TD 17 : VARIABLES ALÉATOIRES

PSI 1 2024-2025 **jeudi 06 février 2025**

17.1 **a.** Comme $(X \geqslant n) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (X = k)$ (réunion dénombrable d'évènements incompatibles), par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = \dfrac{p(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)} = (1-p)^{n-1}$. Par construction, $(T \geqslant k) = (X \geqslant k) \cap (Y \geqslant k)$ pour $k \geqslant 1$. Par indépendance de X et Y, on en déduit que $\mathbb{P}(T \geqslant k) = \mathbb{P}(X \geqslant k)\,\mathbb{P}(Y \geqslant k) = (1-p)^{2(k-1)}$. Comme $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(T \geqslant k) - \mathbb{P}(T \geqslant k+1)$ car $(T \geqslant k) = (T = k) \bigsqcup (T \geqslant k+1)$, on en déduit la loi de T donnée, pour $k \in \mathbb{N}^*$, par $\mathbb{P}(T = k) = (1-p)^{2(k-1)} - (1-p)^{2k} = (1-p)^{2(k-1)}p(2-p) = \big((1-p)^2\big)^{(k-1)}p(2-p)$.
La variable aléatoire T suit donc la loi géométrique de paramètre $p(2-p) = 1-(1-p)^2$.

b. D'après le cours, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$. La variable aléatoire $\dfrac{1}{X}$ est bornée donc elle admet une espérance finie et, par la formule de transfert, $\mathbb{E}\Big(\dfrac{1}{X}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{p(1-p)^{n-1}}{n} = \dfrac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(1-p)^n}{n}$ et on reconnaît la série logarithmique : $\mathbb{E}\Big(\dfrac{1}{X}\Big) = \dfrac{p}{1-p}\big(-\ln(1-(1-p))\big) = -\dfrac{p\ln(p)}{1-p} = \dfrac{p\ln(1/p)}{1-p}$.

c. • $(T \geqslant k, Z = 0) = (X = Y \geqslant k) = \bigcup_{i=k}^{+\infty} (X = Y = i)$ donc, par σ-additivité et par indépendance de X et Y, on a $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = 0) = \mathbb{P}(X = Y \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=k}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(i-1)} = \dfrac{p^2((1-p)^2)^{k-1}}{1-(1-p)^2}$ ce qui se réduit à $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = 0) = \dfrac{p(1-p)^{2k-2}}{2-p}$.

• Si $z \geqslant 1$, on a $(T \geqslant k, Z = z) = \Big(\bigcup_{i=k}^{+\infty} (X = i, Y = i+z)\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=k}^{+\infty} (X = i+z, Y = i)\Big)$ (réunion disjointe).
Par symétrie, indépendance et σ-additivité, il vient $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) = 2\sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = i+z)$ donc $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) = 2\sum_{i=k}^{+\infty} p^2(1-p)^{2i+z-2} = \dfrac{p^2(1-p)^{2k+z-2}}{1-(1-p)^2} = \dfrac{2p(1-p)^{2k+z-2}}{2-p}$.

d. • Comme $(Z = 0) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = Y = k)$, par incompatibilité des évènements de cette réunion et indépendance de X et Y, on a $\mathbb{P}(Z = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(k-1)} = \dfrac{p^2}{1-(1-p)^2} = \dfrac{p}{2-p}$.
On aurait aussi pu dire, comme $(T \geqslant 1) = \Omega$, que $(Z = 0) = (T \geqslant 1, Z = 0)$. Ainsi, d'après la question **c.**, on a $\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(T \geqslant 1, Z = 0) = \dfrac{p(1-p)^{2.1-2}}{2-p} = \dfrac{p}{2-p}$.

• Si $z \geqslant 1$, $(Z = z) = \Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = k, Y = k+z)\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = k+z, Y = k)\Big)$ donc, avec les mêmes arguments, $\mathbb{P}(Z = z) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2k+z-2} = \dfrac{2p^2(1-p)^z}{1-(1-p)^2} = \dfrac{2p(1-p)^z}{2-p}$. Ou $(Z = z) = (T \geqslant 1, Z = z)$ comme avant.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{N}$, traitons deux cas :

- Si $z = 0$, $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) = \dfrac{p(1-p)^{2k-2}}{2-p} = (1-p)^{2(k-1)} \times \dfrac{p}{2-p} = \mathbb{P}(T \geqslant k)\,\mathbb{P}(Z = z)$.

• Si $z \geqslant 1$, $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) = \dfrac{2p(1-p)^{2k+z-2}}{2-p} = (1-p)^{2(k-1)} \times \dfrac{2p(1-p)^z}{2-p} = \mathbb{P}(T \geqslant k)\,\mathbb{P}(Z = z)$.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T = k, Z = z) = \mathbb{P}(T = k)\,\mathbb{P}(Z = z)$ car $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(T \geqslant k) - \mathbb{P}(T \geqslant k+1)$ et $\mathbb{P}(T = k, Z = z) = \mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) - \mathbb{P}(T \geqslant k+1, Z = z)$ proviennent des réunions disjointes suivantes sur les évènements : $(T \geqslant k) = (T \geqslant k+1) \cup (T = k)$ et $(T \geqslant k, Z = z) = (T \geqslant k+1, Z = z) \cup (T = k, Z = z)$.

On a bien établi que les variables aléatoires T et Z sont indépendantes.

On peut montrer la réciproque (à faire), à savoir que si X, Y sont des variables aléatoires de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles $T = \mathrm{Min}(X, Y)$ et $Z = |X - Y|$ sont indépendantes, alors X et Y suivent une loi géométrique.

$\boxed{\textbf{17.2}}$ **a.** On note T_k le numéro de la boule tirée au tirage k. On admet l'existence d'un espace probabilisé qui supporte cette suite $(T_k)_{k \geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes (remarque du cours). D'abord $X_n(\Omega) = (\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \cup \{+\infty\}$ car on rajoute la possibilité de ne jamais avoir une autre boule que la première tirée, qu'on note $X_n = +\infty$. De plus, $(X_n = +\infty) = \displaystyle\bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{(X_n = k)}$ par convention et $(X_n = k) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \Big((T_1 = i) \cap \cdots \cap (T_{k-1} = i) \cap (T_k \neq i)\Big) \in \mathcal{A}$ pour $k \geqslant 2$ donc X_n est une variable aléatoire car les T_i le sont. Par incompatibilité de ces n évènements, indépendance mutuelle des T_k qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X_n = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^{k-1}}$ pour $k \geqslant 2$.

On vérifie la cohérence de ces résultats car $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n^{k-1}} = \frac{n-1}{n} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^j = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{1-(1/n)} = 1$. Ceci justifie que l'évènement $(X_n = +\infty)$ (toujours la même boule) est négligeable comme attendu.

b. $k\,\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{k(n-1)}{n^{k-1}}$ et $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} \frac{k(n-1)}{n^{k-1}}$ converge car le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} kx^{k-1}$ est égal à 1 et que $\left|\dfrac{1}{n}\right| < 1$. De plus, comme $\forall x \in]-1; 1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, on obtient en dérivant $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = (n-1) \times \left(\dfrac{n^2}{(n-1)^2} - 1\right) = \dfrac{2n-1}{n-1}$. Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = 2$ ce qu'on subodorait car plus n augmente, plus l'évènement $(X_n = 2)$ devient presque sûr.

c. Comme $X_2 = Y_2$, pour $k \geqslant 2$, on a $(Y_2 = k) = (X_2 = k)$ donc $\mathbb{P}(Y_2 = k) = \dfrac{1}{2^{k-1}}$ d'après **a.**. On reconnaît cette loi, $Y_2 - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$ car $\mathbb{P}(Y_2 - 1 = k) = \mathbb{P}(Y_2 = k+1) = \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$.

Pour $k \geqslant 3$, en notant i le numéro de la première boule tirée, r le premier rang pour lequel on tire une boule de numéro $j \neq i$, comme $6 - i - j$ est le numéro tiré autre que i et j (car $i + j + (6 - i - j) = 1 + 2 + 3 = 6$), on a $(Y_3 = k) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{3} \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} \bigcup_{r=2}^{k-1} \left(\left(\bigcap_{a=1}^{r-1} (T_a = i)\right) \cap (T_r = j) \cap \left(\bigcap_{b=r+1}^{k-1} (T_k = i) \cup (T_k = j)\right)\right) \cap (T_k = 6 - i - j)$.

Ainsi, par incompatibilité de tous ces évènements, indépendance mutuelle des tirages et symétrie entre les numéros, $\mathbb{P}(Y_3 = k) = 3 \times 2 \times \displaystyle\sum_{r=2}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{r-1} \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-r-1} \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{6}{3^k} \sum_{r=2}^{k-1} 2^{k-r-1} = \frac{6(2^{k-2} - 1)}{3^k}$.

À nouveau, comme $Y_3(\Omega) = \{3, 4, 5, \cdots, +\infty\}$, on vérifie que $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_3 = k) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{6(2^{k-2} - 1)}{3^k} = 1$. En effet, on a $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{6(2^{k-2} - 1)}{3^k} = (6/4)\frac{(2/3)^3}{1-(2/3)} - 6\frac{(1/3)^3}{1-(1/3)} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$. Ceci justifie que l'évènement $(Y_3 = +\infty)$

(seulement deux numéros tirés éternellement) est négligeable comme attendu.

17.3 **a.** Par construction, $Y = \text{Min}(X_1, X_2)$ donc, pour $k \in \mathbb{N}$, $(Y > k) = (X_1 > k) \cap (X_2 > k)$. Or on a $(X_1 > k) = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} (X_1 = i)$ (réunion incompatible) donc $\mathbb{P}(X_1 > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)p^i = (1-p) \times \dfrac{p^{k+1}}{1-p} = p^{k+1}$ par σ-additivité. Comme X_2 suit la même loi que X_1, on a aussi $\mathbb{P}(X_2 > k) = p^{k+1}$. On suppose X_1 et X_2 indépendantes donc $\mathbb{P}(Y > k) = \mathbb{P}(X_1 > k)\,\mathbb{P}(X_2 > k) = p^{2(k+1)}$ (marche encore si $k = -1$). Ainsi, comme $(Y \leqslant k) = \overline{(Y > k)}$, on a $\mathbb{P}(Y \leqslant k) = 1 - \mathbb{P}(Y > k) = 1 - p^{k+1}$. De plus, comme $(Y > k-1) = (Y = k) \sqcup (Y > k)$, on en déduit finalement la loi de Y, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y > k-1) - \mathbb{P}(Y > k) = p^{2k} - p^{2(k+1)} = (1-p^2)p^{2k}$.

b. Par construction encore, $Z = Y + X_3$ (il faut le temps que A_3 accède au guichet et le temps qu'elle soit servie). On suppose à nouveau Y et X_3 indépendantes (ou plutôt X_1, X_2, X_3 mutuellement indépendantes et le lemme des coalitions). Si $n \in \mathbb{N}$, $(Z = n) = \bigcup_{k=0}^{n} (Y = k, X_3 = n-k)$ (évènements incompatibles) donc, par indépendance de Y et X_3, il vient $\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} (1-p^2)(p^2)^k(1-p)p^{n-k}$ donc, au final, $\mathbb{P}(Z = n) = (1-p^2)(1-p) \sum_{k=0}^{n} p^{n+k} = (1-p^2)(1-p)p^n \dfrac{1-p^{n+1}}{1-p} = (1-p^2)p^n(1-p^{n+1})$.

c. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X_3)$. Or $X_3 + 1 \sim \mathcal{G}(1-p)$ par définition donc, d'après le cours, $\mathbb{E}(X_3 + 1) = \dfrac{1}{1-p}$ d'où $\mathbb{E}(X_3) = \dfrac{p}{1-p}$. De même, d'après la question **a.**, $Y + 1 \sim \mathcal{G}(1-p^2)$ donc $\mathbb{E}(Y+1) = \dfrac{1}{1-p^2}$ et $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{p^2}{1-p^2}$. Par conséquent, $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{p^2}{1-p^2} = \dfrac{p(1+p)+p^2}{1-p^2} = \dfrac{p(1+2p)}{1-p^2}$.

On pouvait aussi utiliser la loi de Z vue en **b.** et la définition $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(Z = n)$ mais cela fait intervenir des calculs de somme de série entière plus délicats.

17.4 **a.** Par construction, $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $(T = n) = \left(\bigcap_{k=0}^{n-1} (X_k = 1)\right) \cap (X_n = 0)$ est un évènement car les X_i sont des variables aléatoires. Ainsi, T est une variable aléatoire car, de plus $(T = +\infty) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} (X_k = 1)$. Par indépendance des X_i, on a $\mathbb{P}(T = n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2}\right) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. De même, comme $(T > n) = \bigcap_{k=0}^{n} (X_k = 1)$, on a $\mathbb{P}(T > n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Comme $(T = +\infty) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (T > n)$ et que la suite $\big((T > n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements, par continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(T = +\infty) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(T > n) = 0$ d'après **a.**. Plus simplement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut dire que $(T = +\infty) \subset (T > n)$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(T = +\infty) \leqslant \mathbb{P}(T > n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ donc, par passage à la limite, on en déduit que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$. On pouvait aussi écrire $(T < +\infty) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (T = n)$ (réunion incompatible) donc, par σ-additivité, $\mathbb{P}(T < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-(1/2)} = 1$ donc on retrouve à nouveau $\mathbb{P}(T = +\infty) = 1 - \mathbb{P}(T < +\infty) = 1 - 1 = 0$.

On sait d'après le cours que T admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(T > n)$ converge, ce qui est le cas ici car c'est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2} < 1$, et qu'on a alors la relation suivante :

$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-(1/2)} = 1$. De même, T admet une variance finie si et seulement si T admet un moment d'ordre 2, ce qui équivaut par la formule de transfert à la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} n^2\,\mathbb{P}(T = n)$. Or $\frac{n^2}{2^{n+1}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc T admet une variance finie. On sait qu'alors $\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = \mathbb{E}(T(T-1)) + \mathbb{E}(T) - \mathbb{E}(T)^2 = \mathbb{E}(T(T-1))$ car $\mathbb{E}(T) = 1$. Par le théorème de transfert, $\mathbb{E}(T(T-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,\mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Or $\forall x \in]-1;1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ qu'on dérive deux fois (sur l'intervalle ouvert de convergence) pour avoir $\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ et enfin $\frac{2x^3}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n+1}$. En prenant $x = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(T(T-1)) = \frac{2(1/2)^3}{(1-(1/2))^3} = 2$ donc $\mathbb{V}(T) = 2$.

Beaucoup plus simplement, $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(T+1 = n) = \mathbb{P}(T = n-1) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2}$ donc $T+1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi, d'après le cours, $\mathbb{E}(T+1) = \frac{1}{(1/2)} = 2$ et $\mathbb{V}(T+1) = \frac{1-(1/2)}{(1/2)^2} = 2$. Comme $\mathbb{E}(T+1) = \mathbb{E}(T) + 1$ et $\mathbb{V}(T+1) = \mathbb{V}(T)$, on retrouve $\mathbb{E}(T) = 1$ et $\mathbb{V}(T) = 2$.

b. Par définition de T',

- $(T' = 1) = (X_0 = 1, X_1 = 1)$ donc, par indépendance de X_0 et X_1, $\mathbb{P}(T' = 1) = \frac{1}{4}$.
- $(T' = 2) = (X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1)$. Par indépendance mutuelle de X_0, X_1, X_2, on a $\mathbb{P}(T' = 2) = \frac{1}{8}$.
- De même, $(T' = 3) = (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1)$ (peu importe X_0) donc, comme avant, $\mathbb{P}(T' = 3) = \frac{1}{8}$.
- À nouveau, $(T' = 4) \cup (X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 1) = (X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 1)$ donc, par incompatibilité de ces deux évènements, $\mathbb{P}(T' = 4) + \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$ ce qui donne $\mathbb{P}(T' = 4) = \frac{3}{32}$.

Il est clair que si on a $T' > n$, on a a fortiori $T' > n-2$ et on ne peut pas avoir $X_{n-1} = X_n = 1$ sinon on aurait $T' \leqslant n$. Ceci se résume en l'inclusion $(T' > n) \subset (T' > n-2) \cap \overline{(X_{n-1} = 1, X_n = 1)}$. Or $(T' > n-2)$ ne dépend que des variables $X_0, \cdots, X_{n-2}$ donc, par le lemme des coalitions, $(T' > n-2)$ et $\overline{(X_{n-1} = 1, X_n = 1)}$ sont indépendants. Ainsi, $\mathbb{P}(T' > n) \leqslant \mathbb{P}(T' > n-2) \times \mathbb{P}\left(\overline{(X_{n-1} = 1, X_n = 1)}\right) = \frac{3\,\mathbb{P}(T' > n-2)}{4}$.

c. Comme avant, la suite $\big((T' > n)\big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et on a $(T' = +\infty) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (T' > n)$ donc, par continuité décroissante, $\mathbb{P}(T' = +\infty) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T' = n)$. Comme la suite $\big(\mathbb{P}(T' > n)\big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et positive donc converge vers un réel $\ell \geqslant 0$, en passant à la limite dans l'inégalité $\mathbb{P}(T' > n) \leqslant \frac{3\,\mathbb{P}(T' > n-2)}{4}$, il vient $\ell \leqslant \frac{3\ell}{4}$ ce qui impose $\ell = 0$. Ainsi $\mathbb{P}(T' = +\infty) = 0$ et, comme attendu, T' est presque sûrement finie.

d. Si on a $T' = n$ pour $n \geqslant 2$, on ne peut pas commencer par $X_0 = X_1 = 1$ sinon ça donnerait $T' = 1$. Ainsi, on peut écrire $(T' = n) = (T' = n, X_0 = 0) \cup (T' = n, X_0 = 1, X_1 = 0)$ (réunion de deux évènements incompatibles) donc $\mathbb{P}(T' = n) = \mathbb{P}(T' = n, X_0 = 0) + \mathbb{P}(T' = n, X_0 = 1, X_1 = 0)$. Par les probabilités conditionnelles, $\mathbb{P}(T' = n) = \mathbb{P}(X_0 = 0) \times \mathbb{P}_{(X_0=0)}(T' = n) + \mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 0) \times \mathbb{P}_{(X_0=1,X_1=0)}(T' = n)$. Si $X_0 = 0$, c'est comme si on repartait au point de départ après un tirage donc $\mathbb{P}_{(X_0=0)}(T' = n) = \mathbb{P}(T' = n-1)$. De même, si $X_0 = 1$ et $X_1 = 0$, on repart au point de départ après deux étapes donc $\mathbb{P}_{(X_0=1,X_1=0)}(T' = n) = \mathbb{P}(T' = n-2)$.

On a donc bien $\mathbb{P}(T'=n)=\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(T'=n-1)+\frac{1}{4}\,\mathbb{P}(T'=n-2)$.

Pour être totalement "rigoureux", mais la méthode précédente suffit largement à l'oral, on peut écrire l'égalité $(T'=n,X_0=0)=(X_0=0)\cap\Big(\bigcap_{k=2}^{n-1}\overline{(X_k=X_{k-1}=1)}\Big)\cap(X_n=X_{n-1}=1)$ donc, par le lemme des coalitions, $\mathbb{P}(T'=n,X_0=0)=\mathbb{P}(X_0=0)\times\mathbb{P}\bigg(\Big(\bigcap_{k=2}^{n-1}\overline{(X_k=X_{k-1}=1)}\Big)\cap(X_n=X_{n-1}=1)\bigg)$. Mais $\mathbb{P}\bigg(\Big(\bigcap_{k=2}^{n-1}\overline{(X_k=X_{k-1}=1)}\Big)\cap(X_n=X_{n-1}=1)\bigg)=\mathbb{P}\bigg(\Big(\bigcap_{k=1}^{n-2}\overline{(X_k=X_{k-1}=1)}\Big)\cap(X_{n-1}=X_{n-2}=1)\bigg)$ car la famille de variables aléatoires $(X_1,\cdots,X_n)$ suit la même loi que $(X_0,\cdots,X_{n-1})$. Et comme on a $(T'=n-1)=\Big(\bigcap_{k=1}^{n-2}\overline{(X_k=X_{k-1}=1)}\Big)\cap(X_{n-1}=X_{n-2}=1)$ par définition de T', on en déduit que $\mathbb{P}(T'=n,X_0=0)=\mathbb{P}(X_0=0)\,\mathbb{P}(T'=n-1)=\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(T'=n-1)$. De la même manière, on montre que $\mathbb{P}(T'=n,X_0=1,X_1=0)=\mathbb{P}(X_0=1)\,\mathbb{P}(X_1=0)\,\mathbb{P}(T'=n-2)$.

De nouveau, on retrouve la relation $\mathbb{P}(T'=n)=\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(T'=n-1)+\frac{1}{4}\,\mathbb{P}(T'=n-2)$.

e. Comme $\mathbb{P}(T'>0)=1$ et $\mathbb{P}(T'>1)=\frac{3}{4}$ d'après **a.**, par récurrence avec **b.**, $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(T'>2n)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $\mathbb{P}(T'>2n+1)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(T'>n)$ converge (comme une série géométrique car $P(T'>n)\underset{+\infty}{=}O\Big(\left(\frac{3}{4}\right)^{n/2}\Big)$, ce qui assure l'existence d'une espérance finie pour T' (à valeurs dans $\mathbb{N}$). Et $\mathbb{E}(T')=\sum_{n=1}^{+\infty}n\,\mathbb{P}(T'=n)=\mathbb{P}(T'=1)+\sum_{n=2}^{+\infty}n\Big(\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(T'=n-1)+\frac{1}{4}\,\mathbb{P}(T'=n-2)\Big)$ d'après **d.**. Comme les deux séries convergent, $\mathbb{E}(T')=\mathbb{P}(T'=1)+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1+1)\,\mathbb{P}(T'=n-1)+\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty}(n-2+2)\,\mathbb{P}(T'=n-2)\Big)$ ce qui devient, après séparation des séries convergentes et ré-indexation et comme $T'(\Omega)\subset\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T'=n)=1$ d'après **c.**, $\mathbb{E}(T')=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\,\mathbb{E}(T')+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\,\mathbb{E}(T')+\frac{1}{2}$.

On pouvait écrire $\mathbb{E}(T')=\mathbb{P}(T'=1)+\sum_{n=2}^{+\infty}n\Big(\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(T'+1=n)+\frac{1}{4}\,\mathbb{P}(T'+2=n)\Big)=\frac{1}{4}+\frac{\mathbb{E}(T'+1)}{2}+\frac{\mathbb{E}(T'+2)}{4}$ avec le même résultat. On trouve finalement la valeur $\mathbb{E}(T')=5$ (6 tirages).

17.5 Bien sûr, on suppose les tirages indépendants et équiprobables. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose l'évènement $R_n =$ "on tire une boule rouge au tirage n".

a. Soit $n \geqslant 0$ et $k \in [\![0; N-1]\!]$, on a deux possibilités pour avoir k boules rouges au bout de $n+1$ tirages :

- soit on a $k+1$ boules rouges au bout de n tirages et on a tiré une boule rouge au tirage $n+1$ qui a été remplacée par une boule verte.
- soit on a déjà k boules rouges au bout de p tirages et on a tiré une boule verte au tirage $p+1$.

Ceci se traduit par $(X_{n+1} = k) = \big((X_n = k) \cap \overline{R_{n+1}}\big) \sqcup \big((X_n = k+1) \cap R_{n+1}\big)$. Par incompatibilité de ces deux évènements, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{(X_n=k)}(\overline{R_{n+1}})\,\mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}_{(X_n=k+1)}(R_{n+1})\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$ (1).
Ou alors, comme $X_n(\Omega) \subset [\![N-n; N]\!]$, avec le système complet d'évènements $\big((X_n = i)\big)_{N-n \leqslant i \leqslant N}$ et la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(X_n + 1 = k) = \sum\limits_{i=N-n}^{N} \mathbb{P}(X_n = i)\,\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k)$ sachant que $i \neq k$ et $i \neq k+1$, $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k) = 0$, ce qui donne à nouveau la formule (1).
Or, si $X_n = k$, il y a dans l'urne k boules rouges et $N-k$ boules vertes donc $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(\overline{R_{n+1}}) = \dfrac{N-k}{N}$. Et si $X_n = k+1$, il y a dans l'urne $k+1$ boules rouges et $N-k-1$ boules vertes donc $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(R_{n+1}) = \dfrac{k+1}{N}$.
Ainsi, avec la relation (1), on a $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$.
Il reste à parler des cas particuliers :

- si $n = 0$ et $k = N$, on a $(X_1 = N) = \emptyset = (X_0 = N+1) = \emptyset$ et $(X_0 = N) = \Omega$ donc, comme $\dfrac{N-N}{N} = 0$, on a encore la relation $\mathbb{P}(X_{0+1} = N) = \dfrac{N-N}{N}\,\mathbb{P}(X_0 = N) + \dfrac{N+1}{N}\,\mathbb{P}(X_0 = N+1) = 0$.
- si ($n \geqslant 1$ et $k \geqslant N$) ou ($n = 0$ et $k > N$), on a $(X_{n+1} = N) = \emptyset = (X_n = N) = (X_n = N+1)$ donc on a toujours la relation $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k+1) = 0$.

Ainsi, dans tous les cas, $\forall n \geqslant 0,\ \forall k \geqslant 0,\ \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$.

b. Pour $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ car $X_n(\Omega) \subset [\![0; N]\!]$ donc, avec la question précédente, il vient $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\Big(\dfrac{N-k}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k+1)\Big)$ qu'on décompose, puisque $k = (k+1)-1$, en $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) - \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N} k^2\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N} (k+1)^2\,\mathbb{P}(X_n = k+1) - \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N} (k+1)\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$.
Après simplification et changement d'indice, comme $\mathbb{P}(X_n = N+1) = 0$, il ne reste dans cette formule que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) - \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} (k+1)\,\mathbb{P}(X_n = k+1) = \Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)\,\mathbb{E}(X_n)$.

c. $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n \geqslant 0}$ est géométrique et, comme $\mathbb{E}(X_0) = N$, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_n) = N\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)^n$ avec $1 - \dfrac{1}{N} \in]-1; 1[$. Or $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) = \sum\limits_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(X_n \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(X_n)$.
Comme X_n est à valeurs positives, on a aussi directement $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X_n)}{1} = \mathbb{E}(X_n)$ par inégalité de MARKOV. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant 1) = 0$.
Comme $\dfrac{\mathbb{E}(X_N)}{N} = \Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)^N = \exp\Big(N \ln\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)\Big)$ et $\ln\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{N}$ donc $\lim\limits_{N \to +\infty} N \ln\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big) = -1$, par continuité de $\exp$, on a $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X_N)}{N} = \dfrac{1}{e} \sim 0{,}37$.

d. On a $Y = 0$ si et seulement s'il reste des boules rouges (il y en a au moins une dans l'urne) à toutes les étapes. Ainsi, $(Y = 0) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (X_n \geqslant 1)$ donc on a bien $(Y = 0) \subset \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la suite d'évènements $\big((X_k \geqslant 1)\big)_{k \geqslant 1}$ est décroissante car si $X_{k+1} \geqslant 1$, a fortiori, on a $X_k \geqslant 1$, on a $(Y = 0) \subset \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1) = (X_n \geqslant 1)$. Par croissance de $\mathbb{P}$, il vient $0 \leqslant \mathbb{P}(Y = 0) \leqslant \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ donc, par encadrement, $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ en passant à la limite dans cette double inégalité d'après **c.**.

17.6 **a.** Posons $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$, alors $\chi_M = \begin{vmatrix} X - x & -y \\ -z & X - x \end{vmatrix} = (X - x)^2 - yz$. Traitons trois cas :

- Si $yz > 0$, $\chi_M = (X - x - \sqrt{yz})(X - x + \sqrt{yz})$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'après le cours.
- Si $yz = 0$, $\chi_M = (X - x)^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et $M - xI_2 = \begin{pmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ donc M est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{dim}(E_x(M)) = 2$ car x est valeur propre de M d'ordre de multiplicité 2. D'après la formule du rang, $\mathrm{dim}(E_x(M)) = 2 - \mathrm{rang}\,(M - xI_2)$ donc la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $M - xI_2 = 0$ ce qui est équivalent à $y = z = 0$.
- Si $yz < 0$, $\chi_M = (X - x - i\sqrt{-yz})(X - x + i\sqrt{-yz})$ donc χ_M n'est même pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc la matrice M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement $yz > 0$ ou $(y = z = 0)$.

b. <u>Projecteur</u> : $M^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & 2xy \\ 2xz & x^2 + yz \end{pmatrix}$ donc $M^2 = M \iff (x - x^2 - yz = (2x - 1)y = (2x - 1)z = 0)$. Or $(2x - 1)y = 0 \iff \left(x = \frac{1}{2} \text{ ou } y = 0\right)$ et $(2x - 1)z = 0 \iff \left(x = \frac{1}{2} \text{ ou } z = 0\right)$, $(x - x^2 = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x = 1)$ et $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - yz = 0\right) \iff \left(yz = \frac{1}{4}\right)$. Ainsi, on a l'équivalence suivante, juste pour l'aspect projecteur de M : $M^2 = M \iff \left((x = y = z = 0) \text{ ou } (x = 1, y = z = 0) \text{ ou } \left(x = \frac{1}{2}, yz = \frac{1}{4}\right)\right)$. Il y a donc une infinité de matrices M de F dont l'endomorphisme canoniquement associé est un projecteur.

<u>Projecteur orthogonal</u> : comme la base canonique est une base orthonormale dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, M représente un endomorphisme auto-adjoint si et seulement si M est symétrique et $M^T = M \iff y = z$. Or $y^2 = \frac{1}{4} \iff y = \pm\frac{1}{2}$ et on sait d'après le cours que M représente un projecteur orthogonal si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé est un projecteur auto-adjoint. D'après les deux équivalences précédentes, l'endomorphisme canoniquement associé à M est un projecteur orthogonal si et seulement si $\left((x = y = z = 0) \text{ ou } (x = 1, y = z = 0) \text{ ou } \left(x = y = z = \frac{1}{2}\right)\right)$ ou $\left(x = \frac{1}{2}, y = z = -\frac{1}{2}\right)\Big)$. Il n'y a donc que quatre telles matrices, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (endomorphisme nul de rang 0), $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (endomorphisme identité de rang 2, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}((1, 1))$ de rang 1) et $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}((1, -1))$ de rang 1).

c. Comme $\mathrm{det}(M) = X^2 - YZ$, $(M \in GL_2(\mathbb{R}) \iff (\mathrm{det}(M) \neq 0) \iff (X^2 \neq YZ)$. Or, en étudiant tous les cas, $(X^2 = YZ) = \left(\bigsqcup_{k=1}^{6} (X = k, Y = k, Z = k)\right) \sqcup \Big((X = 2, Y = 1, Z = 4) \sqcup (X = 2, Y = 4, Z = 1)\Big)$. On a

$\mathbb{P}(X^2=YZ)=\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(X=k,Y=k,Z=k)+\mathbb{P}(X=2,Y=1,Z=4)+\mathbb{P}(X=2,Y=4,Z=1)$ par incompatibilité de ces évènements. De plus, comme X,Y,Z sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$, on a $\mathbb{P}(X^2=YZ)=\dfrac{6}{6^3}+\dfrac{1}{6^3}+\dfrac{1}{6^3}=\dfrac{8}{216}=\dfrac{1}{27}$ de sorte que $\mathbb{P}(M \text{ inversible})=1-\mathbb{P}(X^2=YZ)=\dfrac{26}{27}\sim 0,96$.

17.7 **a.** Comme $X(\Omega)=\mathbb{N}$ par hypothèse et que $(X>k)=\bigsqcup_{n=k+1}^{+\infty}(X=n)$, par incompatibilité de cette infinité dénombrable d'évènements et σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X>k)=\sum_{n=k+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)=\sum_{n=k+1}^{+\infty}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$. Or on sait d'après le cours que $e^{\lambda}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ donc que $1=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ et on a donc $\mathbb{P}(X>k)=1-\sum_{n=0}^{k}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ (1).

Or la formule de TAYLOR reste intégral appliquée à la fonction $f=\exp$ entre 0 et λ à l'ordre k donne, puisque $\exp$ est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}$, $e^{\lambda}=f(\lambda)=\sum_{n=0}^{k}\dfrac{(\lambda-0)^n f^{(n)}(0)}{n!}+\int_0^{\lambda}\dfrac{(\lambda-t)^k f^{(k+1)}(t)}{k!}dt$. Ainsi, comme $\forall n\in[\![0;k]\!]$, $f^{(n)}(0)=1$, et $\forall t\in[0;\lambda]$, $f^{(k+1)}(t)=e^t\leqslant e^{\lambda}$, par croissance de l'intégrale, on obtient $e^{\lambda}\leqslant\sum_{n=0}^{k}\dfrac{\lambda^n}{n!}+e^{\lambda}\int_0^{\lambda}\dfrac{(\lambda-t)^k}{k!}dt=\sum_{n=0}^{k}\dfrac{\lambda^n}{n!}+e^{\lambda}\left[\dfrac{-(\lambda-t)^{k+1}}{(k+1)!}\right]_0^{\lambda}=\sum_{n=0}^{k}\dfrac{\lambda^n}{n!}+\dfrac{e^{\lambda}\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$. On multiplie par $e^{-\lambda}>0$ et $1-\sum_{n=0}^{k}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\leqslant\dfrac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$ et, avec (1), cela donne bien $\mathbb{P}(X>k)=1-\sum_{n=0}^{k}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\leqslant\dfrac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$.

b. $N(\Omega)=\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $(N>n)=\bigsqcup_{k=0}^{+\infty}\Big((X_0=k)\cap\bigcap_{i=1}^{n}(X_i\leqslant k)\Big)$ en distinguant selon les valeurs possibles de X_0 puisque $X_0(\Omega)=X(\Omega)=\mathbb{N}$. Par incompatibilité de ces évènements et indépendance de $X_0,\cdots,X_n$, on a donc $\mathbb{P}(N>n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\mathbb{P}(X_0=k)\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i\leqslant k)\Big)$. Comme $X_0,\cdots,X_n$ suivent la même loi de POISSON, on a $\mathbb{P}(N>n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(\mathbb{P}(X\leqslant k)\Big)^n=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(1-\mathbb{P}(X>k)\Big)^n$.

Comme N est à valeurs dans $\mathbb{N}$, N est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(N>n)$ converge, ce qui revient, grâce à l'expression précédente, à la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(1-\mathbb{P}(X>k)\Big)^n\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$.

On parle de familles de termes dans $[0;+\infty]$, donc le théorème de FUBINI s'applique et on a la relation $\mathbb{E}(N)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N>n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(1-\mathbb{P}(X>k)\Big)^n\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(1-\mathbb{P}(X>k)\Big)^n\right)$. Comme $\mathbb{P}(X>k)>0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, on aurait donc $\mathbb{E}(N)=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\times\dfrac{1}{1-(1-\mathbb{P}(X>k))}=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!\,\mathbb{P}(X>k)}$.

Mais d'après la question précédente, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!\,\mathbb{P}(X>k)}\geqslant\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k(k+1)!}{k!\lambda^{k+1}}=(k+1)\dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda}$ ce qui est absurde par comparaison car la série $\sum_{k\geqslant 0}(k+1)\dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda}$ diverge grossièrement. Par conséquent, la variable aléatoire N n'admet pas une espérance finie.

Comme $\overline{(N=+\infty)}=\bigsqcup_{n=1}^{+\infty}(N=n)$ et que ces évènements sont incompatibles, par σ-additivité, on parvient à $1-\mathbb{P}(N=+\infty)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)$. Or $(N=n)=\bigsqcup_{k=0}^{+\infty}\Big((X_0=k)\cap\bigcap_{i=1}^{n-1}(X_i\leqslant k)\cap(X_n>k)\Big)$ et, toujours par incompatibilité de ces évènements, indépendance de $X_0,\cdots,X_n$, et comme $X_0,\cdots,X_n$ suivent la même loi que X, $\mathbb{P}(N=n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\mathbb{P}(X_0=k)\Big(\prod_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_i\leqslant k)\Big)\mathbb{P}(X_n>k)\Big)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X\leqslant k)^{n-1}\,\mathbb{P}(X>k)$.

Ainsi, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X\leqslant k)^{n-1}\,\mathbb{P}(X>k)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X>k)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X\leqslant k)^{n-1}$ avec FUBINI et, comme $\mathbb{P}(X>k)<1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X>k)}{1-\mathbb{P}(X\leqslant k)}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X>k)}{\mathbb{P}(X>k)}$ d'où $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=1$ car $X(\Omega)=\mathbb{N}$. $\mathbb{P}(N=+\infty)=0$ donc N est presque sûrement finie.

17.8 Notons pour toute la suite T_k la variable aléatoire qui est le résultat du tirage d'indice k s'il a lieu. Par construction, $X_n(\Omega)\subset[\![1;n]\!]$ donc X_n est bornée et admet donc une espérance finie. On suppose bien sûr aussi que chaque boule de l'urne a autant de chance d'être tirée à chaque étape.

a. Bien sûr, si $n=1$, on vide l'urne en un seul tirage de manière certaine donc $X_1\equiv 1$ et $\mathbb{E}(X_1)=1$.
Si $n=2$, $(X_2=1)=(T_1=1)$ et $(X_2=2)=(T_1=2,T_2=1)$ donc $\mathbb{P}(X_2=1)=\mathbb{P}(T_1=1)=\dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_2=2)=\mathbb{P}(T_1=2)\,\mathbb{P}(T_2=1\mid T_1=2)=\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}$. Ainsi, par définition, $\mathbb{E}(X_2)=\dfrac{1}{2}\times 1+\dfrac{1}{2}\times 2=\dfrac{3}{2}$.
Pour $n\geqslant 2$ et $i=1$, on a $(X_n=1)=(T_1=1)$ donc $\mathbb{P}(X_n=1)=\dfrac{1}{n}$.

Pour $n\geqslant 2$ et $i\in[\![2;n]\!]$, on a $(X_n=i)=\bigsqcup\limits_{j=2}^{n}(T_1=j,X_n=i)$. Cette réunion étant disjointe, on a donc $\mathbb{P}(X_n=i)=\sum\limits_{j=2}^{n}\mathbb{P}(T_1=i)\,\mathbb{P}(X_n=i\mid T_1=j)$. Or, quand on a tiré la boule j au premier tirage, on enlève les boules numérotées $j,j+1,\cdots,n$ et on se retrouve au point de départ du problème définissant X_{j-1}, une urne contenant les boules numérotées de 1 à $j-1$, avec les mêmes règles, sauf qu'on a déjà effectué un tirage. Ainsi, $\mathbb{P}(X_n=i\,|T_1=j)=\mathbb{P}(X_{j-1}=i-1)$. Par conséquent, si $n\geqslant 2$ et $i\in[\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n=i)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=2}^{n}\mathbb{P}(X_{j-1}=i-1)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_k=i-1)$ en posant $k=j-1$.

Alors, $\mathbb{E}(X_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}i\,\mathbb{P}(X_n=i)=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=2}^{n}i\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_k=i-1)=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{i=2}^{n}i\,\mathbb{P}(X_k=i-1)$ en inversant la somme double. Mais $\mathbb{P}(X_k=i-1)=0$ dès que $i>k$ donc $\mathbb{E}(X_n)=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{i=2}^{k+1}i\,\mathbb{P}(X_k=i-1)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n)=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{i=2}^{k+1}(i-1+1)\,\mathbb{P}(X_k=i-1)=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\big(1+\mathbb{E}(X_k)\big)$ car $\mathbb{E}(X_k)=\sum\limits_{i=2}^{k+1}(i-1)\,\mathbb{P}(X_k=i-1)$ et $\mathbb{P}(\Omega)=1=\sum\limits_{i=2}^{k+1}\mathbb{P}(X_k=i-1)$. On a donc bien la relation attendue, $\mathbb{E}(X_n)=1+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_k)$ si $n\geqslant 2$.

b. <u>Méthode 1</u> : d'après **b.**, on a $\mathbb{E}(X_3)=1+\frac{1}{3}\Big(1+\frac{3}{2}\Big)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{6}$. De même, on obtient $\mathbb{E}(X_4)=1+\frac{1}{4}\Big(1+\frac{3}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{25}{12}$. Il semble, surtout avec l'aide de la question supplémentaire, que $\mathbb{E}(X_n)=H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$. On a déjà réalisé l'initialisation. Soit $n\geqslant 2$ tel que $\forall k\in[\![1;n-1]\!]$, $E(X_k)=H_k$, d'après **b.**, on a $\mathbb{E}(X_n)=1+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_k)=1+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{1}{j}$ donc $\mathbb{E}(X_n)=1+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\sum\limits_{k=j}^{n-1}\dfrac{1}{j}=1+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{n-j}{j}=1+\Big(\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{1}{j}\Big)-\dfrac{n-1}{n}=H_n$. Par principe de récurrence forte, on a bien $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n)=H_n$ donc $\mathbb{E}(X_n)\underset{+\infty}{\sim}\ln(n)$.

<u>Méthode 2</u> : d'après **b.**, pour $n\geqslant 2$, $n\,\mathbb{E}(X_n)=n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_k)$ et $(n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1})=(n+1)+\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)$

donc $(n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + n\,\mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(X_n) = (n+1)\,\mathbb{E}(X_n) + 1$ d'où $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n+1}$. Par télescopage, on a donc $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \big(\mathbb{E}(X_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k)\big) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k+1} = H_n$.

<u>Question supplémentaire</u> : comme $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[1;+\infty[$, on a la majoration $\forall k \in [\![1;n]\!], \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)dt = \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant f(k) = \frac{1}{k}$ et $\forall k \in [\![2;n]\!], \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{k}$. En sommant la première inégalité pour $k \in [\![1;n]\!]$ et par Chasles, on obtient $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Si on fait de même pour la seconde pour $k \in [\![2;n]\!]$, on a $\displaystyle\int_1^{n} \frac{dt}{t} \geqslant H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$. Ainsi, $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$. Comme $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) + 1$, par encadrement, on a donc $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

17.9 **a.** Pour $i \in \mathbb{N}$, $(X = i) = \bigsqcup\limits_{j=0}^{i} (X = i, Y = j)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité, on a la relation $\mathbb{P}(X = i) = \sum\limits_{j=0}^{i} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \sum\limits_{j=0}^{i} \dbinom{i}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} (\alpha + 1 - \alpha)^i = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ par le binôme de Newton donc X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

De même, pour $j \in \mathbb{N}$, $(Y = j) = \bigsqcup\limits_{i=j}^{+\infty} (X = i, Y = j)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité, on a aussi $\mathbb{P}(Y = j) = \sum\limits_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{e^{-\lambda}\alpha^j\lambda^j}{j!} \sum\limits_{i=j}^{+\infty} \dfrac{\lambda^{i-j}(1-\alpha)^{i-j}}{(i-j)!} = \dfrac{e^{-\lambda}\alpha^j\lambda^j}{j!} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k(1-\alpha)^k}{k!}$ en posant $k = i - j$.

Ainsi, $\mathbb{P}(Y = j) = \dfrac{e^{-\lambda}\alpha^j\lambda^j}{j!} e^{\lambda(1-\alpha)} = \dfrac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^j}{j!}$ donc Y suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha\lambda$.

Par hypothèse, $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} > 0$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = \dfrac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^0}{0!} > 0$ donc $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 0)$. Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

b. On a $Z(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ et, pour $k \in \mathbb{Z}$, comme $(Z = k) = \bigcup\limits_{j=0}^{+\infty} (X = k + j, Y = j)$ (réunion disjointe), par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(Z = k) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k + j, Y = j)$. Traitons deux cas :

<u>Si $k < 0$</u>, on a $\mathbb{P}(Z = k) = 0$ car $\forall j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k + j, Y = j) = 0$.

<u>Si $k \geqslant 0$</u>, il vient $\mathbb{P}(Z = k) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k+j}\alpha^j(1-\alpha)^k}{j!k!} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k(1-\alpha)^k}{k!} \times \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^j\alpha^j}{j!}$ et on reconnaît une série exponentielle qui donne $\mathbb{P}(Z = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k(1-\alpha)^k e^{\lambda\alpha}}{k!} = \dfrac{e^{-\lambda(1-\alpha)}(\lambda(1-\alpha))^k}{k!}$.

Ainsi, Z suit a loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-\alpha)$.

Pour $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, comme $\mathbb{P}(Z = k) > 0$, on a par définition $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y = j) = \dfrac{\mathbb{P}(Z = k, Y = j)}{\mathbb{P}(Z = k)}$ donc, puisque $X = Y + Z$, $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y = j) = \dfrac{\mathbb{P}(X = k + j, Y = j)}{\mathbb{P}(Z = k)} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k+j}\alpha^j(1-\alpha)^k k!}{j!k!e^{-\lambda(1-\alpha)}(\lambda(1-\alpha))^k} = \dfrac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^j}{j!}$ avec **d.**.

Comme $\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y = j) = \mathbb{P}(Y = j) = \dfrac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^j}{j!}$ avec la question **b.** et qu'on a même $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{Z}_-^*$, $\mathbb{P}(Z = k, Y = j) = 0 = \mathbb{P}(Z = k)\,\mathbb{P}(Y = j)$, Y et Z sont indépendantes.

17.10 **a.** Il s'agit juste de vérifier que pour $\mathbb{P}(X=i) \geqslant 0$ pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$, ce qui est évident, et que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i) = 1$, ce qui l'est moins.

Méthode 1 : en mode famille sommable, par sommation par paquets, comme on a $\frac{i}{2^{i+1}} = \sum\limits_{j=1}^{i} \frac{1}{2^{i+1}}$, il vient $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{j=1}^{i} \frac{1}{2^{i+1}} = \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} \frac{1}{2^{i+1}} = \sum\limits_{j=1}^{+\infty}\sum\limits_{i=j}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

Méthode 2 : soit $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$. On peut dériver terme à terme dans l'intervalle ouvert de convergence de cette série entière de rayon de convergence 1 pour avoir la relation $\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ donc $x^2 f'(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n+1}$. En prenant $x = \frac{1}{2}$ dans cette relation, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = \frac{1/4}{1/4} = 1$.

Quelle que soit la méthode, la définition de la loi de X est cohérente.

En reprenant la fonction f de la question précédente et en dérivant une fois de plus, on obtient la relation $\forall x \in]-1;1[,\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ donc $x^3 f''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n+1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n+1}$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n+1} = x^3 f''(x) + x^2 f'(x) = \frac{2x^3}{(1-x)^3} + \frac{x^2}{(1-x)^2}$. En prenant $x = \frac{1}{2}$ à nouveau, on arrive à $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n+1}} = \frac{2(1/8)}{1/8} + \frac{1/4}{1/4} = 3$.

b. Comme on prélève une boule dans une urne n'ayant des boules numérotées que de 1 à X, la boule tirée à un numéro $Y \in [\![1;X]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X=n, Y=k) = \mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}_{(X=n)}(Y=k)$ car $\mathbb{P}(X=n) > 0$ et on a $\mathbb{P}_{(X=n)}(Y=k) = \frac{1}{n}$ car les n boules de l'urne ont autant de chances d'être prises. Par conséquent, $\mathbb{P}(X=n, Y=k) = \frac{\mathbb{P}(X=n)}{n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Bien sûr, $\mathbb{P}(X=n, Y=k) = 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $k > n$.

On a clairement $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(Y=k) = \bigsqcup\limits_{n=k}^{+\infty} (X=n, Y=k)$ (réunion d'évènements incompatibles) donc, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(Y=k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n, Y=k)$ ce qui donne $\mathbb{P}(Y=k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^k}$. Ainsi, Y suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$. On sait d'après le cours que $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} = 2$ et que $\mathbb{V}(Y) = \frac{1-p}{p^2} = 2$.