PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 17

PSI 1 2024-2025 **du lundi 03/02 au vendredi 07/02**

1 Rayon de convergence d'une série entière : voir programme précédent

2 Calcul du rayon d'une série entière : voir programme précédent

3 Somme d'une série entière :
- convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence ;
- unicité des coefficients d'une série entière si le rayon de convergence est non nul ;
- somme d'une somme, d'un produit de CAUCHY de séries entières sur l'intersection des disques ouverts ;
- dérivation et intégration terme à terme de la somme f d'une série entière de la variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence : aspect C^∞ de f et relation $n!a_n = f^{(n)}(0)$;

4 Fonctions développables en série entière :
- définition d'une fonction développable en série entières (DSE) au voisinage de 0 ;
- stabilité des fonctions DSE par multiplication par un scalaire, somme, produit de CAUCHY ;
- séries de TAYLOR d'une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0 ;
- caractérisation des fonctions DSE par la limite du reste intégral : conditions suffisantes ;
- développements en séries entières des fonctions usuelles de la variable réelle ;
- exponentielle complexe sous forme de série = exponentielle complexe vue en sup ;

5 Variables aléatoires :
- définition d'une variable aléatoire discrète, notations classiques $(X \leqslant a)$, $(X = x)$, $(X \in A)$;
- loi d'une variable aléatoire discrète, elle ne caractérise pas la variable aléatoire ;
- couple de variables aléatoires, loi conjointe et lois marginales ;
- loi conditionnelle de Y sachant B, indépendance de VA, calcul de $P(X \in A,\ Y \in B)$;
- variables aléatoires indépendantes 2 à 2 ou dans leur ensemble, relations ;
- lois sur un univers fini : uniforme, BERNOULLI, binomiale (somme de BERNOULLI indépendantes), hypergéométrique (hors programme) ;
- lois sur un univers dénombrable : géométrique (loi du premier succès) ;
- lois sur un univers dénombrable : POISSON, la somme de deux VA indépendantes suivant $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ suit $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$, avec condition, la "limite" d'une loi binomiale est une loi de POISSON ;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir ce qu'est une fonction développable en série entière (déf. 10.4)
2 énoncer le résultat sur la classe d'une série entière et sur l'expression des coefficients (th. 10.12)
3 énoncer la CNS pour qu'une fonction soit DSE sur $]-r; r[$ avec TAYLOR reste intégral (th. 10.15)
4 énoncer trois DSE de fonctions classiques au choix (th. 10.17)
1 définir une variable aléatoire discrète (déf. 11.1)
2 définir une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes (déf. 11.7 et 11.18)
3 énoncer le lemme des coalitions et le transport d'indépendance (prop. 11.6 et 11.8)
4 prouver que $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ suit $\mathcal{B}(n, p)$ si les $X_1, \cdots, X_n$ suivent $\mathcal{B}(p)$ et sont indépendantes (prop. 11.9)
5 prouver que la variable aléatoire donnant le premier succès dans une répétition de variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{B}(p)$ suit la loi géométrique de paramètre p (prop. 11.10)
6 prouver que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ (rem. 11.17)
7 prouver que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X qui suit $\mathcal{P}(\lambda)$ si $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $p_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$ (prop. 11.11)

Prévision pour la prochaine semaine : variables aléatoires