n)e^{2n}n^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n(1) = 0$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n v_n(1)$ converge par le critère spécial des séries alternées. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n v_n$ converge donc simplement sur $[0;1]$.

Posons maintenant $R_n(u) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k(u)$ pour $u \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après le critère spécial des séries alternées, $|R_n(u)| \leqslant v_{n+1}(u) \leqslant v_{n+1}(1)$. Ainsi, $R_n$ est bornée sur $[0;1]$ et $||R_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant v_{n+1}(1)$.

**e.** On effectue le changement de variable $x = u^2 = \varphi(u)$ avec $\varphi$ strictement croissante, de classe $C^1$ et bijective de $[0;1]$ dans $[0;1]$, et on a $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^6+u^2}}(2u)du = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}du$.
Comme $||R_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant v_{n+1}(1)$ et d'après **d.**, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,[0;1]} = 0$ donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n v_n$ converge uniformément sur le segment $[0;1]$ donc, comme toutes les $v_n$ sont continues sur $[0;1]$, la fonction $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n v_n$ est continue sur $[0;1]$ (on n'en a pas besoin ici). D'après le cours, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}du = \int_0^1 S(u)du = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_0^1 (-1)^n v_n(u)du\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(4n+1)}$ car $\displaystyle\int_0^1 u^{4n}du = \frac{1}{4n+1}$.
D'après **b.**, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}du = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(4n+1)}$.

On aurait pu montrer cette relation par le théorème d'intégration terme à terme !

**10.90** **a.** $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $]-\infty;1[$ en la prolongeant par continuité en $0$ avec $f(0) = -1$ puisque $\ln(1-t) \underset{0}{\sim} -t$. $F$ est donc la primitive de $-f$ qui s'annule en $0$ donc $F$ est au moins définie sur $]-\infty;1[$. Comme $f$ n'est pas définie sur $[1;+\infty[$, le domaine de définition $D$ de $F$ est inclus dans $]-\infty;1]$.

Si $x = 1$, $f(t) \underset{1^-}{\sim} \ln(1-t) \underset{1^-}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc $f$ est intégrable sur $[0;1[$ et $F(1)$ existe par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Par conséquent, le domaine définition de $F$ est $D = ]-\infty;1]$.

**b.** D'après le cours, $\forall t \in ]-1;1[$, $\ln(1-t) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n}$ donc $-f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^{n-1}}{n}$ (marche aussi si $t = 0$). Pour $x \in ]-1;1[$, en intégrant terme à terme sur le segment $\widetilde{[0;x]}$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, il vient $F(x) = \displaystyle\int_0^x (-f(t))dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = S(x)$. Par définition de la convergence d'une intégrale, $F(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} F(x)$. Par continuité de $F$ en $-1$, on a aussi $F(-1) = \lim\limits_{x \to -1^+} F(x)$. En posant $u_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2}$, on a $||u_n||_{\infty,[-1;1]} = \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[-1;1]$ et, puisque toutes les $u_n$ sont continues sur $[-1;1]$, $S$ est continue sur $[-1;1]$ donc $F(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} S(x) = S(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $F(-1) = \lim\limits_{x \to -1^+} S(x) = S(-1) = -\dfrac{\pi^2}{12}$ (classique en séparant les termes d'indices pairs et impairs).

On a bien $\forall x \in [-1;1]$, $F(x) = S(x)$.

**c.** Soit $G : [0;1[ \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$ si $x \neq 0$ et $G(0) = 0$. Alors, par opérations et comme $\ln(x)\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées, la fonction $G$ est continue sur $[0;1[$ et dérivable sur $]0;1[$. De plus, $F$ est dérivable sur $]0;1[$ avec $F'(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ donc, pour $x \in ]0;1[$,

$$(F(x) + F(1-x) - G(x))' = F'(x) - F'(1-x) - G'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-(1-x))}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$$

avec l'abus de notation usuel. Ainsi, la fonction $x \mapsto F(x) + F(1-x) - G(x)$ est constante sur l'intervalle $]0;1[$, et en utilisant sa continuité en $0$, elle vaut donc $F(0) + F(1) - G(0) = F(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

On a donc la relation $\forall x \in ]0;1[$, $F(x) + F(1-x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$.

**10.91** Pour tout entier naturel $n$, posons $u_n = \dfrac{2n^2+5n+3}{2^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{2^{n-1}} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc, par comparaison à une série de RIEMANN, comme $2 > 1$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

Pour calculer la somme de cette série numérique, posons $a_n = 2n^2 + 5n + 3$ et considérons la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$. Toujours par croissances comparées, $(a_n x^n)_{n \geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$ donc, par définition, le rayon de cette série entière vaut $R = 1$. Pour $x \in ]-1;1[$, comme $a_n = 2(n+1)(n+2) - (n+1)$, on a $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)x^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$ (les deux séries convergent puisque les deux rayons valent encore $1$). On reconnaît les dérivées de la série géométrique, $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)x^n = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ de sorte que $f(x) = \dfrac{4}{(1-x)^3} - \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{3+x}{(1-x)^3}$. Ainsi, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2n^2+5n+3}{2^n} = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3+(1/2)}{(1-(1/2))^3} = 28$.

**10.92** **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée, $\dfrac{a_n}{n!}x^n \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{n!}x^n = 0$ par croissances comparées. Ainsi, $\left(\dfrac{a_n}{n!}x^n\right)_{n \geqslant 0}$ est bornée quel que soit $x$ donc le rayon de convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{a_n}{n!}x^n$ vaut $+\infty$.

**b.** Les trois suites suivantes sont bien bornées :

- Si $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{x^n}{2^n}$ converge si et seulement si $|x| < 2$ donc $R = 2$ et la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n$

converge car elle est de raison $\frac{1}{2} \in ]-1;1[$.

- Si $a_n = 1$, $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ donc $R = 1$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge grossièrement.
- Si $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(n+1)^2}$ converge si et seulement si $|x| \leqslant 1$ donc $R = 1$ et la série de RIEMANN $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

**c.** Pour $x \in [-1;1]$, la suite $(a_n x^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée car $|a_n x^n| = |a_n||x|^n \leqslant |a_n|$ et que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est elle-même bornée. Par définition du rayon de convergence, $R \geqslant 1$.

**d.** Soit $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_k(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées donc $f_k$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN donc $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}dx$ converge. On pose $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}dx$ pour $k \in \mathbb{N}$. Pour $k \geqslant 1$, les fonctions $u : x \mapsto x^k$ et $v : x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0 = u(0)v(0)$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, on a $I_k = \int_0^{+\infty} kx^{k-1}e^{-x}dx = kI_{k-1}$. Par une récurrence simple, comme $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ I_k = k!$. On pouvait aussi dire que $I_k = \int_0^{+\infty} x^{k+1-1}e^{-x}dx = \Gamma(k+1) = (k+1-1)! = k!$ d'après le cours mais le calcul est attendu.

**e.** Soit $t > 1$, d'après **a.**, $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $e^{-xt}f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}x^n e^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ en notant $u_n(x) = \frac{a_n}{n!}x^n e^{-xt}$.

($H_1$) La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement vers $x \mapsto e^{-xt}f(x)$ sur $\mathbb{R}_+$ (on en vient).

($H_2$) Les $u_n$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ car $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées.

($H_3$) $x \mapsto e^{-xt}f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ puisque $f$ l'est en tant que somme d'une série entière de rayon $+\infty$.

($H_4$) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} |u_n(x)|dx = \int_0^{+\infty} \frac{|a_n|}{n!}x^n e^{-xt}dx$ et on pose $u = xt$ (facile car $t > 0$) pour avoir $\int_0^{+\infty} |u_n(x)|dx = \frac{|a_n|}{n!t^{n+1}}\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}du = \frac{|a_n|}{t^{n+1}}$ d'après **d.** et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{|a_n|}{t^{n+1}}$ converge d'après **c.** car le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$ et que $\frac{1}{t} \in ]0;1[$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(x)dx$ or, avec le même calcul que ci-dessus, on a $\int_0^{+\infty} u_n(x)dx = \frac{a_n}{t^{n+1}}$ donc $\forall t > 1,\ g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{t^{n+1}} = \frac{1}{t}S\left(\frac{1}{t}\right)$.

**10.93** **a.** La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations et elle se prolonge par continuité en $0$ en posant $f(0) = 1$ car $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. Ainsi, $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ ce qui montre, par le théorème fondamental de l'intégration, que $F$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de $f$ qui s'annule en $0$. De plus, on sait que $\forall t \in \mathbb{R},\ \sin(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ f(t) = \frac{\sin(t)}{t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$ et cette formule marche aussi pour $t = 0$ car $1 = \frac{(-1)^0 t^{2.0}}{(2.0+1)!}$. Comme le rayon de convergence de $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$ vaut $R = +\infty$, on peut intégrer terme à terme sur $\widetilde{[0;x]}$ qui est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence pour avoir $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}\right)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1).(2k+1)!}$.

**b.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto \exp(-xe^{-it})$ est continue sur le segment $J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc l'intégrale $I(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})dt$ existe. On sait que $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ donc, en prenant $z = -xe^{-it}$, on obtient $\forall t \in J,\ \exp(-xe^{-it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $h_n : t \mapsto \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}$.
Comme $\forall t \in J,\ |h_n(t)| = \frac{|x|^n}{n!}$, on a $||h_n||_{\infty,J} = \frac{|x|^n}{n!}$ et la série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0} \frac{|x|^n}{n!}$ converge donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} h_n$ converge normalement vers $h$ sur le segment $J$. Comme toutes les $h_n$ et $h$ sont continues sur $J$, le théorème d'intégration terme à terme sur segment montre que $I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!} dt$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons l'intégrale $L_n = \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!} dt$. On a le cas particulier $L_0 = \int_0^{\pi/2} 1.dt = \frac{\pi}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient $L_n = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \int_0^{\pi/2} e^{-int}dt = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{\pi/2} = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \times \frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}$.
Comme on sait que $\mathrm{Re}\,(I(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\,(L_n)$ et que $\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}\right) = 0$ si $n \geqslant 2$ est pair et que l'on a $\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-i(2k+1)\pi/2} - 1}{-i(2k+1)}\right) = \frac{(-1)^k}{2k+1}$ si $n = 2k+1 \geqslant 1$ est impair, il ne reste dans la formule ci-dessus que $\mathrm{Re}\,(I(x)) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \times \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1).(2k+1)!}$.
**c.** Par inégalité triangulaire sur les intégrales, $|I(x)| = \left|\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})dt\right| \leqslant \int_0^{\pi/2} |\exp(-xe^{-it})|dt$. Or $\exp(-xe^{-it}) = e^{-x\cos(t)} e^{ix\sin(t)}$ donc $|\exp(-xe^{-it})| = e^{-x\cos(t)}$.
Méthode 1 : la fonction $\cos$ est concave sur $J$ car $\cos'' = -\cos \leqslant 0$ sur $J$ donc $\forall t \in J,\ \cos(t) \geqslant 1 - \frac{2t}{\pi}$. Ainsi, $e^{-x\cos(t)} \leqslant e^{-x} e^{2xt/\pi}$ donc $\forall x > 0,\ \int_0^{\pi/2} |\exp(-xe^{-it})|dt \leqslant e^{-x} \int_0^{\pi/2} e^{2xt/\pi}dt$. On en déduit donc que $|I(x)| \leqslant e^{-x}\left[\frac{\pi}{2x} e^{2xt/\pi}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi e^{-x}(e^x - 1)}{2x} = \frac{\pi(1 - e^{-x})}{2x}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(1 - e^{-x})}{2x} = 0$, par encadrement, on obtient la limite $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})dt = 0$.
Méthode 2 : soit $g : \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \exp(-xe^{-it})$ de sorte que $I(x) = \int_0^{\pi/2} g(x,t)dt$.

- $(H_1)$ pour tout $t \in J$, on a $\lim_{x\to+\infty} g(x,t) = 0 = a(t)$ car $\cos(t) > 0$.
- $(H_2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $h_x : t \mapsto g(x,t)$ et $a$ sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.
- $(H_3)$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $|g(x,t)| \leqslant 1 = \varphi(t)$ et $\varphi$ est continue et intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

D'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a $\lim_{x\to+\infty} I(x) = \int_0^{\pi/2} a(t)dt = 0$.
D'après les questions précédentes, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Re}\,(I(x)) = \frac{\pi}{2} - F(x)$. Comme $\lim_{x\to+\infty} I(x) = 0$, on a aussi $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Re}\,(I(x)) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - F(x)\right) = 0$. Ceci assure l'existence d'une limite finie de $F$ en $+\infty$ et sa valeur $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$ qu'on note $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ (intégrale de DIRICHLET).

**10.94** **a.** Si, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = (-1)^n$, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vaut $R = 1$ et sa fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ est majorée par 1 sur $[0; 1[$.

**b.** L'hypothèse se traduit par $a_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc, pour tout réel $r \in ]0;1]$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi donc, par définition, le rayon de convergence $R$ de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vérifie donc $R \geqslant 1$. Ainsi, la fonction somme $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $]-1;1[$ au minimum.

**c.** Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|na_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, si $n \geqslant n_0$ et $x \in ]0;1[$, il vient $\left|f(x)\right| = \left|\sum\limits_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| x^n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ par inégalité triangulaire. On en déduit la majoration $\left|f(x)\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n - \frac{\varepsilon}{2} \sum\limits_{n=1}^{n_0-1} \frac{x^n}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. De plus, comme $\varphi : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n - \frac{\varepsilon}{2} \sum\limits_{n=1}^{n_0-1} \frac{x^n}{n}$ est polynomiale donc continue en 1, elle est bornée et on a $\varphi(x) \underset{1}{=} o(\ln(1-x))$ car $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [1-\alpha;1[$, $|\varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} |\ln(1-x)|$. En combinant ces deux renseignements, $\forall x \in [1-\alpha;1[$, $\left|f(x)\right| \leqslant \varepsilon |\ln(1-x)|$ car on sait que $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ si $x \in ]-1;1[$. Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in [1-\alpha;1[$, $\left|f(x)\right| \leqslant \varepsilon |\ln(1-x)|$. Ceci justifie bien que $f(x) \underset{1^-}{=} o(\ln(1-x))$.

**d.** Avec l'exemple de la question **a.**, si on pose $b_n = (-1)^n$, la fonction somme $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est bien définie sur $]-1;1[$ et vérifie bien $g(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$ car $g$ est bornée sur $[0;1[$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$. Pourtant, la suite $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. La réciproque espérée est donc fausse.

Même si on impose que tous les $b_n$ sont positifs, il suffit de prendre $b_n = \frac{1}{n}$ si $n$ est une puissance de 2 et $b_n = 0$ sinon. Alors, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^{2^n}}{2^n}$ est de rayon de convergence 1 car $\left(\frac{x^{2^n}}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$ par croissances comparées. En notant $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{2^n}$, on a $\forall x \in [-1;1]$, $|g(x)| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ donc $g$ est bornée sur $[-1;1]$ et $g(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$ même si $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 puisque $2^n b_{2^n} = 1$.

Conclusion : si, au voisinage de $1^-$, $f(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$, on ne peut pas conclure que $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

**10.95** **a.** Comme $f$ est de classe $C^\infty$ sur $I$, $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt$ par la formule de Taylor reste intégral. On constate que si $x \in [0;A[$, comme $\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \geqslant 0$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leqslant f(x)$ donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées donc elle est convergente et on peut en déduire que son terme général tend vers 0, ce qui montre que $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$ (L). Traitons maintenant deux cas :

<u>Si $x \in ]-A;0]$</u>, $\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt\right| = \int_x^0 \frac{(t-x)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt$ car $f^{n+1}(t) \geqslant 0$ par hypothèse. Comme $f^{(n+2)} \geqslant 0$, $f^{(n+1)}$ est croissante donc $\forall t \in [x;0]$, $f^{(n+1)}(t) \leqslant f^{(n+1)}(0)$ ce qui montre que $\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt\right| \leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n f^{(n+1)}(0)}{n!} dt = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!} \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}\right]_x^0 = \frac{(-x)^{n+1} f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$. Mais comme $-x \geqslant 0$, d'après (L), on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (-x)^k = 0$ donc, par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt = 0$ et, d'après le cours, $f$ est égale à sa série de Taylor sur $]-A;0[$.

Si $x \in ]0;A[$, on prend $r$ tel que $x < r < A$ et, en posant $t = xu = \varphi(u)$ avec $\varphi$ $C^1$ sur le segment $[0;1]$, on a $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}dt = \int_0^1 \frac{(x-xu)^n f^{(n+1)}(xu)}{n!}x du = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)du$.

Comme $f^{(n+1)}$ est croissante car $f^{(n+2)} \geqslant 0$, il vient $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}dt \leqslant \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru)du$ car $\forall u \in [0;1]$, $f^{(n+1)}(xu) \leqslant f^{(n+1)}(ru)$. Avec le même calcul qu'avant avec $r$ à la place de $x$, on a $\displaystyle\int_0^r \frac{(r-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}dt = \frac{r^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru)du$ donc on obtient la majoration suivante : $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}dt \leqslant \frac{x^{n+1}}{r^{n+1}}\int_0^r \frac{(r-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}dt = \frac{x^{n+1}}{r^{n+1}}\left(f(r) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}r^k\right) \leqslant \frac{x^{n+1}f(r)}{r^{n+1}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{n+1}}{r^{n+1}} = 0$ car $0 < x < r$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}dt = 0$ ce qui garantit que $f$ est égale à sa série de TAYLOR sur $]0;A[$.

Avec ces deux cas, $f$ est égale à sa série de TAYLOR sur $]-A;A[$, donc $f$ est développable en série entière sur $]-A;A[$ : on dit que $f$ est absolument monotone sur $]-A;A[$ quand $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geqslant 0$ sur $]-A;A[$.

**b** Comme $f$ est de classe $C^\infty$ sur $I$ et $\exp$ l'est sur $\mathbb{R}$, par composition, $g$ est de classe $C^\infty$ sur $I$.

Initialisation : $g = e^f$ est positive sur $I$, $g' = f' \times e^f$ donc $g'$ est positive sur $I$ car $f'$ l'est et $g'' = (f''+(f')^2)\times e^f$ est aussi positive sur $I$ car $f''$ et $(f')^2$ le sont.

Hérédité : soit $n \geqslant 1$ tel que la fonction $g^{(k)}$ est positive sur $I$ pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$, alors, par la formule de LEIBNIZ, on a $g^{(n+1)} = (g')^{(n)} = (f' \times e^f)^{(n)} = (f' \times g)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f')^{(k)}g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}g^{(n-k)}$.

Or, par hypothèse sur $f$ et hypothèse de récurrence, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, les fonctions $f^{(k+1)}$ et $g^{(n-k)}$ sont positives sur $I$, donc par produit, multiplication par $\displaystyle\binom{n}{k} > 0$ et somme, la fonction $g^{(n+1)}$ est positive sur $I$.

On a bien établi par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}$ est positive sur $I$.

Ainsi, les hypothèses de la question **a.** sont vérifiées pour $g$ qui est donc développable en série entière sur $I$.

**c.** Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) = P_0(\tan(x))$ et $\tan'(x) = 1+\tan^2(x) = P_1(\tan(x))$ avec $P_0 = X$ et $P_1 = X^2+1$. Si on suppose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, que $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$ avec $P_n$ un polynôme de degré $n+1$ dont les coefficients sont des entiers naturels, alors $\tan^{(n+1)}(x) = \tan'(x)P_n'(\tan(x)) = P_{n+1}(\tan(x))$ avec $P_{n+1} = (1+X^2)P_n'(X)$ qui est bien de degré $n+2$ et de coefficients entiers naturels car si $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}a_kX^k$, on a $P_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}ka_kX^{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1}ka_kX^{k+1} = \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}X^k + \sum_{k=1}^{n+2}(k-1)a_{k-1}X^k$ ce qui donne l'expression $P_{n+1} = (n+1)a_nX^{n+1} + na_{n-1}X^n + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big((k+1)a_{k+1}+(k-1)a_{k-1}\big)X^k\right) + a_1$ qui est bien à coefficients entiers naturels. On conclut que principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$ avec $P_n \in \mathbb{N}[X]$ et $\deg(P_n) = n+1$.

Comme $\tan(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et que $P_n \in \mathbb{N}[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)) \geqslant 0$ donc, d'après la question **a.**, la fonction $\tan$ est développable en série entière sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et on peut écrire $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\tan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. Comme $\tan$ est impaire, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right]$, $\tan(x) = -\tan(-x)$

donc $\tan(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}(-x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. Cette relation est donc vraie pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan$ est bien développable en série entière sur $\left] -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

**10.96** **a.** Comme $X^2 - 2\text{ch}(\alpha)X + 1 = X^2 - (e^\alpha + e^{-\alpha})X + 1 = (X - e^\alpha)(X - e^{-\alpha})$, la quantité $x^2 - 2\text{ch}(\alpha)x + 1$ est donc strictement positive hors du segment $[e^{-\alpha}; e^\alpha]$ reliant les deux racines. Par conséquent, l'ensemble de définition de $f_\alpha$ est $D = ]-\infty; e^{-\alpha}[\cup]e^\alpha; +\infty[$.

**b.** La fonction $f_\alpha$ est de classe $C^1$ sur $D$ par opérations. Comme $f_\alpha(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2\text{ch}(\alpha)x + 1)$ pour $x \in D$, on a $f'_\alpha(x) = \frac{x - \text{ch}(\alpha)}{(x - e^\alpha)(x - e^{-\alpha})} = \frac{(x/2) - (e^\alpha/2) + (x/2) - (e^{-\alpha}/2)}{(x - e^\alpha)(x - e^{-\alpha})} = -\frac{1}{2(e^\alpha - x)} - \frac{1}{2(e^{-\alpha} - x)}$ donc $f'_\alpha(x) = -\frac{e^{-\alpha}}{2}.\frac{1}{1 - e^{-\alpha}x} - \frac{e^\alpha}{2}.\frac{1}{1 - e^\alpha x}$. Pour tout réel $x \in ]-e^{-\alpha}; e^{-\alpha}[$, $|e^{-\alpha}x| < 1$ et $|e^\alpha x| < 1$ donc on a $f'_\alpha(x) = -\frac{e^{-\alpha}}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-\alpha}x)^n - \frac{e^\alpha}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty}(e^\alpha x)^n$ grâce aux séries géométriques. On a donc la relation suivante, $\forall x \in ]-e^{-\alpha}; e^{-\alpha}[$, $f'_\alpha(x) = -\frac{e^{-\alpha}}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-\alpha}x)^n - \frac{e^\alpha}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty}(e^\alpha x)^n$ qu'on peut regrouper et simplifier en $f'_\alpha(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{(n+1)\alpha} + e^{-(n+1)\alpha}}{2}x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\text{ch}((n+1)\alpha)x^n$. Les fonctions $f'_\alpha$ et $f_\alpha$ sont développables en série entière sur $]-e^{-\alpha}; e^{-\alpha}[$. En intégrant à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence, comme $f_\alpha(0) = 0$, on a $\forall x \in ]-e^{-\alpha}; e^{-\alpha}[$, $f_\alpha(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\text{ch}((n+1)\alpha)\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

**10.97** **a.** Comme $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est continue. Ainsi, par composition, $x \mapsto f(ax)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f'$ aussi ce qui montre que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Si on suppose que $f$ est de classe $C^n$ sur $\mathbb{R}$ pour un entier $n \geqslant 1$, alors $x \mapsto f(ax)$ est aussi de classe $C^n$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'$ l'est encore et $f$ est donc de classe $C^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. Par principe de récurrence, $f$ est de classe $C^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ donc $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = f(ax)$ donc $f''(x) = af'(ax) = af(a^2x)$. On continue, $f'''(x) = a^3f'(a^2x) = a^3f(a^3x)$ et $f^{(4)}(x) = a^6f'(a^3x) = a^6f(a^4x)$. Supposons, pour $n \in \mathbb{N}$, qu'on ait $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}}f(a^nx)$. Alors, en dérivant cette relation, on a $f^{(n+1)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} \times a^nf'(a^nx) = a^{\frac{n(n+1)}{2}}f(a^{n+1}x)$. Comme on a $f^{(0)}(x) = f(x) = a^{\frac{0(0-1)}{2}}f(a^0x)$, on a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}}f(a^nx)$.

**b.** Pour $b > 0$, $f$ étant continue sur le segment $[-b; b]$, elle y est bornée et on peut poser $M_b = ||f||_{\infty,[-b;b]}$. Pour $x \in [-b; b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^nf^{(n+1)}(t)}{n!}dt$. Pour $t \in \widetilde{[0;x]}$, comme $f^{(n+1)}(t) = a^{\frac{n(n+1)}{2}}f(a^{n+1}t)$ et que $a^nt \in \widetilde{[0;x]} \subset [-b; b]$ car $|a| < 1$, on a $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant a^{\frac{n(n+1)}{2}}M_b$.
Par inégalité triangulaire, on a $\left|\int_0^x \frac{(x-t)^nf^{(n+1)}(t)}{n!}dt\right| \leqslant \left|\int_0^x \frac{|x|^na^{\frac{n(n+1)}{2}}M_b}{n!}\right| = \frac{|x|^{n+1}a^{\frac{n(n+1)}{2}}M_b}{n!}$ donc, comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{n!} = \lim_{n\to+\infty}a^{\frac{n(n+1)}{2}} = 0$ car $|a| < 1$, on a $\forall x \in [-b; b]$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$. Mais ceci étant vrai pour tout $b > 0$ et comme $f^{(k)}(0) = a^{\frac{k(k-1)}{2}}f(0)$, $f$ est bien égale à sa série de TAYLOR sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k}{k!}$.

**c.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et la fonction $g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_\lambda(x) = \lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k}{k!}$. Si on pose $a_k = \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k!} > 0$, on a $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{a^k}{k+1}$ donc, comme $0 < a < 1$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = 0$ donc, par D'ALEMBERT, le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k$ vaut $R = +\infty$ ce qui justifie que la fonction $g_\lambda$ est bien définie et de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R},\ g'_\lambda(x) = \lambda \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k}{k!} = \lambda \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} (ax)^k}{k!} = g_\lambda(ax)$. Avec ce qui précède, les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = g(ax)$ sont les fonctions proportionnelles à $g_1 : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{k!}$, elles constituent donc la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(g_1)$.

**10.98** **a.** Posons $a_n = \dbinom{2n}{n} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 4$. D'après D'ALEMBERT, le rayon de convergence $R$ de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dbinom{2n}{n} x^n$ vaut $R = \dfrac{1}{4}$.

**b.** Si $x = \dfrac{1}{4}$, $a_n x^n = \dbinom{2n}{n} x^n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n} e^{2n}}{4^n (2\pi n) n^{2n} e^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ avec l'équivalent de STIRLING donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ diverge.

Si $x = -\dfrac{1}{4}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est alternée et $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \dfrac{2(2n+1)}{4(n+1)} = \dfrac{4n+2}{4n+4} < 1$ d'après **a.** donc la suite $(|a_n x^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers $0$ puisqu'on vient de voir que $|a_n x^n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$ converge.

L'ensemble de définition de $f$ est donc $\left[-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right[$.

**c.** On a vu en question **a.** que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$. En multipliant par $x^n$ et en sommant, on a donc $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2(2n+1)a_n x^n = 4x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on reconnaît, puisqu'on est dans l'intervalle ouvert de convergence, $f'(x) = 4xf'(x) + 2f(x)$ ou $(1-4x)f'(x) = 2f(x)$ donc $f$ est solution sur $\left]-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right[$ de $(E)\ :\ (1-4x)y' - 2y = 0$.

**d.** On résout classiquement cette équation différentielle linéaire homogène normalisée $(E)$ d'ordre 1 et, comme une primitive de $a : x \mapsto \dfrac{2}{1-4x}$ est $A : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln(1-4x)$ et puisque $f(0) = a_0 = 1$, on a $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right[$, $f(x) = e^{\frac{-\ln(1-4x)}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

**10.99** **a.** On calcule $a_2 = a_1 + a_0 = 2$, $a_3 = a_2 + 2a_1 = 4$, $a_4 = a_3 + 3a_2 = 10$, $a_5 = a_4 + 4a_3 = 26$ et on peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant a_n \leqslant 2(n-1)!$. On vient de faire l'initialisation.

Soit $n \geqslant 1$ tel que $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 2n!$ et $0 \leqslant a_n \leqslant 2(n-1)!$, comme $a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$, on a $0 + (n+1).0 \leqslant a_{n+2} \leqslant 2n! + 2(n+1)(n-1)! = 2(n-1)!(n+n+1) \leqslant 2(n-1)!(n(n+1)) = 2(n+1)!$ car $n+1 \leqslant n^2$ puisque $n \geqslant 1$. Par principe de récurrence double, on a $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant a_n \leqslant 2(n-1)!$. Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{a_n}{n!} \leqslant \dfrac{2}{n}$ donc, par encadrement, $\left(\dfrac{a_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$.

**b.** Comme la suite $\left(\dfrac{a_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $0$, elle est bornée, donc par définition du rayon de convergence d'une série entière, on a $R \geqslant 1$.

**c.** Les dérivations qui suivent sont valides sur l'intervalle ouvert de convergence. Pour $x \in ]-R; R[$, on a $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{na_n}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}x^n$ et $f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{na_{n+1}}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+2}}{n!}x^n$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+2}x^n}{n!} = \frac{a_{n+1}x^n}{n!} + \frac{(n+1)a_nx^n}{n!}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+2}x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)a_nx^n}{n!}$ en sommant ce qui revient à $f''(x) = f'(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{na_nx^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_nx^n}{n!} = f'(x) + xf'(x) + f(x)$. Par conséquent, $f$ est solution sur $]-R;R[$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' - (1+x)y' - y = 0$.

**d.** D'après la question précédente, on a $f''(x)-(1+x)f'(x)-f(x) = (f'(x)-(1+x)f(x))' = 0$. Comme $]-R;R[$ est un intervalle et que $f'(0) - (1+0)f(0) = a_1 - a_0 = 0$, on a donc $\forall x \in ]-R;R[,\ f'(x) - (1+x)f(x) = 0$. On en déduit en intégrant cette équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme normalisée sans second membre, comme une primitive de $x \mapsto 1+x$ est $x \mapsto x + \frac{x^2}{2}$ sur l'intervalle $]-R;R[$, que l'on a $\forall x \in ]-R;R[,\ f(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$ puisque $f(0) = a_0 = 1$.

Alors $\forall x \in ]-R;R[,\ f(x) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}x^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!2^j}x^{2j}\right)$. Ces deux séries ont pour rayon $+\infty$ donc on peut effectuer le produit de CAUCHY et obtenir $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i!j!2^j}\Big)x^n$. En identifiant (par unicité) les coefficients entre les deux expressions de $f(x)$ sous forme de série entière, $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{a_n}{n!} = \sum_{i+2j=n} \frac{1}{i!j!2^j}$ donc $a_n = \sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i!j!2^j}$. Puisque $2j \leqslant n$ et $i = n-2j$, on a la formule $a_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2j)!j!2^j}$.

Pour information : on considère l'ensemble $I_n$ des permutations $\sigma$ de $[\![1;n]\!]$ qui sont des involutions, c'est-à-dire qui vérifient $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$ ; et on pose $b_n = \mathrm{card}\,(I_n)$. Alors, pour $n \geqslant 1$, on partitionne les involutions $\sigma$ de $[\![1;n+2]\!]$ en deux catégories :

- celles pour lesquelles $\sigma(n+2) = n+2$ sont au nombre de $b_{n+1}$ car il n'y a pas de choix à faire pour $\sigma(n+2)$ qu'on impose égal à $n+2$, ensuite $\sigma$ induit alors sur $[\![1;n+1]\!]$ une involution de $[\![1;n+1]\!]$.
- celles telles que $\sigma(n+2) = k \neq n+2$ sont au nombre de $(n+1)b_n$ car pour les choisir de manière bijective, il y a $n+1$ choix pour l'entier $k$ qui est l'image de $n+2$ par $\sigma$ et, une fois ce choix effectué, cela implique que $\sigma(k) = \sigma(\sigma(n+2)) = n+2$ car $\sigma$ doit être une involution, et on a alors $b_n$ choix pour finir de déterminer $\sigma$ qui doit induire sur $[\![1;n+1]\!] \setminus \{k\}$ une involution de cet ensemble.

Cette partition implique la relation $b_{n+2} = b_{n+1}+(n+1)b_n$ pour $n \geqslant 1$ et, comme $b_2 = 2 = 1+1.1 = b_1+1.b_0$ en prenant comme convention que $b_0 = 1$, on a bien $\forall n \geqslant 0,\ b_{n+2} = b_{n+1} + (n+1)b_n$. On montre alors par une récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

On peut alors expliquer la relation $(R)$ de manière combinatoire, en constatant qu'une involution $\sigma$ de $[\![1;n]\!]$ est une application telle que pour tout entier $x$ entre $1$ et $n$, et on a deux choix :

- soit $\sigma(x) = x$ et $x$ est appelé un point fixe de $\sigma$.
- soit $\sigma(x) = y \neq x$ et alors, comme $\sigma^2 = \mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$, on a forcément $\sigma(y) = x$.

Ainsi, si $\sigma \in A_n$, le nombre $f$ de points fixes de $\sigma$ a la même parité que $n$ de sorte qu'il existe $2j$ entiers de $[\![1;n]\!]$ qui ne sont pas fixes par $\sigma$ avec $f = n-2j$ avec $0 \leqslant j \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. On peut donc écrire $A_n = \bigcup_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,j}$ où

$A_{n,j} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma \text{ admet } f = n-2j \text{ points fixes}\}$.

Pour construire une involution $\sigma$ de $A_{n,j}$ :

- on choisit les $n-2j$ éléments de $[\![1;n]\!]$ qui sont fixes par $\sigma$ : $\binom{n}{n-2j} = \binom{n}{2j}$ choix.
- on choisit l'image $y$ du plus petit élément $x$ qui reste : $(2j-1)$ choix (et alors $\sigma(x) = y$ et $\sigma(y) = x$).
- on choisit l'image $t$ du plus petit élément $z$ qui reste : $(2j-3)$ choix etc...

Ainsi $\text{card}\,(A_{n,j}) = \binom{n}{2j} \times (2j-1) \times (2j-3) \times \cdots \times 3 \times 1 = \dfrac{n!}{(n-2j)!(2j)!} \times \dfrac{(2j)!}{2^j j!}$ en multipliant en haut et en bas par les termes pairs qui manquent. On retrouve bien $I_n = \text{card}\,(A_n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \text{card}\,(A_{n,j}) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{n!}{(n-2j)!2^j j!}$.

**10.100** **a.** <u>Initialisation</u> : $f$ est solution de $(E)$ donc $f$ est dérivable par définition donc $f$ est de classe $C^0$ sur $\mathbb{R}$.

<u>Hérédité</u> : supposons, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, que $f$ soit de classe $C^n$ sur $\mathbb{R}$, alors $f' : x \mapsto f(x) + f(\lambda x)$ est aussi de classe $C^n$ sur $\mathbb{R}$ par somme et composition. Ainsi, $f$ est de classe $C^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Par principe de récurrence, $f$ est de classe $C^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout entier $n$ donc $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**b.** Soit $f$ solution de $(E)$ telle que $f(0) = 0$, alors $f'(0) = \alpha f(0) + f(0) = 0$ et, plus généralement, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n+1)}(0) = \alpha f^{(n)}(0) + \lambda^n f^{(n)}(0) = 0$. Soit $a > 0$, alors si on note $M_p = \underset{x \in [a-;a]}{\text{Sup}} |f^{(p)}(x)|$, on a avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-a;a]$, $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leqslant \dfrac{a^{n+1} M_{n+1}}{(n+1)!}$. Mais puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-a;a],\ f^{(n+1)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \lambda^n f^{(n)}(\lambda x)$ on a $M_{n+1} \leqslant (\alpha+1) M_n$ et donc $M_n \leqslant (\alpha+1)^n M_0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-a;a]$, $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leqslant \dfrac{a^{n+1}(\alpha+1)^{n+1} M_0}{(n+1)!}$ qui tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Ainsi, $f$ est développable en série entière sur $[-a;a]$ et $f = 0$ sur $[-a;a]$ pour tout $a > 0$ : $f = 0$ sur $\mathbb{R}$.

**c.** Si $f$ est développable en série entière (avec rayon $R > 0$) et solution de l'équation différentielle, alors $\forall x \in ]-R;R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On remplace dans l'équation et $\forall x \in ]-R;R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - \alpha a_n - \lambda^n a_n) x^n = 0$ donc, par unicité des coefficients dans une série entière de rayon strictement positif, $a_{n+1} = \dfrac{\alpha + \lambda^n}{n+1} a_n$.

Réciproquement, si on définit $f$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant cette récurrence et par exemple $a_0 = 1$, on a bien $R = +\infty$ avec d'Alembert car $\lim_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \dfrac{\alpha + \lambda^n}{n+1} \right| = 0$ et $f$ est solution de l'équation en remontant les calculs.

Si $g$ est une solution quelconque de l'équation, alors posons $h = g - g(0)f$ où $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{\alpha + \lambda^k}{k+1} \right) x^n$ est la solution développable en série entière qu'on vient de trouver (valant $1$ en $0$). Comme $h$ est de classe $C^\infty$ et vaut $0$ en $0$ par construction, on a $h = 0$ d'après la question **c.** car $h$ est solution de l'équation aussi. Ainsi $g = g(0)f$. Par conséquent, $E = \text{Vect}(f)$.

**10.101** **a.** Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ vaut par définition $R = \text{Sup}\left( \{x \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n x^n)_{n \geqslant 0} \text{ est bornée}\} \right)$ avec par convention $R = +\infty$ si cet ensemble n'est pas majoré.

**b.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;1]$, on a $\dfrac{t^n}{2} \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$ donc, par croissance de l'intégrale, on a l'encadrement $0 \leqslant \int_0^1 \dfrac{t^n}{2} dt = \dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n dt$ (1). Comme le rayon de convergence des deux séries

$\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{x^n}{2(n+1)}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{x^n}{n+1}$ vaut classiquement 1, on peut conclure d'après le cours que $R=1$. Par croissance de l'intégrale, si $n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in[0;1]$, $0\leqslant\dfrac{t^{n+1}}{1+t^2}\leqslant\dfrac{t^n}{1+t^2}$ donc $0\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, l'encadrement (1) montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$. Par critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n(-1)^n$ converge alors que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n$ diverge par minoration puisque $a_n\geqslant\dfrac{1}{2(n+1)}$ et que la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n+1}$ diverge. Ainsi, le domaine de définition de $x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est $[-1;1[$.

**c.** Dans la relation $(R)$ : $\dfrac{1}{(1-xt)(1+t^2)}=\dfrac{a}{1-xt}+\dfrac{bt}{1+t^2}+\dfrac{c}{1+t^2}$, pour $x\neq 0$, on multiplie par $1-xt$ et on prend $t=\dfrac{1}{x}$ et on trouve $a=\dfrac{x^2}{1+x^2}$. Dans $(R)$, on multiplie par $1+t^2$ et on prend $t=i$ pour avoir $\dfrac{1}{1-ix}=\dfrac{1+ix}{1+x^2}=bi+c$ donc, comme $b$ et $c$ sont réels, on a $b=\dfrac{x}{1+x^2}$ et $c=\dfrac{1}{1+x^2}$. On peut aussi bien sûr procéder par identification. Alors, $\forall t\in[0\,;1]$, $\dfrac{1}{(1-xt)(1+t^2)}=\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1-xt)}+\dfrac{xt}{(1+x^2)(1+t^2)}+\dfrac{1}{(1+x^2)(1+t^2)}$ et cette relation marche encore pour $x=0$.

**d.** Pour $|x|<1$, la série de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n(t)=\dfrac{x^nt^n}{1+t^2}$ converge normalement sur $[0;1]$ car $||u_n||_{\infty,[0;1]}\leqslant|x|^n$ et que la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0}|x|^n$ converge car $|x|<1$ donc on peut intervertir série et intégrale sur le segment $[0;1]$, puisque les fonctions $u_n$ sont toutes continues sur $[0;1]$, pour avoir la relation $\forall x\in]-1;1[$, $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\displaystyle\int_0^1u_n(t)dt\Big)=\int_0^1\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(t)\Big)dt=\int_0^1\dfrac{dt}{(1-xt)(1+t^2)}$ car $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(xt)^n=\dfrac{1}{1-xt}$ puisque $|xt|<1$. D'après **c.**, $\forall x\in]-1;1[$, $S(x)=\dfrac{x}{1+x^2}\displaystyle\int_0^1\dfrac{xdt}{1-xt}+\dfrac{x}{1+x^2}\int_0^1\dfrac{tdt}{1+t^2}+\dfrac{1}{1+x^2}\int_0^1\dfrac{dt}{1+t^2}$ par linéarité de l'intégrale donc $S(x)=\dfrac{x}{1+x^2}[-\ln(1-xt)]_0^1+\dfrac{x}{2(1+x^2)}[\ln(1+t^2)]_0^1+\dfrac{1}{1+x^2}[\mathrm{Arctan}(t)]_0^1$ et on obtient donc $S(x)=\dfrac{-4x\ln(1-x)+2x\ln(2)+\pi}{4(1+x^2)}$.

**e.** Les fonctions $v_n : x\mapsto u_nx^n$ sont toutes continues sur $[-1;0]$ et, pour $x\in[-1;0]$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_nx^n$ est alternée et la suite $(|v_n(x)|)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers 0 car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, tend vers 0 et $|x|\leqslant 1$. Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, on a $|R_n(x)|=\Big|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}v_k(x)\Big|\leqslant|v_{n+1}(x)|\leqslant u_{n+1}$ donc $||R_n||_{\infty,[-1;0]}\leqslant u_{n+1}$ ce qui montre par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty}||R_n||_{\infty,[-1;0]}=0$ et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}v_n$ converge uniformément vers $S$ sur $[-1;0]$. Par théorème, on a donc la continuité de $S$ sur $[-1;0]$ ce qui montre que $S(-1)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nu_n=\lim\limits_{x\to-1^+}S(x)=\dfrac{\ln(2)}{2}+\dfrac{\pi}{8}$.

**10.102** **a.** $f$ est définie comme la somme de la série entière lacunaire $\sum\limits_{n\geqslant 0}b_nx^n$ où $b_n=1$ si $n$ est un carré et $b_n=0$ sinon. Comme $(b_nx^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $(b_{n^2}x^{n^2})_{n\geqslant 0}=(x^{n^2})_{n\geqslant 0}$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si $|x|\leqslant 1$, le rayon de convergence $R$ de cette série entière vaut $R=1$. Pour $x=\pm 1$, cette série est grossièrement divergente donc le domaine de définition de $f$ vaut $I=]-1;1[$.

**b.** En tant que somme d'une série entière de rayon 1, d'après le cours, $f$ est de classe $C^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, donc a fortiori dérivable sur $I=]-1;1[$.

**c.** Comme on étudie $f$ au voisinage de 1, on peut se contenter de prendre $x\in]0;1[$, et de poser la fonction $h_x : t\mapsto x^{t^2}=e^{t^2\ln(x)}$ qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de Riemann car $h_x(t) = e^{t^2\ln(x)} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées ($\ln(x) < 0$).

Comme la fonction $h_x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\forall k \geqslant 1$, $\int_k^{k+1} h_x(t)dt \leqslant x^{k^2} = h_x(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} h_x(t)dt$.

On somme pour $k$ allant de $0$ à $+\infty$ à gauche et de $1$ à $+\infty$ à droite (l'intégrale et la série convergent) ce qui donne par CHASLES l'encadrement $\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} x^{t^2}dt + h_x(0) = \int_0^{+\infty} x^{t^2}dt + 1$.

En posant $t = \frac{u}{\sqrt{-\ln(x)}} = \varphi(u)$, $\varphi$ étant une bijection strictement croissante de classe $C^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, par changement de variable, on a $\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2\ln(x)}dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}}$.

Par encadrement, comme $1 \underset{1^-}{=} o\left(\sqrt{\frac{1}{-\ln(x)}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}} = +\infty$, on a l'équivalent $f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}}$.

**d.** Comme il existe une infinité de termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont supérieurs ou égaux à $1$ (il y a une infinité de carrés parfaits), on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge, ce qui prouve que $R' \leqslant 1$. Comme $a_n = \text{card}\{k \in [\![0;\lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!] \mid n-k^2 \text{ est un carré parfait}\}$, on a $a_n \leqslant \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 \leqslant \sqrt{n}+1 \leqslant n+1$ et comme la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ est de rayon $1$, on a $R' \geqslant 1$. Par conséquent, $R' = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum\limits_{\substack{(u,v)\in[\![0;\lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!]^2 \\ u^2+v^2=n}} 1 = \sum\limits_{\substack{(i,j)\in[\![0;n]\!] \\ i+j=n}} b_ib_j$ (en posant $i = u^2$ et $j = v^2$) par définition des $b_n$. Par exemple, $a_5 = b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3 + b_3b_2 + b_4b_1 + b_5b_0 = 2$ car $b_2 = b_3 = b_5 = 0$ et $b_0 = b_1 = b_4 = 1$ ce qui correspond aux deux écritures $5 = 1+4 (= 1^2+2^2 = 2^2+1^1 =) 4+1$. Par produit de CAUCHY de deux séries entières, pour $x \in ]-R';R'[=]-1;1[$, on a $f(x)^2 = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_nx^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_nx^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_nx^n$ avec $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_kb_{n-k} = \sum\limits_{\substack{(i,j)\in[\![0;n]\!]^2 \\ i+j=n}} b_ib_j = a_n$. Ainsi, $f(x)^2 = g(x)$ ce qui prouve que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nx^n$ converge pour $x \in ]-1;1[$ donc que $R' \geqslant 1$ indépendamment de ce qui précède. On trouve à nouveau que $R' = 1$. D'après la question **c.**, on a même $g(x) = f(x)^2 \underset{1^-}{\sim} \frac{-\pi}{4\ln(x)}$.

**10.103** Déjà, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie car $u_0$ est donné et la relation $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_ku_{n-k}$ définit bien $u_{n+1}$ connaissant les termes $u_0, \cdots, u_n$. On peut montrer facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.

**a.** Comme $u_0 = 3$, on a $u_1 = u_0^2 = 9$ et $u_2 = 2u_0u_1 = 54$. Ainsi, on a bien $0 \leqslant \frac{u_0}{0!} = 3 \leqslant 4 = 4^{0+1}$, $0 \leqslant \frac{u_1}{1!} = 9 \leqslant 16 = 4^{1+1}$ et $0 \leqslant \frac{u_2}{2!} = 27 \leqslant 64 = 4^{3+1}$. Soit $n \geqslant 3$ tel que $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $0 \leqslant \frac{u_k}{k!} \leqslant 4^{k+1}$, alors $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_ku_{n-k} \geqslant 0$ car $u_0, \cdots, u_n$ sont positifs. De plus, par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_ku_{n-k} = n!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{u_ku_{n-k}}{k!(n-k)!} \leqslant n!\sum\limits_{k=0}^{n}4^{k+1}4^{n+1-k} = (n+1)!4^{n+2}$ donc $\frac{u_{n+1}}{(n+1)!} \leqslant 4^{n+2}$.

Par principe de récurrence forte, on a établi que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$.

**b.** Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$ d'après **a.**, et puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} 4^{n+1}x^n$ vaut $\frac{1}{4}$ car $(4^{n+1}x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant \frac{1}{4}$, on en déduit que le rayon $R$ de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{u_n}{n!}x^n$ vérifie $R \geqslant \frac{1}{4}$. Ainsi, la fonction $f$, qui est la somme de cette série entière, est bien définie sur $I = \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[ \subset ]-R;R[$.

**c.** On dérive terme à terme donc $\forall x \in I,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{u_n}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!}x^n$ à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence et après changement d'indice. On a donc $\forall x \in I,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k}{k!}.\frac{u_{n-k}}{(n-k)!}\Big)x^n$ car $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On reconnaît un produit de CAUCHY, valide puisque $I \subset ]-R;R[$, et on a $f'(x) = f(x)^2$. Par conséquent, $f$ est bien solution sur $I$ de l'équation $(E)\ :\ y' = y^2$.

**d.** Analyse : supposons que $f$ ne s'annule pas sur $I$, alors $\forall x \in I,\ \frac{f'(x)}{f(x)^2} = 1 \iff \Big(\frac{1}{f(x)}+x\Big)' = 0$ donc $x \mapsto \frac{1}{f(x)} + x$ est constante sur l'intervalle $I$. Or $f(0) = 3$ donc $\forall x \in I,\ \frac{1}{f(x)} + x = \frac{1}{3}$ et $f(x) = \frac{3}{1-3x}$.

Synthèse : soit $g : \Big]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\Big[ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{3}{1-3x}$. $g$ ne s'annule pas sur $I$, $g(0) = \frac{1}{3}$ et $g'(x) = \frac{9}{(1-3x)^2} = g(x)^2$. Ainsi, $f$ et $g$ sont solutions du même problème de CAUCHY (non linéaire donc hors programme) et sont donc égales sur $I$. Si on veut rester dans le programme, on décompose $\forall x \in \Big]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\Big[,\ g(x) = 3\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}3^{n+1}x^n$. Posons, $v_n = n!3^{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Par produit de CAUCHY dans $\Big]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\Big[$, on a $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{v_{n+1}}{(n+1)!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{v_k}{k!}\frac{v_{n-k}}{(n-k)!}\Big)x^n$. Par unicité du développement en série entière, il vient $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{v_{n+1}}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{v_k}{k!}\frac{v_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v_k v_{n-k}$.
Par récurrence forte, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = n!\,3^{n+1}$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont le même premier terme et la même relation de récurrence, à savoir $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v_k v_{n-k}$.

**10.104** **a.** $f : t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $]-\infty;1[$ en la prolongeant par continuité en $0$ avec $f(0) = -1$ puisque $\ln(1-t) \underset{0}{\sim} -t$. $F$ est donc la primitive de $-f$ qui s'annule en $0$ donc $F$ est au moins définie sur $]-\infty;1[$.
Si $x = 1$, $f(t) \underset{1^-}{\sim} \ln(1-t) \underset{1^-}{=} o\Big(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\Big)$ donc $f$ est intégrable sur $[0;1[$ et $F(1)$ existe par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Par conséquent, le domaine définition de $F$ est $D = ]-\infty;1]$.

**b.** D'après le cours, $\forall t \in ]-1;1[,\ \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}$ donc $-f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{n}$ (marche aussi si $t = 0$). Pour $x \in ]-1;1[$, en intégrant terme à terme sur le segment $\widetilde{[0;x]}$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, il vient $F(x) = \int_0^x(-f(t))dt = \int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{n}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x\frac{t^{n-1}}{n}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2} = S(x)$. Par définition de la convergence d'une intégrale, $F(1) = \lim_{x\to 1^-}F(x)$. En posant $u_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$, on a $||u_n||_{\infty,[0;1]} = \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement sur $[0;1]$ et, puisque toutes les $u_n$ sont continues sur $[0;1]$, $S$ est continue sur $[0;1]$ donc $F(1) = \lim_{x\to 1^-}F(x) = \lim_{x\to 1^-}S(x) = S(1) = \frac{\pi^2}{6}$. On a bien $\forall x \in [0;1],\ F(x) = S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

**c.** Soit $G : ]0;1[ \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$. Par opérations, la fonction $G$ est dérivable sur $]0;1[$. De plus, la fonction $F$ est dérivable sur $]0;1[$ avec $F'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ donc, pour $x \in ]0;1[$, on a la relation
$(F(x)+F(1-x)-G(x))' = F'(x) - F'(1-x) - G'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-(1-x))}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$
avec l'abus de notation usuel. Ainsi, la fonction $x \mapsto F(x)+F(1-x)-G(x)$ est constante sur l'intervalle $]0;1[$.
On a $\lim_{x\to 0^+}(F(x)+F(1-x)-G(x)) = F(0)+F(1)-\frac{\pi^2}{6} = 0$ d'après **b.** et car $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)\ln(1-x) = 0$ puisque $\ln(1-x) \underset{0}{=} -x$ et $\lim_{x\to 0^+}x\ln(x) = 0$, donc $\forall x \in ]0;1[,\ F(x)+F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$.

**10.105** **a.** Initialisation : pour $n=0$, $\forall x \in I,\ f^{(0)}(x)=f(x)=\dfrac{P_0(\sin(x))}{\cos^{0+1}(x)}$ en prenant $P_0=X+1$ qui est bien à coefficients dans $\mathbb{N}$ par définition de la fonction $f$.

Pour $n=1$, en dérivant, on a $f'(x)=\dfrac{\cos^2(x)+(\sin(x)+1)\sin(x)}{\cos^2(x)}=\dfrac{\sin(x)+1}{\cos^2(x)}$ donc $f^{(1)}(x)=\dfrac{P_1(\sin(x))}{\cos^{1+1}(x)}$ avec $P_1=X+1$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ et de degré $n=1$ et unitaire.

Hérédité : soit $n\geqslant 1$ tel que $\forall x\in I,\ f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$ avec $P_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{N}[X]$ de degré $n$ avec $a_n=1$. On dérive une fois de plus, toutes les fonctions étant de classe $C^\infty$ sur I, et on obtient la relation $\forall x\in I,\ f^{(n+1)}(x)=\dfrac{\cos(x)P_n'(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}+(n+1)\dfrac{\sin(x)P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$ donc, après réduction au même dénominateur, $f^{(n+1)}(x)=\dfrac{\cos^2(x)P_n'(\sin(x))+(n+1)\sin(x)P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}=\dfrac{P_{n+1}(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$ si on définit le polynôme $P_{n+1}=(1-X^2)P_n'+(n+1)XP_n=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_kX^{k-1}-\sum\limits_{k=0}^{n}ka_kX^{k+1}+(n+1)\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^{k+1}$ qui s'arrange en $P_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k-\sum\limits_{k=1}^{n+1}(k-1)a_{k-1}X^k+(n+1)\sum\limits_{k=1}^{n+1}a_{k-1}X^k$, puis, en regroupant les termes, en $P_{n+1}=a_nX^{n+1}+2a_{n-1}X^n+\Big(\sum\limits_{k=1}^{n-1}[(k+1)a_{k+1}+(n+2-k)a_{k-1}]X^k\Big)+a_1\in\mathbb{N}[X]$ qui est bien unitaire, de degré $n+1$ et à coefficients dans $\mathbb{N}$.

Conclusion : par principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists P_n\in\mathbb{N}[X],\ \forall x\in I,\ f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$. De plus, s'il existait, pour $n\in\mathbb{N}$, un autre polynôme $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x\in I,\ f^{(n)}(x)=\dfrac{Q_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}=\dfrac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$, on aurait $\forall x\in I,\ P_n(\sin(x))=Q_n(\sin(x))$ donc $P_n=Q_n$ car $P_n$ et $Q_n$ coïncident sur $]-1;1[$ qui est infini. Ainsi, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique et vérifie $P_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ P_{n+1}=(1-X^2)P_n'+(n+1)XP_n$ et on a montré lors de la récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P_n$ est de degré $n$ et unitaire.

**b.** Soit $x\in J=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\forall n\in\mathbb{N},\ f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}+\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)dt$ par la formule de Taylor reste intégral. Or $\forall t\in[0;x]\subset J$, on a $(x-t)^nf^{(n+1)}(t)=(x-t)^n\dfrac{P_{n+1}(\sin(t))}{\cos^{n+2}(t)}\geqslant 0$ car $x-t\geqslant 0$, $\sin(t)\geqslant 0$ donc $P_{n+1}(\sin(t))\geqslant 0$ car $P_n\in\mathbb{N}[X]$ et $\cos(t)>0$. Ainsi, $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)dt\geqslant 0$ donc $0\leqslant S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}\leqslant f(x)$ ce qui montre que les sommes partielles de la série de Taylor de $f$ en $x$ sont majorées. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, cette série converge d'après le cours. Ceci montre que le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ vérifie $R\geqslant\dfrac{\pi}{2}$. D'après le cours toujours, la série de Taylor de $f$ converge donc sur l'intervalle ouverte de convergence $]R;R[$ qui contient I.

**c.** Soit $g:I\to\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in I,\ g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$, $g$ est bien définie d'après la question précédente. La fonction $f$ est dérivable sur I et $f'(x)=\dfrac{\sin(x)+1}{\cos^2(x)}=\dfrac{(\sin(x)+1)^2+\cos^2(x)}{2\cos^2(x)}=\dfrac{f(x)^2+1}{2}$ donc on obtient $\forall x\in I,\ 2f'(x)=f(x)^2+1$. Par la formule de Leibniz, en écrivant $(2f'(x))^{(n)}=(f(x)^2+1)^{(n)}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a la relation $2f^{(n+1)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}f^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x)$. En particulier en prenant $x=0$, on a la relation $2f^{(n+1)}(0)=2P_{n+1}(0)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}f^{(k)}(0)f^{(n-k)}(0)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}P_k(0)P_{n-k}(0)$ donc $2\alpha_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha_k\alpha_{n-k}}{n+1}$ en posant $\alpha_k=\dfrac{P_k(0)}{k!}$ si $n\geqslant 1$. On a aussi $2f'(0)=f(0)^2+1$ donc $2\alpha_1=\alpha_0^2+1$.

Mais on a $\forall x \in I,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ et, par produit de CAUCHY, $\forall x \in I,\ g(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\alpha_{n-k}\Big)x^n$ d'où $g(x)^2 = \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\alpha_{n-k}\Big)x^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\alpha_{n+1}x^n = -1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\alpha_{n+1}x^n$ donc $g(x)^2 = -1 + 2g'(x)$. Les deux fonctions $f$ et $g$ sont donc solutions sur $I$ de l'équation différentielle non linéaire $2y' = y^2 + 1$. Comme on n'a pas au programme de théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ non linéaire, on va poser les fonctions $a = \mathrm{Arctan} \circ f$ et $b = \mathrm{Arctan} \circ g$ qui sont dérivables sur $I$ comme composées de fonctions dérivables. $\forall x \in I,\ a'(x) = \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{g'(x)}{1+g(x)^2} = b'(x)$ donc, comme $I$ est un intervalle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I,\ a(x) = b(x) + C$. Or $a(0) = b(0) = \mathrm{Arctan}(\alpha_0) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $C = 0$. Ainsi, $\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ ce qui justifie que $f$ est développable en série entière sur $I$.

De plus, si on avait $R > \dfrac{\pi}{2}$, alors $f = g$ serait de classe $C^\infty$ sur $\Big[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\Big] \subset ]-R;R[$ donc, en particulier, $f$ serait continue en $\dfrac{\pi}{2}$ alors que $\lim\limits_{x\to\pi/2^-} f(x) = +\infty$. Ainsi, le rayon $R$ de la série de TAYLOR de $f$ vaut $R = \dfrac{\pi}{2}$.

Questions de cours :

- D'après le cours, on sait que $\forall x \in ]-1;1[,\ \mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.
- Pour une fonction $f : I \mapsto \mathbb{C}$ de classe $C^{n+1}$ sur l'intervalle $I$, pour tout $(a,b) \in I^2$, on a la formule de TAYLOR reste intégral suivante, $f(b) = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \displaystyle\int_a^b \dfrac{(b-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}dt$.
- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ et $g : t \mapsto f\big(\cos(t), \mathrm{Arctan}(t), 2^t\big)$. D'après la règle de la chaîne, comme $t \mapsto \cos(t)$, $t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)$ et $t \mapsto 2^t$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, $g$ l'est aussi et

$$\begin{aligned} g'(t) \quad = \quad & -\sin(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(\cos(t), \mathrm{Arctan}(t), 2^t\big) \\ & + \frac{1}{1+t^2}\frac{\partial f}{\partial y}\big(\cos(t), \mathrm{Arctan}(t), 2^t\big) + \ln(2)2^t\frac{\partial f}{\partial z}\big(\cos(t), \mathrm{Arctan}(t), 2^t\big). \end{aligned}$$

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $(a,b) \in I^2$, alors $\forall y \in [\widetilde{f(a);f(b)}]$, il existe un réel $c \in [\widetilde{a;b}]$ tel que $f(c) = y$.

$\boxed{\textbf{10.106}}$ **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f_x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_x(t) = \dfrac{t^x}{1+t^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $f_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{-x}}$, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, $f_x$ est intégrable en $0$ si et seulement si $-x < 1 \iff x > -1$. De plus, $f_x(t) \iff \dfrac{1}{t^{2-x}}$ donc, de même, $f_x$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $2 - x > 1 \iff x < 1$. Comme $f_x$ est positive, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_x$ converge si et seulement si $f_x$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire intégrable en $0$ et en $+\infty$. Par conséquent, le domaine de définition de $f$ est $D = ]-1;1[$.

**b.** Pour $x \in D$, $f_x$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ d'après **a.** et $f_x(t) = \dfrac{t^x}{1+t^2} = \dfrac{e^{x\ln(t)}}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(x\ln(t))^n}{n!(1+t^2)}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n : [1;+\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = \dfrac{(\ln(t))^n x^n}{n!(1+t^2)}$ de sorte que $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\Big)dt$.

($H_1$) $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $[1;+\infty[$ vers $f_x$ (on en vient).

($H_2$) Les fonctions $g_n$ sont continues et intégrables sur $[1;+\infty[$ pour $n \in \mathbb{N}$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $g_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln(t))^n x^n}{n!t^2} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\Big)$ par croissances comparées.

$(H_3)$ La fonction $f_x$ est continue sur $[1;+\infty[$.

$(H_4)$ Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_1^{+\infty} |g_n(t)|dt = \frac{|x|^n}{n!}\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{1+t^2}dt \leqslant \frac{|x|^n}{n!}\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{t^2}dt$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{t^2}dt$ et, avec $u : t \mapsto (\ln(t))^n$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{t}$ qui sont de classe $C^1$ sur $[1;+\infty[$ avec $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on obtient pour $n \geqslant 1$, par intégration par parties, $J_n = [u(t)v(t)]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \Big(\frac{1}{t}\Big)n(\ln(t))^{n-1}\Big(-\frac{1}{t}\Big)dt = nJ_{n-1}$. Puisque $J_0 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^{+\infty} = 1$, on a par une récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = n!$. Ainsi, $\int_1^{+\infty} |g_n(t)|dt \leqslant \frac{J_n|x|^n}{n!} = |x|^n$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $g(x) = \int_1^{+\infty} \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\Big)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_1^{+\infty} g_n(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en posant $a_n = \frac{1}{n!}\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{1+t^2}dt$ donc $g$ est développable en série entière sur $]-1;1[$.

**c.** Par la relation de Chasles, $\forall x \in D$, $f(x) = \int_0^1 f_x(t)dt + \int_1^{+\infty} f_x(t)dt$. Dans l'intégrale $\int_0^1 f_x(t)dt$, on effectue le changement de variable $t = \frac{1}{u} = \varphi(u)$ avec $\varphi$ qui est une bijection strictement décroissante de classe $C^1$ de $[1;+\infty[$ dans $]0;1]$ et on a $\int_0^1 f_x(t)dt = \int_{+\infty}^1 \frac{(1/u)^x}{1+\frac{1}{u^2}}\Big(-\frac{1}{u^2}\Big)du = \int_1^{+\infty} \frac{u^{-x}}{1+u^2}du = g(-x)$.

Ainsi, $f(x) = g(x) + g(-x)$ donc, comme $g$ est développable en série entière sur $]-1;1[$ d'après **b.**, $f$ l'est aussi et on a $\forall x \in D$, $f(x) = g(x) + g(-x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(a_n + (-1)^n a_n\big)x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2a_{2n}x^{2n}$. La fonction $f$ est donc paire sur $D$, ce qu'on pouvait voir directement avec le même changement de variable $t = \frac{1}{u}$.

**10.107** **a.** Soit $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, par hypothèse, on a $f(re^{it}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}$ car le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vaut $R = +\infty$. Ainsi, $f\big(re^{it}\big)e^{-ipt} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}e^{ipt} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-p)t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(t)dt$ si $g_n : t \mapsto a_n r^n e^{i(n-p)t}$.

On a $||g_n||_{\infty,[0;2\pi]} = |a_n|r^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n r^n$ converge absolument par le lemme d'Abel car $r < R = +\infty$, donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur le segment $[0;2\pi]$. Par le théorème d'intégration terme à terme par convergence normale sur segment, $\int_0^{2\pi} \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\Big)dt = \sum\limits_{n=0}^{2\pi}\int_0^{2\pi} g_n(t)dt$. Or on calcule $\int_0^{2\pi} g_n(t)dt = \Big[\frac{a_n r^n e^{i(n-p)t}}{i(n-p)}\Big]_0^{2\pi} = 0$ si $n \neq p$ et $\int_0^{2\pi} g_p(t)dt = 2\pi a_p r^p$.

On en déduit donc que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall r > 0$, $\int_0^{2\pi} f\big(re^{it}\big)e^{-ipt}dt = 2\pi\, a_p r^p$.

**b.** Comme $f$ est bornée sur $\mathbb{C}$, posons $M = ||f||_{\infty,\mathbb{C}} = \operatorname{Sup}\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$ et, par inégalité triangulaire sur les intégrales, $\Big|\int_0^{2\pi} f\big(re^{it}\big)e^{-ipt}dt\Big| \leqslant \int_0^{2\pi} \big|f\big(re^{it}\big)\big|dt \leqslant 2\pi M$. D'après **a.**, $|2\pi a_p r^p| \leqslant 2\pi M$ donc $|a_p| \leqslant \frac{M}{r^p}$. Comme ceci est vrai pour tout $r > 0$, en faisant tendre $r$ vers $+\infty$ dans cette inégalité pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leqslant |a_p| \leqslant \lim\limits_{r\to+\infty} \frac{M}{r^p} = 0$ donc $a_p = 0$. Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = a_0$ donc $f$ est constante.

Bien sûr, ceci est faux si $f$ n'est que bornée sur $\mathbb{R}$ comme en témoigne la fonction $\cos$ par exemple.

**c.** Pour un entier $p \geqslant q + 1$ et un réel $r > 0$, toujours par inégalité triangulaire sur les intégrales, on obtient

$\left|\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|dt \leqslant \int_0^{2\pi}(\alpha r^q+\beta)dt \leqslant 2\pi(\alpha r^q+\beta)$. Ainsi, avec la question **a.**, on a $|2\pi a_p r^p| \leqslant 2\pi(\alpha r^q+\beta)$ d'où $0 \leqslant |a_p| \leqslant \alpha r^{q-p}+\beta r^{-p}$. Encore une fois, comme $\lim\limits_{r\to+\infty}(\alpha r^{q-p}+\beta r^{-p})=0$, en passant à la limite, on a $|a_p|=0$ si $p>q$. Par conséquent, $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)=\sum\limits_{p=0}^{q} a_p z^p$ donc $f$ est polynomiale.

**d.** Soit $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par $g(z)=f(z)e^{-z}$. Comme $f$ et $\exp$ sont développables en série entière avec un rayon $+\infty$, par produit de CAUCHY, la fonction $g$ est elle-même développable en série entière sur $\mathbb{C}$. Pour $z\in\mathbb{C}$, $|g(z)|=|f(z)||e^{-z}|=|f(z)|e^{-\mathrm{Re}\,(z)}\leqslant 1$ donc $g$ est bornée sur $\mathbb{C}$ ce qui, avec la question **b.**, montre que $g$ est constante sur $\mathbb{C}$. Ainsi, il existe $k\in\mathbb{C}$ tel que $\forall z\in\mathbb{C},\ g(z)=f(z)e^{-z}=k$ d'où $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)=ke^z$.

**10.108** **a.** Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit la fonction $u_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n(2n+1)}$. Pour tout réel $x\in\mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\dfrac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)}x^2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=x^2=\ell$.

- Si $|x|<1$, on a $\ell<1$ donc, par critère de D'ALEMBERT, $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n(x)$ converge. Ainsi, $R\geqslant 1$.
- Si $|x|>1$, on a $\ell>1$ donc, par critère de D'ALEMBERT, $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n(x)$ diverge. Ainsi, $R\leqslant 1$.

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ vaut $R=1$.

**b.** Comme $|u_n(\pm 1)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n(\pm 1)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN. Le domaine $I$ de définition de $S$ est $I=[-1;1]$.

**c.** D'après le cours, la fonction $S$ (somme d'une série entière) est continue (et même de classe $C^\infty$) au moins sur l'intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire dans notre cas sur $]-1;1[$.

**d.** Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ ||u_n||_{\infty,I}=|u_n(1)|=\dfrac{1}{n(2n+1)}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2n^2}$ et que la série de RIEMANN $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge car $2>1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement sur $I$. Comme toutes les fonctions $u_n$ sont continues sur $I$, par théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction $S$ est continue sur $I$.

**e.** Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{n(2n+1)}=\dfrac{(2n+1)-2n}{n(2n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{2n+1}$ et le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x^{2n+1}}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ vaut aussi $1$ donc, pour $x\in]-1;1[$, on peut écrire $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n}+2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ en séparant les sommes. On reconnaît des séries entières classiques et $S(x)=x\ln(1+x^2)+2(\mathrm{Arctan}(x)-1)$.

**f.** Comme la fonction $S$ est impaire et continue sur $[-1;1]$ donc en $1$, on a $S(1)=S(-1)=\lim\limits_{x\to 1^-}S(x)$ donc $S(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x\ln(1+x^2)+2(\mathrm{Arctan}(x)-1))=\ln(2)-2+\frac{\pi}{2}\sim 0,26>0$. Pour $x=\pm 1$, la série alternée $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n(2n+1)}$ converge aussi par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{n(2n+1)}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers $0$. On sait alors que sa somme $S(1)$ est du signe de son premier terme $\dfrac{(-1)^{1+1}}{1(2+1)}>0$ donc $S(1)>0$.

**10.109** Déjà, la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie car $a_0$ est donné et la relation $a_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}a_k a_{n-k}$ définit bien $a_{n+1}$ connaissant les termes $a_0,\cdots,a_n$. On peut montrer facilement par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, a_n\in\mathbb{N}$.

**a.** <u>Initialisation</u> : comme $u_0=1$, $u_1=u_0^2=1$ et $u_2=2u_0u_1=2$. Ainsi, $0\leqslant\frac{a_0}{0!}=1\leqslant 1$, $0\leqslant\frac{a_1}{1!}=1\leqslant 1$.

<u>Hérédité</u> : soit $n\geqslant 2$ tel que $\forall k\in[\![0;n]\!],\ 0\leqslant\frac{a_k}{k!}\leqslant 1$, alors $a_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}a_k a_{n-k}\geqslant 0$ car $a_0,\cdots,a_n$ sont

positifs. Par hypothèse de récurrence, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k a_{n-k}}{k!(n-k)!} \leqslant n!\sum_{k=0}^{n}1 = (n+1)!$ donc on a bien l'inégalité $\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \leqslant 1$.

Conclusion : par principe de récurrence forte, on a établi que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{a_n}{n!} \leqslant 1$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{a_n}{n!} \leqslant 1$, et puisque le rayon de convergence de la série entière géométrique $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ vaut $1$, d'après le cours, le rayon $R$ de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}x^n$ vérifie $R \geqslant 1$. Ainsi, la fonction $f$, qui est la somme de cette série entière, est bien définie sur $I = ]-1;1[ \subset ]-R;R[$.

**b.** On dérive terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence qui contient $]-1;1[$ d'après la question **a.** pour avoir $\forall x \in I,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{a_n}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+1}}{n!}x^n$ à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence et après changement d'indice. On a donc $\forall x \in I,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}.\frac{a_{n-k}}{(n-k)!}\Big)x^n$ car $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On reconnaît un produit de Cauchy, valide puisque $I \subset ]-R;R[$, et on a $f'(x) = f(x)^2$.

Par conséquent, $f$ est bien solution sur $I$ de l'équation $(E)\ :\ y' = y^2$.

**c.** Analyse : supposons que $f$ ne s'annule pas sur $I$, alors $\forall x \in I,\ \frac{f'(x)}{f(x)^2} = 1 \iff \Big(\frac{1}{f(x)} + x\Big)' = 0$ donc $x \mapsto \frac{1}{f(x)} + x$ est constante sur l'intervalle $I$. Or $f(0) = 1$ donc $\forall x \in I,\ \frac{1}{f(x)} + x = 1$ et $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Synthèse : soit $g : ]-1;1[ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{1-x}$, alors $g$ ne s'annule pas sur $I$, $g(0) = 1$ et, pour $x \in I$, on a $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = g(x)^2$. Ainsi, $f$ et $g$ sont solutions du même problème de Cauchy (non linéaire donc hors programme) et sont donc égales sur $I$.

Si on veut rester dans le programme, on décompose $\forall x \in ]-1;1[,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Posons, $v_n = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$ de sorte que $\forall x \in ]-1;1[,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{v_n}{n!}x^n$. Par produit de Cauchy et par unicité du développement en série entière dans $]-1;1[$, on a $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{v_{n+1}}{(n+1)!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{v_k}{k!}\ \frac{v_{n-k}}{(n-k)!}\Big)x^n$, il vient donc la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{v_{n+1}}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{v_k}{k!}\ \frac{v_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v_k v_{n-k}$. Par récurrence forte, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = n!$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont le même premier terme et la même relation de récurrence, à savoir $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v_k v_{n-k}$.

Bien sûr, on pouvait le conjecturer en calculant quelques termes initiaux de plus et le démontrer par récurrence forte sans passer par les séries entières.

**10.110** **a.** On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ donc, comme $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = e^{-1} = \frac{1}{e}$. D'après $(C)$, on a donc $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} n\ell$ par télescopage ce qui montre que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc que $u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$.

Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{nx^n}{e}$ est égal à $1$ car $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)e}{en} = 1$ avec la règle de D'ALEMBERT, le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ vérifie aussi $R = 1$.

**b.** Si on note $S_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = S_{n+1}$, on a par télescopage $u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} S_{k+1} = \sum_{j=1}^{n} S_j$ en posant $j = k+1$ donc, comme $S_0 = 1 = u_0$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} S_k$. Comme $S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} S_n x^n$ vaut 1 comme celui de la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} x^n$. Par produit de CAUCHY, pour $x$ dans l'intervalle ouvert de convergence $]-1;1[$, on a $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 1.S_k\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = f(x)$ donc $\frac{g(x)}{1-x} = f(x)$ en posant $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$. Mais, de même, pour $x \in ]-1;1[$, on a $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 1.\frac{(-1)^k}{k!}\right)x^n$ car le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ vaut $+\infty$ donc $\frac{e^{-x}}{1-x} = g(x)$. Ainsi, $\forall x \in ]-1;1[,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}$.

**c.** Soit $\varepsilon > 0$, par convergence de $(_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Mais $\forall n \geqslant n_0,\ \left|\sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}(u_k - \ell)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - \ell) + \sum_{k=n_0}^{n-1}(u_k - \ell)\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - \ell)\right| + \sum_{k=n_0}^{n-1} |u_k - \ell|$ par inégalité triangulaire donc $\left|\sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell\right| \leqslant A + \sum_{k=n_0}^{n-1} |u_k - \ell| \leqslant A + \frac{(n-n_0)\varepsilon}{2} \leqslant A + \frac{n\varepsilon}{2}$ en posant $A = \left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - \ell)\right| \geqslant 0$. Or il existe un entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_1,\ A \leqslant \frac{n\varepsilon}{2}$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\varepsilon}{2} = +\infty$ d'où $\forall n \geqslant n_1,\ \left|\sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell\right| \leqslant \frac{n\varepsilon}{2} + \frac{n\varepsilon}{2} = n\varepsilon$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell \underset{+\infty}{=} o(n) \underset{+\infty}{=} o(n\ell)$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{+\infty}{\sim} n\ell$.

**10.111** **a.** La fonction $g : t \mapsto \frac{\mathrm{th}\,(t)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et $g(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc la fonction $g$ est intégrable sur $[n;+\infty[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN d'où l'existence de $a_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Comme la fonction th est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{th}\,(t) = 1$, $\forall t \in [n;+\infty[,\ \mathrm{th}\,(n) \leqslant \mathrm{th}\,(t) \leqslant 1$ donc, par croissance de l'intégrale, on a $\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{th}\,(n)dt}{t^2} = \left[\frac{\mathrm{th}\,(n)}{t}\right]_n^{+\infty} = \frac{\mathrm{th}\,(n)}{n} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Classiquement, par le critère de D'ALEMBERT par exemple, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ est égal à 1 donc, par équivalence, celui de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ vaut aussi $R = 1$.

Comme th est positive et que la suite d'intervalle $\big([n;+\infty[\big)_{n\geqslant 1}$ est décroissante pour l'inclusion, $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 en tant que reste d'une intégrale convergente. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n a_n$ converge et la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge par comparaison à la série harmonique. Ainsi, le domaine de définition de $f$ est $[-1;1[$.

**b.** Si $x \in [-1;0]$, on vient de voir que la suite $(a_n|x|^n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ converge par le critère spécial des séries alternées et $\forall n \geqslant 1,\ |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leqslant |a_{n+1}x^{n+1}| \leqslant a_{n+1}$. Ainsi, $R_n$ est bornée sur $[-1;0]$ et $||R_n||_{\infty,[-1;0]} \leqslant a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a donc convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ sur $[-1;0]$ si $g_n : x \mapsto a_n x^n$ et donc continuité de $f$ sur $[-1;0]$ car les $g_n$ sont continues sur $[-1;0]$.

**c.** Comme $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\ln(1-x)$ est équivalent à $f(x) + \ln(1-x) \underset{+\infty}{=} o(\ln(1-x))$, on va majorer la différence

$f(x)-(-\ln(1-x))$. Comme on sait que $\forall x\in]-1;1[$, $\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$, il s'agit de majorer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n-\dfrac{1}{n}\Big)x^n$.
Or, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{\mathrm{th}\,(n)}{n}\leqslant a_n\leqslant\dfrac{1}{n}$ donc $\Big|a_n-\dfrac{1}{n}\Big|\leqslant\dfrac{1-\mathrm{th}\,(n)}{n}$ et $|f(x)+\ln(1-x)|\leqslant\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1-\mathrm{th}\,(n)}{n}x^n$ pour tout $x\in[0;1]$. Posons $b_n=\dfrac{1-\mathrm{th}\,(n)}{n}$ pour $n\geqslant 1$, alors $1-\mathrm{th}\,(n)=1-\dfrac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}=\dfrac{2e^{-n}}{e^n+e^{-n}}\underset{+\infty}{\sim}2e^{-2n}$ donc $b_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{2e^{-2n}}{n}\underset{+\infty}{=}o(e^{-2n})$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1}e^{-2n}$ converge car $0<e^{-2}<1$.

Ainsi, $\forall x\in[0;1]$, $|f(x)+\ln(1-x)|\leqslant B=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ ce qui montre que $f(x)\underset{1^-}{=}-\ln(1-x)+O(1)$ donc $f(x)\underset{1^-}{=}-\ln(1-x)+o(\ln(1-x))$ car $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(1-x)=-\infty$ et on conclut bien que $f(x)\underset{1^-}{\sim}-\ln(1-x)$.

**10.112** **a.** On a $v_{2n+1}=0$ car il n'existe aucun $(2n+1)$-uplet $(a_1,\cdots,a_{2n+1})\in\{-1,1\}^{2n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{2n+1}a_k=0$ car tous les $a_k$ sont impairs donc $\sum\limits_{k=1}^{2n+1}a_k$ a la parité de $2n+1$ donc est impair alors que $0$ est pair.

**b.** $\underline{n=1}$ : il n'existe qu'un couple $(a_1,a_2)\in\{-1,1\}^2$ tel que $a_1+a_2=0$ et $\forall p\in[\![1;2]\!]$, $\sum\limits_{k=1}^{p}a_k\geqslant 0$ et il s'agit de $(1,-1)$. Ainsi, $u_1=1$.
$\underline{n=2}$ : il n'y a que deux quadruplets $(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\{-1,1\}^4$ tels que $a_1+a_2+a_3+a_4=0$ et tels que $\forall p\in[\![1;4]\!]$, $\sum\limits_{k=1}^{p}a_k\geqslant 0$ et il s'agit de $(1,1,-1,-1)$, $(1,-1,1,-1)$. Ainsi, $u_2=2$.
$\underline{n=3}$ : il n'y a que cinq sextuplets $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)\in\{-1,1\}^6$ tel que $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0$ et tels que $\forall p\in[\![1;6]\!]$, $\sum\limits_{k=1}^{p}a_k\geqslant 0$ et il s'agit de $(1,1,1,-1,-1,-1)$, $(1,1,-1,1,-1,-1)$, $(1,1,-1,-1,1,-1)$, $(1,-1,1,1,-1,-1)$ et $(1,-1,1,-1,1,-1)$. Ainsi, $u_3=5$.
**c.** Notons $U_{n+1}=\Big\{(a_1,\cdots,a_{2n+1})\in\{-1,1\}^{2n+1}\ \Big|\ \sum\limits_{k=1}^{2n+1}a_k=0$ et $\forall p\in[\![1;2n+2]\!],\ \sum\limits_{k=1}^{p}a_k\geqslant 0\Big\}$ et, pour $m\in[\![1;n+1]\!]$, on note $U_{n+1}^m=\Big\{(a_1,\cdots,a_{2n+2})\in U_{n+1}\ \Big|\ 2m=\mathrm{Min}\Big(\Big\{j\in[\![1;n+1]\!]\ \Big|\ \sum\limits_{k=1}^{2j}a_k=0\Big\}\Big)\Big\}$ (la parité de $\mathrm{Min}\Big(\Big\{j\in[\![1;n+1]\!]\ \Big|\ \sum\limits_{k=1}^{2j}a_k=0\Big\}\Big)$ tient au fait que $\sum\limits_{k=1}^{j}a_k$ a la parité de $j$). On a la partition $U_{n+1}=\bigsqcup\limits_{m=1}^{n+1}U_{n+1}^m$ de sorte que $u_{n+1}=\mathrm{card}\,(U_{n+1})=\sum\limits_{m=1}^{n+1}\mathrm{card}\,(U_{n+1}^m)$. Traitons trois cas :

- Si $m=1$ et si $(a_1,\cdots,a_{2n+2})\in U_{n+1}^1$, alors $a_1=1$ et $a_2=-1$ donc $U_{n+1}^1$ est en bijection avec $U_n$ en envoyant $(1,-1,a_3,\cdots,a_{2n+2})$ sur $(a_3,\cdots,a_{2n+2})$. Ainsi, $\mathrm{card}\,(U_{n+1}^1)=u_n=u_0u_n$ car $u_0=1$.
- Si $m\in[\![2;n]\!]$ et si $(a_1,\cdots,a_{2n+2})\in U_{n+1}^m$, alors $u_1=1$ et $u_{2m}=-1$ donc l'application qui à $(a_1,\cdots,a_{2n+2})\in U_{n+1}^m$ associe le couple $\big((a_2,\cdots,a_{2m-1}),(a_{2m+1},\cdots,a_{2n+2})\big)$ définit une bijection entre les ensembles $U_{n+1}^m$ et $U_{m-1}\times U_{n-m+1}$. En effet, la bijection réciproque est l'application qui à $\big((b_1,\cdots,b_{2m-2}),(c_1,\cdots,c_{2(n-m+1)})\big)$ associe $(1,b_1,\cdots,b_{2m-2},-1,c_1,\cdots,c_{2(n-m+1)})$. Ainsi, $\mathrm{card}\,(U_n^m)=\mathrm{card}\,(U_{m-1}\times U_{n-m+1})=\mathrm{card}\,(U_{m-1})\times\mathrm{card}\,(U_{n-m+1})=u_{m-1}u_{n-m+1}$.
- Si $m=n+1$ et si $(a_1,\cdots,a_{2n+2})\in U_{n+1}^{n+1}$, alors $a_1=1$ et $a_{2n+2}=-1$ donc $U_{n+1}^{n+1}$ est en bijection avec $U_n$ en envoyant $(1,a_2,\cdots,a_{2n+1},-1)$ sur $(a_2,\cdots,a_{2n+1})$. Ainsi, $\mathrm{card}\,(U_{n+1}^{n+1})=u_n=u_nu_0$.

Par conséquent, $u_{n+1}=u_0u_n+\Big(\sum\limits_{m=2}^{n}u_{m-1}u_{n-m+1}\Big)+u_nu_0=\sum\limits_{k=0}^{n}u_ku_{n-k}$ en posant $k=m-1$.

**d.** Analyse : supposons que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ a un rayon $R>0$. Soit alors $f:]-R;R[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Pour $x\in]-R;R[$, on a $f(x)^2=\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\Big)^2=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}\Big)x^n$ par produit de CAUCHY donc, avec la relation de **c.**, on a $f(x)^2=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^n$ donc $xf(x)^2=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1}=f(x)-1$. Ainsi, $f(x)$ est racine du polynôme $P_x=xX^2-X+1$ dont le discriminant vaut $\Delta=1-4x$. Comme $f(x)\in\mathbb{R}$, on a forcément $\Delta\geqslant 0$ donc $x\leqslant\frac{1}{4}$. Ceci garantit déjà que $R\leqslant\frac{1}{4}$. On donc $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ ou $f(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=u_0=1$. Comme $g:x\mapsto 2xf(x)-1$ est développable en série entière sur $]-R;R[$, elle y est continue et on sait d'après ce qui précède que $\forall x\in]-R;R[,\ g(x)=\pm\sqrt{1-4x}$. La continuité de $g$ et le fait que $g$ ne s'annule pas sur $]-R;R[$ montre que l'on a soit $\forall x\in]-R;R[,\ g(x)=\sqrt{1-4x}$ soit $\forall x\in]-R;R[,\ g(x)=-\sqrt{1-4x}$. Mais comme $g$ vaut $-1$ en $0$, elle est négative sur $]-R;R[$ et on a donc $\forall x\in]-R;R[,\ g(x)=-\sqrt{1-4x}$ donc $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x\neq 0$.

Synthèse : d'après le cours $\forall u\in]-1;1[,\ \sqrt{1+u}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n)!u^n}{(2n-1)(n!)^2 4^n}$ (on le retrouve assez vite avec le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha=\frac{1}{2}$) donc $\forall x\in\Big]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\Big[,\ \sqrt{1-4x}=1-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!x^n}{(2n-1)(n!)^2}$ ce qui montre que $\forall x\in\Big]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\Big[\setminus\{0\},\ \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!x^{n-1}}{2(2n-1)(n!)^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+2)!x^n}{2(2n+1)\big((n+1)!\big)^2}$ qu'on va plutôt écrire $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!x^n}{n!(n+1)!}$. Posons $v_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ de sorte que l'on a $\forall x\in\Big]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\Big[\setminus\{0\},\ g(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. On pose $g(0)=v_0=1$. Comme $0g(0)^2-g(0)+1=0$ et que $\forall x\in\Big]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\Big[\setminus\{0\},\ xg(x)^2-g(x)+1=\frac{1-2\sqrt{1-4x}+(1-4x)}{4x}-\frac{2-2\sqrt{1-4x}}{4x}+\frac{4x}{4x}=0$, on a bien $\forall x\in\Big]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\Big[,\ xg(x)^2-g(x)+1=0$. En effectuant un produit de CAUCHY sur $\Big]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\Big[$, et en identifiant les coefficients (les calculs ont déjà été faits dans la partie analyse), on trouve que $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n} v_k v_{n-k}$. Comme $v_0=u_0=1$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence, par récurrence forte, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_n$. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est bien de rayon $R=\frac{1}{4}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Par exemple, $u_0=\frac{(2.0)!}{0!(0+1)!}=1$, $u_1=\frac{(2.1)!}{1!(1+1)!}=1$, $u_2=\frac{(2.2)!}{2!(2+1)!}=2$ et $u_3=\frac{(2.3)!}{3!(3+1)!}=5$ qui confirme les calculs de la question **b.**. Et on a $u_4=\frac{(2.4)!}{4!(4+1)!}=14$ et $u_5=\frac{(2.5)!}{5!(5+1)!}=42$.

**10.113** **a.** $f$ est définie comme la somme de la série entière lacunaire $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ où $a_n=1$ si $n$ est un carré et $a_n=0$ sinon. Comme $(a_n x^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $(a_{n^2}x^{n^2})_{n\geqslant 0}$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si $|x|\leqslant 1$, la rayon de $R$ de cette série entière vaut $R=1$. Pour $x=\pm 1$, cette série est grossièrement divergente donc le domaine de définition de $f$ vaut $I=]-1;1[$.

**b.** En tant que somme d'une série entière de rayon $1$, d'après le cours, $f$ est de classe $C^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, donc a fortiori continue sur $I$.

**c.** Comme on étudie $f$ au voisinage de $1$, on peut se contenter de prendre $x\in]0;1[$, et de poser la fonction

$h_x : t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln(x)}$ qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $h_x(t) = e^{t^2 \ln(x)} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées ($\ln(x) < 0$).

Comme la fonction $h_x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\forall k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_k^{k+1} h_x(t)dt \leqslant x^{k^2} = h_x(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} h_x(t)dt$. On somme pour $k$ allant de $0$ à $+\infty$ à gauche et de $1$ à $+\infty$ à droite (l'intégrale et la série convergent) ce qui donne par CHASLES l'encadrement $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} x^{t^2}dt + h_x(0) = \int_0^{+\infty} x^{t^2}dt + 1$.

En posant $t = \dfrac{u}{\sqrt{-\ln(x)}} = \varphi(u)$, $\varphi$ étant une bijection strictement croissante de classe $C^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, par changement de variable, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2\ln(x)}dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}}$ d'après l'intégrale de GAUSS rappelée. Ainsi, on a l'équivalent $f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-\pi}{\ln(x)}}$ car $1 \underset{1^-}{=} o\left(\sqrt{\dfrac{1}{-\ln(x)}}\right)$ puisque $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}} = +\infty$.

## 10.8 Officiel de la Taupe

**10.114** Par D'ALEMBERT (ou comparaison) par exemple, le rayon de convergence de cette série entière est égal à $R = 1$. De plus, par RIEMANN, il y a convergence en $x = 1$ et $x = -1$ donc $D = [-1; 1]$.
On sait de plus, même si ce n'est pas demandé, que $S(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $S(-1) = -\dfrac{\pi^2}{12}$. On a aussi $S(0) = 0$.
$S$ est dérivable sur l'intervalle ouvert de convergence et $\forall x \in [0; 1[$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k} > 0$ donc $S$ est strictement croissante sur $[0; 1[$. De plus, la convergence de cette série de fonctions est normale sur $[0; 1]$ car en notant $u_k : x \mapsto \dfrac{x^k}{k^2}$, on a $||u_k||_{\infty,[0;1]} = \dfrac{1}{k^2}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge.
Comme les $u_k$ sont continues, par théorème, la fonction $S$ est continue sur $[0; 1]$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} S(x) = S(1) = A$.
Tout ce qui précède justifie que $S$ réalise une bijection strictement croissante entre $[0; 1]$ et $[0; A]$.
Posons $S_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2}$, cette fonction $S_n$ est strictement croissante (par dérivée) sur $\mathbb{R}_+$, elle y est continue et elle admet les limites $0$ et $+\infty$ aux bornes de $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de la bijection, l'équation $(E_n)$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ : on la note $x_n = S_n^{-1}(a) > 0$.
• La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante car $S_n(x_n) = a = S_{n+1}(x_{n+1}) > S_n(x_{n+1})$ et on se sert de la stricte croissance de $S_n$ pour avoir $x_n > x_{n+1}$ si $n \geqslant 1$ : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge car elle est minorée par $0$.
• Supposons que $a > A$, alors comme $S_n(x_n) = a > A = S(1) > S_n(1)$, on a $x_n > 1$. Si on avait $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell > 1$, on aurait $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(\ell) = +\infty$ car $\ell > R$ ; mais on aurait aussi $S_n(x_n) > S_n(\ell)$ ce qui montrerait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x_n) = +\infty$ et ceci est contraire à la construction de $x_n$ : d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.
• Supposons que $a \leqslant A$, alors pour $n \geqslant 1$, on a $S_n(x_n) = a = S(S^{-1}(a)) > S_n(S^{-1}(a))$ donc $x_n > S^{-1}(a)$. Supposons que $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n > S^{-1}(a)$, alors comme précédemment, on ne peut avoir que $\ell \leqslant 1$ et alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(\ell) = S(\ell) > S(S^{-1}(a)) = a$. Mais comme $S_n(x_n) > S_n(\ell)$, on aurait aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x_n) > a$ ce qui contredit le fait que $S_n(x_n) = a$. Par conséquent, on ne peut avoir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = S^{-1}(a)$.

**10.115** Cette série converge car $u_n > 0$ et $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(2n-1)}$ a $R = 1$ pour rayon de convergence par D'ALEMBERT par exemple, on note $f$ sa fonction somme de la variable réelle définie sur $[-1; 1]$. En notant $u_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n(2n-1)}$, $||u_n||_{\infty,[-1,1]} = \dfrac{1}{n(2n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n^2}$ converge par RIEMANN donc la convergence est uniforme sur $[-1; 1]$ et $f$ est continue sur $[-1; 1]$.

On décompose $\dfrac{1}{n(2n-1)}$ en éléments simples : $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{1}{n(2n-1)} = \dfrac{2}{2n-1} - \dfrac{1}{n}$ donc, en faisant attention au fait que les séries entières suivantes divergent en $1$ : $\forall x \in ]-1;1[,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x^n}{2n-1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

On connaît ces développements : $\forall x \in ]0;1[,\ f(x) = 2\sqrt{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(\sqrt{x})^{2n-1}}{2n-1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = 2\sqrt{x}\mathrm{Argth}\left(\sqrt{x}\right) + \ln(1-x)$ puis $\forall x \in ]-1;0[,\ f(x) = 2\sqrt{-x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n-1}}{2n-1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -2\sqrt{-x}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right) + \ln(1-x)$.

Dans l'énoncé, il est demandé $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n n(2n-1)} = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{Argth}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln 2 = \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \ln 2$.

Mais par continuité de $f$ en $1$ et $-1$, on a aussi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(2n-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \Big(2\sqrt{x}\mathrm{Argth}\left(\sqrt{x}\right) + \ln(1-x)\Big)$ et aussi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(2n-1)} = \lim\limits_{x\to -1^+} \Big(-2\sqrt{-x}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right) + \ln(1-x)\Big) = \ln(2) - \dfrac{\pi}{2}$.

$2\sqrt{x}\mathrm{Argth}\left(\sqrt{x}\right) + \ln(1-x) = \sqrt{1-t}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}}\right) + \ln(t) = 2\sqrt{1-t}\ln\left(1+\sqrt{1-t}\right) + \ln(t)\Big(1-\sqrt{1-t}\Big)$ en posant $x = 1-t$. Or $\lim\limits_{t\to 0^+}\Big(1-\sqrt{1-t}\Big)\ln(t) = 0$ par DL et croissance comparée et $f(1)$ est trouvé (on peut le faire avec l'équivalent classique de la série harmonique grâce aux sommes partielles de cette série).

Au final : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(2n-1)} = \ln(2) - \dfrac{\pi}{2}$ ; $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(2n-1)} = \ln(4)$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n n(2n-1)} = \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \ln 2$.

**10.116** Comme $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ est de degré $p \geqslant 1$ ($a_p \neq 0$), en écrivant $P(x) = a_p x^p\Big(1 + \dfrac{a_{p-1}}{a_p x} + \cdots + \dfrac{a_0}{a_p x^p}\Big)$ pour $x \neq 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} |P(x)| = +\infty$ donc il existe bien $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |P(n)| \geqslant 1$.
Dès que $n \geqslant n_0$, on a donc $|P(n)a_n| \geqslant |a_n|$ et on sait qu'alors on peut conclure que $R' \leqslant R$.
La famille proposée est une famille de $p+1$ polynômes de degrés échelonnés donc elle est libre et comme $\dim(\mathbb{R}_p[X]) = p+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_p[X]$. On décompose alors le polynôme $P$ dans cette base $P = \sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k P_k$ en notant $P_0 = 1$ et $P_k = \prod\limits_{i=1}^{k}(X-i+1)$ si $k \geqslant 1$ ; alors $P(n)a_n x^n = \alpha_0 a_n x^n + \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^n$.
On sait que la série dérivée (et par récurrence les dérivées successives) a le même rayon de convergence que la série initiale. Ainsi, si $|x| < R$, toutes les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^n$ convergent et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^n = x^k \sum\limits_{n=k}^{+\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = x^k f^{(k)}(x)$. Par somme de séries convergentes, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(n)a_n x^n$ converge ce qui permet d'affirmer que $R' \geqslant R$ et enfin que $R = R'$.

De plus, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(n)a_n x^n = \alpha_0 f(x) + \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^n\Big) = \sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k\left(x^k f^{(k)}(x)\right)$.

Soit ici $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^2+1}{n!}x^n$ qui s'obtient en prenant $P = X^2+1$ et $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ : le rayon est clairement $R = +\infty$. On décompose $X^2+1 = X(X-1) + X + 1$ et $f(x) = e^x$ donc, avec les résultats précédents : $g(x) = f(x) + xf'(x) + x^2 f''(x) = (x^2+x+1)e^x$ et on obtient alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^2 2^n + 2^n}{n!}x^n = g(2x) = (4x^2+2x+1)e^{2x}$.

**10.117** Si $x \neq 0$, en notant $u_n = \dfrac{n^2-1}{n+2}x^n$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} nx^n$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ bornée ssi $|x| < 1$ donc le rayon de convergence de cette série est $R = 1$. Comme $n^2 - 1 = (n+1)(n+2) - 3(n+2) + 3$, pour $x \in ]-1;0[\cup]0;1[$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n - 3\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n + \dfrac{3}{x^2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+2}}{n+2}$ donc $S(x) = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' - \dfrac{3}{1-x} - \dfrac{3}{x^2}\Big(\ln(1-x) + x\Big)$.

Ainsi : $S(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} - \dfrac{3}{1-x} - \dfrac{3}{x^2}\Big(\ln(1-x) + x\Big)$.

**10.118** **a.** Si $f$ est solution de $(E)$, alors $f$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$. Alors d'après l'équation $f'$ l'est aussi donc $f$ est de classe $C^1$. Par une récurrence facile, on en déduit que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $a > 0$, on pose le réel $M_p = \underset{x\in[-a;a]}{\text{Max}} |f^{(p)}(x)|$ (qui existe car $f^{(p)}$ est continue sur un segment). Comme on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{N},\ f^{(p+1)}(x) = f^{(p)}(x) + \lambda^p f^{(p)}(\lambda x)$, on a $M_{p+1} \leqslant 2M_p$ donc $M_p \leqslant 2^p M_0$ par récurrence immédiate. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, $\forall x \in [-a; a]$, $\left|f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \dfrac{2^{n+1}M_0|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ qui tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$ par croissance comparée. Ainsi, $f$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
**b.** Par récurrence avec la formule de la question précédente, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = f(0)\prod\limits_{i=0}^{k-1}(1+\lambda^i) = a_k f(0)$.
Comme $f$ solution de $(E)$ est DSE sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n x^n}{n!}$ donc les solutions de $(E)$ forment une droite (équation linéaire) engendrée par la fonction $\varphi : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\prod\limits_{k=0}^{n-1}(1+\lambda^k)\dfrac{x^n}{n!}$.
**c.** Soit $v_n = \prod\limits_{k=0}^{n}(1+\lambda^k) = a_{n+1} > 0$ car $\lambda \in ]-1;1[$. Donc $\ln(v_n) = \sum\limits_{k=0}^{n}\ln(1+\lambda^k)$ avec $\ln(1+\lambda^k) \underset{+\infty}{\sim} \lambda^k$ or $\sum\limits_{n\geqslant 0}\lambda^n$ converge absolument donc $\sum\limits_{n\geqslant 0}\ln(1+\lambda^n)$ converge aussi absolument donc converge (vers $\ell$) ce qui assure la convergence de la suite de l'énoncé vers un réel $K(\lambda) = e^\ell > 0$.
**d.** À faire.

**10.119** **a.** La fonction $g : y \mapsto \dfrac{\ln(|1-y|)}{y}$ est continue sur $]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$ avec un prolongement par continuité en $0$ avec $g(0) = -1$. Ainsi $f$ est déjà définie sur $]-\infty;1[$. De plus $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(|1-y|)}{y}dy$ converge car $\varphi(y) \underset{1}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1-y}}\Big)$. De même $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(|1-y|)}{y}dy$ converge si $x > 1$. Par conséquent, $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.
**b.** Soit $x \in ]-1;1[$, alors $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-y)}{y}dy = -\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y^{n-1}}{n}dy$ et en posant $g_n(y) = \dfrac{y^{n-1}}{n}$, on a $||g_n||_{\infty,[0;x]} \leqslant |x|^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ avec $\sum\limits_{n\geqslant 1}|x|^n$ qui converge donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement sur le segment $[0;x]$ et on a donc $f(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\displaystyle\int_0^x g_n(y)dy = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$ et $f$ est DSE.
On reprendre l'étude sur l'intervalle $[0;1[$ mais on n'a plus convergence normale, par contre les fonctions $g_n$ sont intégrables sur $[0;1[$ avec $g$ continue sur $[0;1[$ et $\displaystyle\int_0^1 |g_n(y)|dy = \frac{1}{n^2}$ donc la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\displaystyle\int_0^1 |g_n|$ converge. Ainsi, d'après le TITT, on a $f(1) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\displaystyle\int_0^1 g_n = -\frac{\pi^2}{6}$.

**10.120** **a.** En intégrant le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \text{Arcsin}'(x)$, on a vu dans le cours que $\forall x \in ]-1;1[,\ \text{Arcsin}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n+1}$ si $b_n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}$.
**b.** Par produit de Cauchy de séries numériques absolument convergentes, $f : t \mapsto (\text{Arcsin}(t))^2$ est développable en série entière sur $]-1;1[$ mais les coefficients ne sont pas faciles à calculer avec cette méthode.
**c.** Par contre, $f'(t) = 2\dfrac{\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ donc $f''(t) = \dfrac{2}{1-t^2} + 2\dfrac{t\,\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}(1-t^2)}$ donc $(1-t^2)f''(t) = 2 + tf'(t)$ pour $t \in ]-1;1[$. Comme $f$ est paire et $f(0) = 0$, il existe une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $a_0 = 0$ et $\forall t \in ]-1;1[,\ f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n}$. Alors $tf'(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2na_n t^{2n}$, $f''(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+2)(2n+1)a_{n+1}t^{2n}$ et

$t^2f''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n t^{2n}$. En reportant dans l'équation différentielle et en regroupant les termes, on a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \big((2n+2)(2n+1)a_{n+1} - 2n(2n-1)a_n - 2na_n\big)t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \big((2n+2)(2n+1)a_{n+1} - 4n^2a_n\big)t^{2n} = 2$ et par unicité des coefficients (rayon $1 > 0$), on a $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \dfrac{4n^2}{(2n+2)(2n+1)}a_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{4(n-1)^2}{(2n)(2n-1)}a_{n-1} = \dfrac{4(n-1)^2}{(2n)(2n-1)} \times \dfrac{4(n-2)^2}{(2n-2)(2n-3)}a_{n-2} = \ldots$ et on continue jusqu'à $a_2 = \dfrac{4 \times 1^2}{4 \times 3}a_1$ pour avoir $a_n = \dfrac{4^{n-1}(n-1)^2 \times \cdots \times 1^2}{(2n) \times (2n-1) \times \cdots \times 4 \times 3}a_1 = \dfrac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}$. On peut bien sûr prouver cette relation par récurrence une fois qu'on l'a conjecturée.

Ainsi, $\forall t \in ]-1;1[,\ f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!}t^{2n}$. Comme dit plus haut, on peut aussi calculer, par produit de Cauchy, $f(t)^2 = f(t) \times f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2(2k+1)} \times \dfrac{(2(n-k-1))!}{4^{n-k-1}((n-k-1)!)^2(2n-2k-1)}\Big)x^{2n}$ car le terme en $x^{2n}$ provient du produit des termes en $b_kx^{2k+1}$ et $b_{n-k-1}x^{2n-2k-1}$ (pour $k \in [\![0;n-1]\!]$) de la série entière de la question **a.**. En simplifiant et en identifiant par unicité du développement en série entière, on obtient la relation bizarre : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!} = \dfrac{1}{4^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\binom{2k}{k}\binom{2n-2k-2}{n-k-1}}{(2k+1)(2n-2k-1)}$.

**10.121** **a.** $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}$ est clairement strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(x_n) = 1$ car $1 \in [0;+\infty[$.

**b.** $\forall t \geqslant 0,\ f_{n+1}(t) \geqslant f_n(t)$ donc $1 = f_{n+1}(x_{n+1}) \geqslant f_n(x_{n+1})$ donc $f_n(x_{n+1}) \leqslant f_n(x_n) = 1 \Longrightarrow x_{n+1} \leqslant x_n$ car $f_n$ est strictement croissante. Ainsi $(x_n)_{\geqslant 1}$ est décroissante minorée par $0$ donc elle converge vers $\ell \geqslant 0$.
$\forall n \geqslant 1,\ f_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x_n^k}{k} = 1 \leqslant -\ln(1-x_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x_n^k}{k}$ donc $x_n \geqslant 1 - \dfrac{1}{e}$. En passant à la limite, $\ell \geqslant 1 - \dfrac{1}{e}$.
Si on avait $\ell > 1 - \dfrac{1}{e}$, alors on aurait $-\ln(1-\ell) > 1$ donc il existe un entier $n$ tel que la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\ell^k}{k} > 1$. Mais par stricte décroissance de la suite, $x_n > \ell$ donc, comme $f_n$ est strictement croissante : $f_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x_n^k}{k} > \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\ell^k}{k} = f_n(\ell) > 1$ ce qui est impossible. Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1 - \dfrac{1}{e}$.

**10.122** $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et par le développement limité $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, $f$ est continue en $0$.

Mais on a mieux, $\cos$ est DSE sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ donc si $x \neq 0$, on a $f(x) = \dfrac{1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n)!}}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n+2)!}$. Cette relation étant aussi valable en $0$ car $f(0) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{(-1)^0}{(2.0+2)!}$, on a donc $f$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(2n+1)}(0) = 0$ et $f^{(2n)}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{(2n+2)!} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

**10.123** **a.** On sait que $\forall x \in ]-1;1[,\ \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ avec rayon $1$ et convergence sur $[-1;1[$.

**b.** Les coefficients de cette série entière sont $a_{2n} = -\dfrac{1}{4n}$ si $n \geqslant 1$ et $a_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{4n+2} = \dfrac{1}{4n+2}$ si $n \geqslant 0$. Par croissance comparée ou d'Alembert, le rayon de cette série est donc $R = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in ]-1;1[$, on a $S_{2n-2} = \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{k+1}}{2k+2}\right) = \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{x^{2k+2}}{2k+2} - \frac{x^{2k+2}}{2k+2} - \frac{x^{k+1}}{2k+2}\right)$ et on sépare pour avoir $S_{2n-2} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{x^j}{j} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \frac{(x^2)^m}{m} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p}$. Il suffit ensuite de faire tendre $n$ vers $+\infty$ pour avoir $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2}\right) = -\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) - \frac{1}{2}\ln(1-x) = \frac{1}{2}\ln(1+x)$.

**10.124** **a.** Soit $R > 0$ et $f$ une fonction DSE sur $]-R;R[$ : $\forall x \in ]-R;R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On sait qu'on peut dériver terme à terme sur $]-R;R[$ et avoir $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$ donc $xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$. De même, $f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1}$ donc $xf''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n$. Si $f$ est solution de $(E)$, on remplace dans l'équation et on regroupe les termes : $\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + na_n - pa_n\Big)x^n = 0$ et par unicité des coefficients dans un DSE, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)^2 a_{n+1} = (p-n)a_n \ \ (R)$.
Réciproquement, soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)^2 a_{n+1} = (p-n)a_n$, alors soit $p$ est un entier et la suite est nulle à partir d'un certain rang, soit $p \notin \mathbb{N}$ et alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ donc le rayon de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vaut $R = +\infty$ dans les deux cas (par le critère de D'Alembert. En reportant dans l'équation, $f$ donnée par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution non nulle de $(E)$.

**b.** Si $p \in \mathbb{N}$, et si $f$ est la solution DSE de $(E)$ avec $a_0 = 1$ (celle de la question **a.**), on a $a_{p+1} = 0$ d'après la relation de récurrence $(R)$. La même relation montrer alors que $\forall n \geqslant p,\ a_n = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ et $f$ est une fonction polynomiale de degré $p$ (car $a_p \neq 0$) de l'équation $(E)$.

**10.125** Comme $\big((-1)^n x^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$, le rayon de cette série est $R = 1$. On sait que $\forall x \in ]-1;1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ donc $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{2}$.
Si $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ converge, on a convergence de $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ pour $x = 1$ donc le rayon de $R$ de cette série vérifie $R \geqslant 1$.

Supposons $R = 1$ et posons $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ pour $x \in ]-1;1]$. Posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$, on sait que $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ (reste d'une série convergente). En posant $R_{-1} = f(1)$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = R_{n-1} - R_n$.
On effectue une transformation d'Abel (c'est hors programme mais je ne vois pas comment faire sans) :
$\forall x \in [0;1],\ f(x) - f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x^n - 1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k(x^k - 1)$.
Or $\sum_{k=0}^{n} b_k(x^k-1) = \sum_{k=0}^{n} (R_{k-1} - R_k)(x^k - 1) = \sum_{k=0}^{n} R_{k-1}(x^k-1) - \sum_{k=0}^{n} R_k(x^k - 1)$. On change d'indice dans la première somme et $f(x) - f(1) = \sum_{k=-1}^{n-1} R_k(x^{k+1}-1) - \sum_{k=0}^{n} R_k(x^k-1) = R_n(1-x^n) - \sum_{k=0}^{n-1} R_k(x^k - x^{k+1})$.
Il vient donc en passant à la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ : $f(x) - f(1) = -\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1})$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |R_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Or $x \mapsto \sum_{n=0}^{n_0} R_n(x^n - x^{n+1})$ est continue en 1 et vaut 0 en 1, $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in [1-\alpha;1],\ \left|\sum_{n=0}^{n_0} R_n(x^n - x^{n+1})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, $\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [1-\alpha;1]$ :
$|f(x) - f(1)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1})\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{n_0} R_n(x^n - x^{n+1})\right| + \left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

car $\forall x\in[0;1],\ 0\leqslant x^n-x^{n+1}\leqslant 1$ donc $\left|\sum\limits_{n=n_0+1}^{+\infty}R_n(x^n-x^{n+1})\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=n_0+1}^{+\infty}(x^n-x^{n+1})=\frac{\varepsilon}{2}x^{n_0+1}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

Par conséquent $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in[1-\alpha;1],\ |f(x)-f(1)|\leqslant\varepsilon$ et $f$ est bien continue en $1$.

**10.126** Comme $\left(\dfrac{x^n}{3n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x|\leqslant 1$ par croissances comparées, le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant0}\dfrac{x^n}{3n+2}$ vaut $R=1$. On pose $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{3n+2}$ pour $x\in[-1;1[$. En effet, la série converge si $x\in]-1;1[$ d'après le cours et $\sum\limits_{n\geqslant0}\dfrac{(-1)^n}{3n+2}$ converge aussi par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{3n+2}\right)_{n\geqslant0}$ est décroissante et tend vers $0$. Par contre, la série $\sum\limits_{n\geqslant0}\dfrac{1}{3n+2}$ diverge car $\dfrac{1}{3n+2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{3n}$ et que la série harmonique diverge.

Posons $g(x)=x^2f(x^3)$, alors $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{3n+2}}{3n+2}$. Le rayon de cette série entière est aussi $1$, on sait donc que $g$ est dérivable sur $]-1;1[$ et que $g'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^{3n+1}=\dfrac{x}{1-x^3}$. Ainsi, puisque $g(0)=0$, par le théorème fondamental de l'intégration, $\forall x\in]-1;1[,\ g(x)=\displaystyle\int_0^x g'(t)dt=\int_0^x\frac{tdt}{1-t^3}$.

Or, comme $(1-X^3)=(1-X)(1+X+X^2)$, on peut décomposer $\dfrac{X}{1-X^3}=\dfrac{a}{(1-X)}+\dfrac{bX+c}{1+X+X^2}$ avec $a,b,c$ des réels. En réduisant au même dénominateur, en identifiant et en résolvant le système, on trouve sans peine $\dfrac{X}{1-X^3}=\dfrac{1}{3(1-X)}+\dfrac{X-1}{3(1+X+X^2)}$. Ainsi, pour $x\in]-1;1[$, en faisant apparaître des dérivées usuelles, $g(x)=\displaystyle\int_0^x\left(\frac{1}{3(1-t)}+\frac{t-1}{3(1+t+t^2)}\right)dt=\frac13\int_0^x\frac{dt}{1-t}+\frac16\int_0^x\frac{(2t+1)dt}{1+t+t^2}-\frac12\int_0^x\frac{dt}{1+t+t^2}$. En mettant sous forme canonique, $\dfrac{1}{1+t+t^2}=\dfrac{2}{\sqrt3}\dfrac{(2/\sqrt3)}{1+\left(\frac{2t+1}{\sqrt3}\right)^2}$, on a l'expression de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles

$$g(x)=\left[-\frac{\ln(1-t)}{3}+\frac{\ln(1+t+t^2)}{6}-\frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt3}\right)}{\sqrt3}\right]_0^x=\frac16\ln\left(\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2}\right)-\frac{\sqrt3}{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt3}\right)+\frac{\sqrt3\pi}{18}$$

car $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt3}\right)=\dfrac{\pi}{6}$. On peut maintenant revenir à l'expression de $f(x)$.

Si $x=0$, $f(x)=\dfrac12$. Si $x\neq0$, soit $\sqrt[3]{x}$ l'antécédent de $x$ par la bijection $y\mapsto y^3$ de $]-1;1[$ dans $]-1;1[$, alors

$$f(x)=\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}g(\sqrt[3]{x})=\frac{1}{6(\sqrt[3]{x})^2}\ln\left(\frac{1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{(1-\sqrt[3]{x})^2}\right)-\frac{\sqrt3}{3(\sqrt[3]{x})^2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt3}\right)+\frac{\sqrt3\pi}{18(\sqrt[3]{x})^2}.$$

**10.127** Soit $r\in]0;1]$, alors $(na_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée puisque $(na_n)_{n\geqslant0}$ tend vers $0$. Le rayon de convergence $R$ de $\sum\limits_{n\geqslant0}a_nx^n$ vérifie donc $R\geqslant1$. Soit $\varepsilon>0$, il existe un rang $n_0$ tel que $\forall n\geqslant n_0,\ |na_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, si $n\geqslant n_0$ et $x\in]0;1[$, il vient $\left|f(x)\right|=\left|\sum\limits_{n=0}^{n_0-1}a_nx^n+\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}a_nx^n\right|\leqslant\sum\limits_{n=0}^{n_0-1}|a_n|x^n+\frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$. On en déduit que $\left|f(x)\right|\leqslant\sum\limits_{n=0}^{n_0-1}|a_n|x^n-\frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=1}^{n_0-1}\frac{x^n}{n}+\frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ De plus, comme $\varphi:x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{n_0-1}|a_n|x^n-\frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=1}^{n_0-1}\frac{x^n}{n}$ est continue en $1$, elle est bornée et on a $\varphi(x)\underset{1}{=}o(\ln(1-x))$. Il existe donc $n_1\geqslant n_0$ tel que $\forall n\geqslant n_1,\ |\varphi(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}|\ln(1-x)|$. En combinant ces deux renseignements, $\forall n\geqslant n_1,\ \left|f(x)\right|\leqslant\varepsilon|\ln(1-x)|$ et on a bien $f(x)\underset{1}{=}o(\ln(1-x))$.

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_{2n}=0$ et $a_{2n+1}=\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Alors $(na_n)$ ne tend pas vers $0$ alors que $f(x)=\mathrm{Arctan}(x)$ (rayon de convergence $1$) est bornée donc on a bien $f(x)\underset{1}{=}o(\ln(1-x))$.

Si on impose que tous les $a_n$ sont positifs, il suffit de prendre $a_n=\dfrac{1}{n}$ si $n$ est une puissance de $2$ et

$a_n = 0$ sinon, alors la série entière est $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{2^n}}{2^n}$ dont le rayon vaut 1 par croissance comparée. En notant $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2^n}}{2^n}$, on a convergence normale sur $[-1;1]$ donc $f$ est continue sur $[-1;1]$ donc bornée au voisinage de 1 ce qui garantit que $f(x) = o\big(\ln(1-x)\big)$.

Conclusion : si, au voisinage de $1^-$, $f(x) = o\big(\ln(1-x)\big)$, on ne peut pas conclure que $(na_n)$ tend vers 0.

**10.128** • Avec cette hypothèse $\sum |a_n|R^n$ converge, la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R$ converge normalement sur $[-R;R]$ car en posant $u_n(x) = a_n x^n$, on a $||u_n||_{\infty,[-R;R]} = |a_n|R^n$. Comme toutes les $u_n$ sont continues sur $[-R;R]$, la somme $f$ de cette série est continue sur $[-R;R]$ donc a fortiori elle est continue en $R$.

• La fonction $f$ est prolongeable par continuité (faire un DL) en 0 en posant $f(0) = -2$, elle est continue et strictement négative sur $]-1;1[$. On a $f(t) \underset{1}{\sim} \ln(1-t)$ or $\ln$ est intégrable sur $]0;1]$ donc $t \mapsto \ln(1-t)$ l'est sur $[0;1[$. De même $f(t) \underset{-1}{\sim} \ln(1+t)$ or $\ln$ est intégrable sur $]0;1]$ donc $t \mapsto \ln(1+t)$ l'est sur $]-1;0]$. Ainsi $f$ est intégrable sur $]-1;1[$. Ensuite, on constate que $f(t) = -2\dfrac{\text{Argth}\,(t)}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = -2$ donc $f$ est développable en série entière en $\forall t \in ]-1;1[,\ f(t) = -2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2n}}{2n+1}$.

Soit $F$ la primitive de $f$ qui s'annule en 0, on a $\forall t \in ]-1;1[,\ F(t) = -2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}$. L'intégrale à calculer vaut $\lim\limits_{t\to 1^-} F(t) - \lim\limits_{t\to -1^+} F(t) = 2\lim\limits_{t\to 1^-} F(t) = -4\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ (par imparité de $F$ et convergence normale sur $[-1;1]$ de la série associée). Alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt = -\frac{\pi^2}{2}$.

**10.129** Par croissance comparée, la suite $\left(\dfrac{(-1)^n t^n}{\sqrt{1+n^2}}\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $t \in [-1;1]$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ vaut $R = 1$. Par théorème, on a donc convergence normale sur tout segment inclus dans $]-1;1[$ donc en particulier sur tout segment de $[0;1[$. La somme $f$ est donc de classe $C^\infty$ puisque la somme d'une série entière. $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est clairement alternée et la suite $|v_n|$ est décroissante donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge par le CSSA. De plus, $|v_n| = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^n t^n}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)\sqrt{1+n^2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge même absolument. Exercice trop facile, ce ne doit pas être le bon énoncé.

**10.130** On sait que $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n x^n$ converge absolument pour $x \in ]-R;R[$. Mais il n'y pas convergence normale ni uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ en général sur $]-R;R[$ si $u_n : x \mapsto b_n x^n$ (exemple de la série géométrique de rayon $R = 1$). Par contre, il y a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ sur tout segment inclus dans $]-R;R[$.

Soit $n \geqslant 1$ et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble de toutes les partitions de $[\![1;n]\!]$ de sorte que $p_n = \text{card}\,(\mathcal{P}_n)$.

Si $n = 1$, $\mathcal{P}_1 = \{\{\{1\}\}\}$ donc $p_1 = 1$.

Si $n = 2$, $\mathcal{P}_2 = \{\{\{1,2\}\},\{\{1\},\{2\}\}\}$ donc $p_2 = 2$.

Si $n = 3$, $\mathcal{P}_3 = \{\{\{1,2,3\}\},\{\{1,2\},\{3\}\},\{\{1,3\},\{2\}\},\{\{2,3\},\{1\}\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\}\}$ donc $p_3 = 5$.

Pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_{n+1} = \bigcup\limits_{j=0}^{n} \mathcal{P}_{n+1,j}$ avec $\mathcal{P}_{n+1,j} = \{\{U_1,\ldots,U_p\} \in \mathcal{P}_{n+1} \mid \text{card}\,(U_i) = j+1 \text{ si } n+1 \in U_i\}$.

En effet, l'élément $n+1$ appartenant à $[\![1;n+1]\!]$, il appartient à une seule partie $U_i$ (avec $i \in [\![1;p]\!]$) de la partition $\{U_1,\ldots,U_p\}$ de $[\![1;n+1]\!]$ et le cardinal de $U_i$ est au moins égal à 1 et au maximum égal à $n+1$ donc $\text{card}\,(U_i) = j+1$ avec $j \in [\![0;n]\!]$. Cette réunion est disjointe donc $\{\mathcal{P}_{n+1,0},\cdots,\mathcal{P}_{n+1,n}\}$ est une partition de $\mathcal{P}_{n+1}$ (mise en abîme) donc $p_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \operatorname{card}(\mathcal{P}_{n+1,j})$.

Pour $j \in [\![0; n-1]\!]$ et pour construire un élément de $\mathcal{P}_{n+1,j}$, protocole de choix :

- on choisit les $j$ éléments qui vont être avec $n+1$ dans la partie $U_i$ de la partition : $\binom{n}{j}$ choix.
- il reste $n+1-(j+1) = n-j$ entiers dans $[\![1; n+1]\!] \setminus U_p$ qu'il faut partitionner : on peut le faire de $p_{n-j}$ façons par construction (seul le nombre de termes à partitionner compte).

Par conséquent, $\operatorname{card}(\mathcal{P}_{n+1,j}) = \binom{n}{j} p_{n-j}$. C'est aussi vrai pour $j = n$ par convention car $p_0 = 1$ et $\mathcal{P}_{n+1,n} = \{\{[\![1; n+1]\!]\}\}$ donc $\operatorname{card}(\mathcal{P}_{n+1,n}) = 1 = \binom{n}{n} p_0$. Alors, $\forall j \in [\![0; n]\!]$, $\operatorname{card}(\mathcal{P}_{n+1,j}) = \binom{n}{j} p_{n-j}$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, il vient $p_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \operatorname{card}(\mathcal{P}_{n+1,j}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p_{n-j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$ en posant $k = n-j$.

On a même $p_1 = 1 = \binom{0}{0} p_0$ par convention d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$.

On a $p_0 = p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$, $p_4 = 15 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} p_k = p_0 + 3p_1 + 3p_2 + p_3$. On constate que $0 \leqslant p_n \leqslant n!$ pour $n \in [\![0; 4]\!]$. Soit $n \geqslant 2$ tel que $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $0 \leqslant p_k \leqslant k!$, alors $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$ donc $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leqslant n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e\, n! \leqslant (n+1)!$ car $e \sim 2,7 \leqslant n+1$.

Par principe de récurrence forte, on en déduit que $\forall n \geqslant 0$, $0 \leqslant p_n \leqslant n!$, c'est-à-dire que $0 \leqslant \frac{p_n}{n!} \leqslant 1$. Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ est égal à 1, par comparaison, on trouve $R \geqslant 1$.

$\forall x \in ]1; 1[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_{n+1}}{n!} x^n$ après changement d'indice. Ainsi, avec la relation de récurrence trouvée ci-dessus, ceci se transforme en $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big( \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} \Big) x^n$. Par produit de Cauchy, puisque le rayon de $\sum_{n \geqslant 0} \frac{p_k}{k!} x^k$ est au moins égal à 1 et que celui de $\sum_{k \geqslant 0} \frac{x^k}{k!}$ vaut $+\infty$, on a $\forall x \in ]-1; 1[$, $f'(x) = e^x f(x)$. On intègre classiquement, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in ]-1; 1[$, $f(x) = \lambda e^{e^x}$. Or $f(0) = p_0 = 1$ donc $\lambda = \frac{1}{e}$. Par conséquent $\forall x \in ]-1; 1[$, $f(x) = e^{e^x - 1}$. Puisque la fonction $f$ est développable en série entière (au moins sur $]-1; 1[$ mais certainement sur $\mathbb{R}$), on sait que $\forall x \in ]1; 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$ ce qui donne, en identifiant les coefficients de cette série entière : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = f^{(n)}(0)$.

**10.131** L'ensemble des $n!$ permutations de $[\![1; n]\!]$ se partitionne selon le nombre de points fixes. Notons $D_{n,k}$ le nombre de permutations de $[\![1; n]\!]$ avec exactement $k$ points fixes. Alors $n! = \sum_{j=0}^{n} D_{n,j}$. Or pour avoir une permutation de $[\![1; n]\!]$ avec $j$ points fixes, il faut d'abord choisir ces $j$ points fixes : $\binom{n}{j}$ possibilités ; puis construire pour les $n-j$ entiers restants une permutation sans nouveau point fixe : $D_{n-j}$ possibilités.

Par "indépendance" de ces choix, on a donc $D_{n,j} = \binom{n}{j} D_{n-j}$ donc $n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D_{n-j}$ ce qui donne bien $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!$ en effectuant le changement d'indice $k = n-j$.

Comme $D_n \leqslant n!$, on a $0 \leqslant \frac{D_n}{n!} \leqslant 1$ et le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ vaut 1. On sait qu'alors on a $R \geqslant 1$.

$\forall x \in ]-1;1[$, $e^x S(x) = \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!}x^n\Big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \times \frac{D_k}{k!}\Big)x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k\Big)x^n$ par produit de CAUCHY. Ainsi $e^x S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ d'après le calcul combinatoire précédent et on conclut que $\forall x \in ]-1;1[$, $S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$ donc $R = 1$.

Par produit de CAUCHY : $S(x) = \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n\Big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\Big)x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{D_n}{n!}x^n$ pour $x \in ]-1;1[$. Par unicité des coefficients : $d_n = n!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{d_n}{n!} = \frac{1}{e}$.

**10.132** Posons $f_n : t \mapsto \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$, alors comme $0 < \left|\frac{1+t^2}{2}\right| < 1$ si $t \in [0;1[$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0;1[$ et on a la domination $|f_n| \leqslant 1$ où $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0;1[$. Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

$\forall t \in [0;1]$, on a $0 \leqslant t \leqslant \frac{1+t^2}{2}$ donc $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \leqslant a_n$. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge par RIEMANN et $R \leqslant 1$. Par le CSSA, $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge d'après ce qui précède donc $R \geqslant 1$. Ainsi : $R = 1$.

L'intervalle de convergence est $[-1;1[$ comme on vient de le voir.

On peut continuer l'exercice en exprimant, pour $x \in ]-1;1[$, $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ sous forme d'une seule intégrale pour le calculer explicitement et en profiter pour avoir $f(-1)$ ; en effet :

Pour $x \in ]-1;1[$, la convergence de la série de fonctions $u_n(t) = x^n\Big(\frac{1+t^2}{2}\Big)^n$ est normale sur $[0;1]$ car $||u_n||_\infty = |x|^n$ donc $f(x) = \int_0^1 \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{x(1+t^2)}{2}\Big)^n\Big)dt = \int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2}$ (série géométrique). Si $x \in ]-1;0[$,
$f(x) = \frac{2}{2-x}\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{x}{x-2}t^2}dt = \left[\frac{2}{\sqrt{x(x-2)}}\operatorname{Arctan}\Big(\sqrt{\frac{x}{x-2}}\,t\Big)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{x(x-2)}}\operatorname{Arctan}\Big(\sqrt{\frac{x}{x-2}}\Big)$.

Le critère spécial des séries alternées permet de majorer : $\Big|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\Big| \leqslant a_{n+1}|x|^{n+1} \leqslant a_{n+1}$. Ainsi, avec les notations habituelles : $||R_n||_{\infty,[-1;0]} \leqslant a_{n+1}$. Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc on a convergence uniforme de la série entière sur $[-1;0]$. Alors $f$ est continue sur $[-1;0]$ :
$f(-1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ car $\operatorname{Arctan}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\pi}{6}$.

**10.133** Posons $u_n = \frac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}}$, par croissance comparée, $u_n \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge. D'ALEMBERT montre que le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0}(2n^2+3n+1)x^n$ vaut $R = 1$. Posons donc $\forall x \in ]-1;1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n^2+3n+1)x^n$.

On écrit $2n^2+3n+1 = 2(n+2)(n+1) - 3(n+1)$ pour avoir $f(x) = 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)x^n - 3\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$ donc $f(x) = 2\Big(\frac{1}{1-x}\Big)'' - 3\Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \frac{4}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} = \frac{1+3x}{(1-x)^3}$. Enfin, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2}f\Big(\frac{1}{2}\Big) = 10$.

**10.134** Posons $u_n = n^{(-1)^n}$, alors $\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant n$ et les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} nx^n$ ont classiquement pour rayon 1 donc le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n}x^n$ est $R = 1$ par encadrement.

De plus, comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée, l'intervalle de convergence est $]-1;1[$.

En séparant termes pairs et impairs, on a $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n}x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Comme $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$, en dérivant et en multipliant par $x$ : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} = \dfrac{2x^2}{(1-x^2)^2}$. On sait que $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$. En sommant : $\forall x \in ]-1;1[$, $2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big)\big( = \text{Argth}\,(x)\big)$.
Ainsi, $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \dfrac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big)$.

**10.135** Il est bien connu que $\forall x \in ]-1;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{-1/2}{n}(-1)^n x^n$. Or, classiquement en introduisant les termes pairs manquants $\dbinom{-1/2}{n} = \dfrac{(-1/2)(-3/2)\cdots(-1/2-n+1)}{n!} = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ donc $\forall x \in ]-1;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!x^n}{4^n(n!)^2}$. On dérive et on obtient :
$\forall x \in ]-1;1[$, $\dfrac{1}{2}(1-x)^{-3/2} = \dfrac{1}{2(1-x)^{3/2}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n(2n)!x^{n-1}}{4^n(n!)^2}$ donc $\dfrac{1}{(1-x)^{3/2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2(n+1)(2(n+1))!x^n}{4^{n+1}((n+1)!)^2}$ qui se transforme en $\dfrac{1}{(1-x)^{3/2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n+1)(2n)!x^n}{4^n(n!)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\dbinom{2n}{n}\dfrac{x^n}{4^n}$.
Par produit de CAUCHY, $\forall x \in ]-1;1[$, $\dfrac{1}{(1-x)^{3/2}} = \dfrac{1}{1-x} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{(1-x)^{3/2}} = \Big(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} x^i\Big)\Big(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{(2j)!x^j}{4^j(j!)^2}\Big)$ qui vaut $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(2k)!}{4^n(k!)^2}\Big)x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{4^k}\dbinom{2k}{k}\Big)x^n$. En identifiant (les rayons sont strictement positifs) les coefficients dans ces deux formes de $(1-x)^{-3/2}$, on trouve bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{4^k}\dbinom{2k}{k} = \dfrac{2n+1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

**10.136** La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\ln(|1-t|)}{t}$ est continue sur $]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$ avec un prolongement par continuité en $0$ avec $g(0) = -1$. Ainsi $f$ est déjà définie sur $]-\infty;1[$. De plus $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(|1-t|)}{t}dt$ converge car $\varphi(t) \underset{1}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\Big)$. De même $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(|1-t|)}{t}dt$ converge si $x > 1$. Par conséquent, $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in ]-1;1[$, alors $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt = -\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}dt$ et en posant $g_n(t) = \dfrac{t^{n-1}}{n}$, on a $||g_n||_{\infty,[0;x]} \leqslant |x|^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ avec $\sum\limits_{n\geqslant 1} |x|^n$ qui converge donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement sur le segment $[0;x]$ et on a donc $f(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\displaystyle\int_0^x g_n(t)dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ et $f$ est DSE.
Le rayon de convergence est $R = 1$ en utilisant le critère de D'ALEMBERT par exemple.
On reprendre l'étude sur l'intervalle $[0;1[$ mais on n'a plus convergence normale, par contre les fonctions $g_n$ sont intégrables sur $[0;1[$ avec $g$ continue sur $[0;1[$ et $\displaystyle\int_0^1 |g_n(y)|dy = \frac{1}{n^2}$ donc la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\displaystyle\int_0^1 |g_n|$ converge. Ainsi, d'après le TITT, on a $f(1) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\displaystyle\int_0^1 g_n = -\frac{\pi^2}{6}$.

**10.137** Soit $n \geqslant 1$, pour faire une partition de $[\![1;n+1]\!]$, il faut choisir la partie $U_p$ ($p$ est quelconque) de cette partition qui contient $n+1$. On fixe donc $j \in [\![0;n]\!]$ tel que $\text{card}\,(U_p) = j+1$ et on choisit $j$ entiers dans $[\![1;n]\!]$ pour tenir compagnie à $n+1$ dans $U_p$ : $\dbinom{n}{j}$ choix. Ensuite, il reste $n+1-(j+1) = n-j$ entiers dans $[\![1;n+1]\!] \setminus U_p$ qu'il faut partitionner : on peut le faire de $p_{n-j}$ façons par construction. Ainsi, $p_{n+1} = \sum\limits_{j=0}^{n}\dbinom{n}{j}p_{n-j} = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}p_k$ en posant $k = n-j$. On a même $p_1 = 1 = \dbinom{0}{0}p_0$ par convention.

On a $p_0 = p_1 = 1$, $p_2 = 2$ ("deux singletons" ou "paire"), $p_3 = 5$ ("trois singletons", 3 fois "singleton + paire" et "triplet"), $p_4 = 15$. Ainsi $0 \leqslant p_n \leqslant n!$ pour $n \in [\![0;4]\!]$. Soit $n \geqslant 4$ tel que $\forall k \in [\![0;n]\!],\ 0 \leqslant p_k \leqslant k!$, alors $p_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$ donc $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(n-k)!} \leqslant n! \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} = e.n! \leqslant (n+1)!$.
Par récurrence forte : $\forall n \geqslant 0,\ 0 \leqslant p_n \leqslant n!$. Comme le rayon de $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n$ est égal à 1, d'après le cours : $R \geqslant 1$.

$\forall x \in ]1;1[,\ f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{p_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{p_{n+1}}{n!} x^n$ qui se transforme avec la relation de récurrence précédente en $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big( \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{p_k}{k!} \times \dfrac{1}{(n-k)!} \Big) x^n$. Par produit de Cauchy : $\forall x \in ]-1;1[,\ f'(x) = e^x f(x)$. On intègre : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in ]-1;1[,\ f(x) = \lambda e^{e^x}$. Or $f(0) = p_0 = 1$ donc $\lambda = \dfrac{1}{e}$. Par conséquent $\forall x \in ]-1;1[,\ f(x) = e^{e^x - 1}$.

**10.138** Comme $\left(\dfrac{x^n}{3n+2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$ par croissance comparée, le rayon de cette série est $R = 1$. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{3n+2}$ pour $x \in [-1;1[$ (il y a convergence pour $x = -1$ par CSSA et divergence pour $x = 1$ d'après Riemann).

Posons $g(x) = x^2 f(x^3)$, alors $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3n+2}}{3n+2}$. Le rayon de cette série entière est aussi 1, on sait donc que $g$ est dérivable sur $]-1;1[$ et que $g'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} = \dfrac{x}{1-x^3}$.

On peut continuer cette méthode en intégrant à partir de $g(x) = \displaystyle\int_0^x g'(t)dt$ puisque $g(0) = 0$.

Autre méthode : on peut aussi écrire que pour $x \in ]-1;1[$, on a $\dfrac{x^n}{3n+2} = \displaystyle\int_0^1 x^n t^{3n+1} dt$ donc il vient $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \displaystyle\int_0^1 x^n t^{3n+1} dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt$ en posant $u_n(t) = x^n t^{3n+1}$. La série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[0;1]$ car $||u_n||_{\infty,[0;1]} = |x|^n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} |x|^n$ converge (série géométrique). Comme on intègre sur un segment, on peut intervertir pour avoir $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n t^{3n+1} dt = \int_0^1 \frac{tdt}{1-xt^3} dt$.

Si $x = 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2}$. Si $x \neq 0$, soit $\sqrt[3]{3}x$ l'antécédent de $x$ par la bijection $y \mapsto y^3$ sur $]-1;1[$, on effectue le changement $u = \sqrt[3]{x}t$ : $f(x) = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} \displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{x}} \frac{udu}{1-u^3}$. Or $\dfrac{X}{1-X^3} = \dfrac{1}{3(1-X)} + \dfrac{X-1}{3(1+X+X^2)}$ par identification par exemple donc $f(x) = \dfrac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} \displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{x}} \frac{du}{1-u} + \frac{1}{6(\sqrt[3]{x})^2} \int_0^{\sqrt[3]{x}} \frac{(2u+1)du}{1+u+u^2} - \frac{1}{2(\sqrt[3]{x})^2} \int_0^{\sqrt[3]{x}} \frac{du}{1+u+u^2}$.

On obtient $f(x) = \dfrac{1}{6(\sqrt[3]{x})^2} \left[ -2\ln(1-u) + \ln(1+u+u^2) - 2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^{\sqrt[3]{x}}$ car on a classiquement

$\dfrac{1}{1+u+u^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ en mettant sous forme canonique.

**10.139** Par récurrence immédiate, puisque $u_0 = 1 > 0$ et que $a > 0$, $b > 0$, on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ ce qui justifie bien la définition de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par définition de $v_n$, on peut simplifier $v_{n+1} - v_n$ : $v_{n+1} - v_n = \ln((n+1)^{b-a} u_{n+1}) - \ln(n^{b-a} u_n) = (b-a)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Ainsi, d'après l'hypothèse faite sur $(u_n)_{n \geqslant 0}$, $v_{n+1} - v_n = (b-a)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right) = (b-a)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{b}{n}\right)$.

On effectue un développement limité à l'ordre 2 et $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{(b-a)}{n} + \dfrac{a}{n} - \dfrac{b}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. Ainsi, par comparaison et RIEMANN, la série $\sum_{n \geqslant 0} (v_{n+1} - v_n)$ converge. La dualité suite-série nous montre alors que $(v_n)_{n \geqslant 0}$ converge, disons vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par continuité de $\exp$, comme $n^{b-a} u_n = e^{v_n}$, la suite $(n^{b-a} u_n)_{n \geqslant 0}$ converge donc vers $k = e^{\ell} > 0$. Alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^{b-a}}$. Ainsi, $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $b - a > 1$ par équivalence et critère de RIEMANN.

Si $x \neq 0$, $\left|\dfrac{u_{n+1} x^{n+1}}{u_n x^n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k n^{b-a} |x|}{k(n+1)^{b-a}} \underset{+\infty}{\sim} |x|$ d'après ce qui précède. Ainsi, si $|x| > 1$, $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ diverge grossièrement donc $R \leqslant 1$ et, si $|x| < 1$, $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ converge absolument d'après D'ALEMBERT donc $R \geqslant 1$. Par conséquent, $R = 1$. Comme $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge et que $u_n > 0$. Les séries $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n$ convergent absolument. Ainsi, le domaine de définition de $f$ est $I = [-1; 1]$. On a $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Pour $n \geqslant 0$, comme $(n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n = 0 \Longleftrightarrow n u_{n+1} - n u_n = a u_n - b u_{n+1}$ par hypothèse, on a la relation $(n+1)u_{n+1} - n u_n = u_{n+1} + a u_n - b u_{n+1} = (1-b) u_{n+1} + a u_n$ $(R)$. Comme la suite $(n u_n)_{n \geqslant 0}$ tend vers $0$ car $n u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{b-a+1}}$ avec $b - a + 1 > 0$, la dualité suite-série nous montre que $\sum_{n \geqslant 0} (n+1) u_{n+1} - n u_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} - n u_n = -0.u_0 = 0$. Ainsi, en sommant la relation $(R)$ pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient $(1-b)(f(1) - u_0) + a f(1) = 0$. Par conséquent, il vient $f(1) = \dfrac{b-1}{b-a+1}$ car $u_0 = 1$.

**10.140** Comme la suite $\Big(\sin\big(\frac{n\pi}{3}\big)\Big)_{n \geqslant 0}$ ne tend vers $0$ car par exemple $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin\big(\frac{(6n+1)\pi}{3}\big) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \sin\big(\frac{n\pi}{3}\big)$ diverge donc le rayon $R$ de $\sum_{n \geqslant 0} \sin\big(\frac{n\pi}{3}\big) x^n$ vérifie $R \leqslant 1$ car cette série diverge pour $x = 1$. Mais comme $\left|\sin\big(\frac{n\pi}{3}\big)\right| \leqslant 1$ et que le rayon de $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ vaut 1, on a aussi $R \geqslant 1$ d'après le cours. Ainsi $R = 1$. Soit $x \in ]-1; 1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\big(\frac{n\pi}{3}\big) x^n = \mathrm{Im}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\frac{in\pi}{3}} x^n\Big) = \mathrm{Im}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} (-j^2 x)^n\Big)$ car $e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2$. Ainsi, il vient $\mathrm{Im}\Big(\dfrac{1}{1+j^2 x}\Big) = \mathrm{Im}\Big(\dfrac{1+jx}{1+jx+j^2x+x^2}\Big) = \dfrac{\sqrt{3}\,x}{2(1-x+x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\big(\frac{n\pi}{3}\big) x^n$.

**10.141** **a.** Posons $f_n : t \mapsto \left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n$, alors comme $0 < \left|\dfrac{1+t^2}{2}\right| < 1$ si $t \in [0; 1[$ la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0; 1[$ et on a la domination $|f_n| \leqslant 1$ où $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0; 1[$. Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 0$.

**b.** Puisque $\forall t \in [0; 1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\big(\frac{1+t^2}{2}\big)^n \geqslant \big(\frac{1+t^2}{2}\big)^{n+1}$, par croissance de l'intégrale, on a $a_n \geqslant a_{n+1}$ donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. Par le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n a_n$ converge.

**c.** $\forall t \in [0; 1]$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1+t^2}{2}$ (car $(1-t)^2 \geqslant 0$) donc $\int_0^1 t^n dt = \dfrac{1}{n+1} \leqslant a_n$. Ainsi, $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ diverge par comparaison à la série harmonique et $R \leqslant 1$. D'après **b.**, comme $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n a_n$ converge, $R \geqslant 1$. Ainsi, $R = 1$.

**d.** Pour $x \in ]-1; 1[$, soit $u_n : t \mapsto x^n \Big(\dfrac{1+t^2}{2}\Big)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[0; 1]$ car $||u_n||_{\infty,[0;1]} = |x|^n$ (valeur maximale en $t = 1$) donc, comme on intègre sur le segment $[0; 1]$, on peut intervertir et avoir $f(x) = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\Big) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt$ ce qui donne, comme $\left|\dfrac{x(1+t^2)}{2}\right| < 1$,

$f(x)=\int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{x(1+t^2)}{2}\Big)^n\Big)dt=\int_0^1 \frac{1}{1-\frac{x(1+t^2)}{2}}dt=\int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2}$ (série géométrique).

Traitons trois cas :

- Si $x=0$, $f(0)=a_0=1$.
- Si $x\in]-1;0[$, $f(x)=\frac{2}{2-x}\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{x}{x-2}t^2}dt=\Big[\frac{2}{\sqrt{x(x-2)}}\operatorname{Arctan}\Big(\sqrt{\frac{x}{x-2}}\,t\Big)\Big]_0^1$ car $\frac{x}{x-2}>0$ ce qui donne $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x(x-2)}}\operatorname{Arctan}\Big(\sqrt{\frac{x}{x-2}}\Big)$.
- Si $x\in]0;1[$, $f(x)=\frac{2}{2-x}\int_0^1 \frac{1}{1-\frac{x}{2-x}t^2}dt=\Big[\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\Bigg(\frac{1+\sqrt{\frac{2}{2-x}}\,t}{1-\sqrt{\frac{2}{2-x}}\,t}\Bigg)\Big]_0^1$ car $\frac{x}{2-x}>0$ ce qui donne $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\Bigg(\frac{1+\sqrt{\frac{2}{2-x}}}{1-\sqrt{\frac{2}{2-x}}}\Bigg)$.

**e.** Pour $x\in[-1;0]$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$ est alternée car $a_n>0$ et la suite $(a_n|x|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers $0$ d'après **a.** donc, par le critère spécial des séries alternées, en notant $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}a_kx^k$, on a $|R_n(x)|\leqslant a_{n+1}|x|^{n+1}\leqslant a_{n+1}$ donc $||R_n||_{\infty,[-1;0]}\leqslant a_{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, on a convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ sur $[-1;0]$ en notant $u_n: x\mapsto a_nx^n$. Comme les $u_n$ sont continues sur $[-1;0]$, la fonction $f$ est continue sur $[-1;0]$, ce qui montre que $f(-1)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^na_n=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ car $\operatorname{Arctan}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)=\frac{\pi}{6}$.