TD 18 : VARIABLES ALÉATOIRES

PSI 1 2024-2025 **vendredi 07 février 2025**

18.1 **a.** Initialisation : la relation $\sum\limits_{k=p}^{p}\binom{k}{p}=\binom{p+1}{p+1}=1$ est clairement vraie.

Hérédité : soit $q\geqslant p$ tel que $\sum\limits_{k=p}^{q}\binom{k}{p}=\binom{q+1}{p+1}$. Alors, par hypothèse de récurrence et d'après la relation de Pascal : $\sum\limits_{k=p}^{q+1}\binom{k}{p}=\Big(\sum\limits_{k=p}^{q}\binom{k}{p}\Big)+\binom{q+1}{p}=\binom{q+1}{p+1}+\binom{q+1}{p}=\binom{q+2}{p+1}$.

On conclut par principe de récurrence que $\forall q\geqslant p,\ \sum\limits_{k=p}^{q}\binom{k}{p}=\binom{q+1}{p+1}$; encore vrai si $q<p$ $(0=0)$.

On pouvait obtenir cette relation sans récurrence en constatant que $\binom{k}{p}=\binom{k+1}{p+1}-\binom{k+1}{p}$ donc, par télescopage, $\sum\limits_{k=p}^{q}\binom{k}{p}=\sum\limits_{k=p}^{q}\left(\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right)=\binom{q+1}{p+1}-\binom{p}{p+1}=\binom{q+1}{p+1}$ (formule des colonnes).

b. On peut modéliser cette expérience par des n-uplets comme $BAABBAA\cdots BA$, celui-ci signifiant que le premier jeton tiré est Blanc, les deux suivants d'Autres couleurs, etc..... sachant qu'il doit impérativement y avoir b fois B et a fois A dans cette suite de lettres. On note Ω l'ensemble des tous ces n-uplets ; il y en a $\binom{a+b}{b}$ car il faut choisir les b tirages qui vont donner un jeton blanc parmi les $a+b$ tirages. On prend aussi la tribu pleine $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$ et pour $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω pour finaliser la modélisation. On a $X(\Omega)=[\![b;a+b]\!]$ (au moins b tirages pour prendre tous les jetons blancs et au plus $a+b$).

Soit $k\in[\![b;a+b]\!]$, alors $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{\operatorname{card}((X=k))}{\operatorname{card}(\Omega)}$ (loi uniforme sur Ω). Or $\operatorname{card}(\Omega)=\binom{a+b}{b}$ et $\operatorname{card}((X=k))=\binom{k-1}{b-1}$; en effet, il faut forcément un jeton blanc au tirage k et il faut choisir parmi les $k-1$ premiers tirages les $b-1$ tirages qui donnent un jeton blanc. Ainsi $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{a+b}{b}}=\dfrac{b(k-1)!a!}{(a+b)!(k-b)!}$.

Par définition, $\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{k=b}^{a+b}k\,\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{1}{\binom{a+b}{b}}\sum\limits_{k=b}^{a+b}k\binom{k-1}{b-1}=\dfrac{1}{\binom{a+b}{b}}\sum\limits_{k=b}^{a+b}b\binom{k}{b}$. Ce qui se simplifie d'après la question **a.** en $\mathbb{E}(X)=\dfrac{b\binom{a+b+1}{b+1}}{\binom{a+b}{b}}=\dfrac{b(a+b+1)}{b+1}<a+b$ (comme il se doit). De plus, $\mathbb{E}(X(X+1))=\sum\limits_{k=b}^{a+b}k(k+1)\,\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{1}{\binom{a+b}{b}}\sum\limits_{k=b}^{a+b}k(k+1)\binom{k-1}{b-1}=\dfrac{1}{\binom{a+b}{b}}\sum\limits_{k=b}^{a+b}b(b+1)\binom{k+1}{b+1}$. Ce qui se simplifie d'après la question **a.** en $\mathbb{E}(X(X+1))=\dfrac{b(b+1)\binom{a+b+2}{b+2}}{\binom{a+b}{b}}=\dfrac{b(a+b+2)(a+b+1)}{b+2}$.

Ainsi $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=\mathbb{E}(X(X+1))-\mathbb{E}(X)^2-\mathbb{E}(X)$ par linéarité de l'espérance. Les résultats précédents montrent que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{b(a+b+2)(a+b+1)}{b+2} - \dfrac{b^2(a+b+1)^2}{(b+1)^2} - \dfrac{b(a+b+1)}{b+1}$ ce qui devient $\mathbb{V}(X) = \dfrac{b(b+1)^2(a+b+2)(a+b+1) - b^2(a+b+1)^2(b+2) - b(a+b+1)(b+1)(b+2)}{(b+1)^2(b+2)}$ et encore en $\mathbb{V}(X) = \dfrac{b(a+b+1)\big[(b+1)^2(a+b+2) - b(a+b+1)(b+2) - (b+1)(b+2)\big]}{(b+1)^2(b+2)} = \dfrac{ab(a+b+1)}{(b+1)^2(b+2)}$.

18.2 X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc Y aussi par définition de Y car $X+1 \geqslant 2$ donc $\dfrac{X+1}{2} \geqslant 1$.

Soit un entier $k \in \mathbb{N}^*$, alors $(Y = k) = (X = 2k-1) \cup (X = 2k)$. Par incompatibilité de ces évènements, on obtient $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 2k-1) + \mathbb{P}(X = 2k)$. Puisque X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, il vient $\mathbb{P}(Y = k) = (1-p)^{2k-2}p + (1-p)^{2k-1}p = (1-p)^{2k-2}p(1+1-p)$, ce qui donne après simplification $\mathbb{P}(Y = k) = ((1-p)^2)^{k-1}(1-(1-p)^2) = (1-p(2-p))^{k-1}[p(2-p)]$.

Puisque $1-(1-p)^2 = p(2-p)$, Y suit la loi géométrique de paramètre $p(2-p)$.

18.3 **a.** Comme $p \neq 0$ et $p \neq 1$, on en déduit que $Y_n(\Omega) = \{0,1\}$. Par indépendance de X_n et X_{n+1}, il vient $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = p^2$. Ainsi Y_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p^2)$. D'après le cours, $\mathbb{E}(Y_n) = p^2$, $\mathbb{V}(Y_n) = p^2(1-p^2)$.

Bien sûr, si $i = j$, Y_i et Y_j sont plus que dépendantes (elles sont égales). Si $i < j$, on distingue deux cas :
• si $j = i+1$, alors $(Y_i = 1, Y_{i+1} = 1) = (X_i = 1, X_{i+1} = 1, X_{i+2} = 1)$. Ainsi, par indépendance mutuelle de X_i, X_{i+1}, X_{i+2}, on a $\mathbb{P}(Y_i = 0, Y_{i+1} = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1)\,\mathbb{P}(X_{i+1} = 1)\,\mathbb{P}(X_{i+2} = 1) = p^3$. Or, d'après la question **a.**, $\mathbb{P}(Y_i = 1)\,\mathbb{P}(Y_{i+1} = 1) = p^4$. Comme $p \neq 0$ et $p \neq 1$, Y_i et Y_{i+1} ne sont pas indépendantes.
• si $j > i+1$, alors Y_i dépend de X_i et X_{i+1} alors que Y_{i+1} dépend de X_j et X_{j+1}, on sent que Y_i et Y_{i+1} sont indépendantes (lemme des coalitions). Or $(Y_i = 1, Y_j = 1) = (X_i = 1, X_{i+1} = 1, X_j = 1, X_{j+1} = 1)$, donc, comme avant : $\mathbb{P}(Y_i = 1, Y_j = 1) = p^4 = \mathbb{P}(Y_i = 1)\,\mathbb{P}(Y_j = 1)$. On vérifie de même qu'on a les égalités $\mathbb{P}(Y_i = 1, Y_j = 0) = p^2(1-p^2) = \mathbb{P}(Y_i = 1)\,\mathbb{P}(Y_j = 0)$, $\mathbb{P}(Y_i = 0, Y_j = 1) = (1-p^2)p^2 = \mathbb{P}(Y_i = 0)\,\mathbb{P}(Y_j = 1)$ et $\mathbb{P}(Y_i = 0, Y_j = 0) = (1-p^2)^2 = \mathbb{P}(Y_i = 0)\,\mathbb{P}(Y_j = 0)$. Ainsi Y_i et Y_j sont bien indépendantes : $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$.
b. On traite trois cas selon le couple (n, m) :

- Si $n = m$, comme $Y_nY_m = Y_n^2 = Y_n$, on en déduit que $\mathbb{E}(Y_nY_m) = \mathbb{E}(Y_n) = p^2$.
- Si $|n-m| = 1$, $\mathbb{E}(Y_nY_m) = p^3$.
- Si $|n-m| \geqslant 2$, par indépendance de Y_n et Y_m, $\mathbb{E}(Y_nY_m) = \mathbb{E}(Y_n)\,\mathbb{E}(Y_m) = p^4$.

Par linéarité de l'espérance, comme $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{E}(Y_k) = p^2$, on a $\mathbb{E}\Big(\dfrac{Z_n}{n}\Big) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{E}(Y_k) = \dfrac{np^2}{n} = p^2$.

d. Comme Y_n et Y_m sont indépendantes dès que $|n-m| \geqslant 2$, on a $\mathbb{V}(Z_n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{V}(Y_k) + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1})$ d'après le cours. Si $i \in [\![1;n-1]\!]$, $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_iY_{i+1}) - \mathbb{E}(Y_i)\,\mathbb{E}(Y_{i+1}) = p^3 - p^4 = p^3(1-p)$ donc $\mathbb{V}(Z_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)$. Comme $p^3(1-p) \geqslant 0$, $V(Z_n) \leqslant Cn$ avec $C = p^2(1-p^2) + 2p^3(1-p)$ donc $C = p^2(1-p)[1+p+2p] = [p(1-p)](1+3p)p \leqslant \dfrac{1}{4} \times 4 \times 1 = 1$ et $\mathbb{V}\Big(\dfrac{Z_n}{n}\Big) = \dfrac{1}{n^2}\mathbb{V}(Z_n) \leqslant \dfrac{C}{n}$.

c. D'après l'inégalité de Tchebychev, on a la majoration $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{Z_n}{n} - p^2\Big| > \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(Z_n)}{\varepsilon^2}$. Or $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)}{n^2\varepsilon^2} = 0$ donc, par encadrement : $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{Z_n}{n} - p^2\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0$.
Par inégalité de Bienaymé-Tchebychev, nous avons $\mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{S_n}{n} - p^2\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{V}\Big(\dfrac{S_n}{n}\Big) \leqslant \dfrac{C^2}{n\varepsilon^2}$.

On conclut bien que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{Z_n}{n} - p^2\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0$ par théorème d'encadrement.

18.4 **a.** Comme $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{E}(X_k) = 0$, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\,\mathbb{E}(X_k) = m_n = 0$. Par indépendance 2 à 2 des variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$, donc aussi des variables aléatoires $a_1X_1, \cdots, a_nX_n$ par transfert d'indépendance, on a $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_kX_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\,\mathbb{V}(X_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = \sigma_n^2$ d'après le cours.

b. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}\,(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{\frac{t^2}{2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2n}}{2^n n!}$. Si $a_n = \dfrac{2^n n!}{(2n)!}$, $a_{n+1} = \dfrac{2(n+1)a_n}{(2n+2)(2n+1)} = \dfrac{a_n}{2n+1} \leqslant a_n$ donc $(a_n)_{n\geqslant 0}$ décroît et $a_0 = 1$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant 1 \iff \dfrac{1}{(2n)!} \leqslant \dfrac{1}{2^n n!}$. D'où $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}\,(t) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.

On pouvait aussi étudier la fonction $f : t \mapsto \dfrac{t^2}{2} - \ln(\mathrm{ch}\,(t))$, elle est deux fois dérivable et on a $f'(t) = t - \mathrm{th}\,(t)$ et $f''(t) = \mathrm{th}^2(t) \geqslant 0$ pour $t \in \mathbb{R}$ donc, comme $f'(0) = 0$, f' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$ ce qui montre que f est minimale en 0 et, comme $f(0) = 0$, que f est finalement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathrm{ch}\,(t)) \leqslant \dfrac{t^2}{2}$ et on conclut par croissance de l'exponentielle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}\,(t) \leqslant e^{t^2/2}$.

c. Les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes par hypothèse, on sait qu'alors, par transfert d'indépendance, les variables aléatoires $e^{a_1X_1}, \cdots, e^{a_nX_n}$ sont aussi indépendantes. D'après le cours, puisque $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{E}(e^{\lambda a_k X_k}) = \frac{1}{2}\Big(e^{\lambda a_k} + e^{-\lambda a_k}\Big) = \mathrm{ch}\,(\lambda a_k)$ par la formule de transfert, et d'après la question **b.**,

$\forall \lambda > 0$, $\mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) = \mathbb{E}(e^{\lambda a_1 X_1} \cdots e^{\lambda a_n X_n}) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{\lambda a_k X_k}) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\,(\lambda a_k) \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n} e^{\lambda^2 a_k^2/2} = e^{\frac{\lambda^2 \sigma_n^2}{2}}$.

d. $\exp$ est strictement croissante et $x > 0$ donc $(S_n \geqslant x) = (e^{\lambda S_n} \geqslant e^{\lambda x})$ donc $\mathbb{P}(S_n \geqslant x) = \mathbb{P}(e^{\lambda S_n} \geqslant e^{\lambda x})$. D'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire discrète réelle bornée et positive $e^{\lambda S_n}$, on a l'inégalité $\mathbb{P}(S_n \geqslant x) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(e^{\lambda S_n})}{e^{\lambda x}} \leqslant \dfrac{e^{\frac{\lambda^2\sigma_n^2}{2}}}{e^{\lambda x}} = h_x(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2\sigma_n^2}{2} - \lambda x}$. Or le minimum de $\lambda \mapsto \dfrac{\lambda^2\sigma_n^2}{2} - \lambda x$ est atteint en $\lambda = \lambda_0 = \dfrac{x}{\sigma_n^2}$ (étude de parabole). Par conséquent : $\mathbb{P}(S_n \geqslant x) \leqslant h_x(\lambda_0) = e^{\frac{-x^2}{2\sigma_n^2}}$.

Par exemple, si on effectue une marche aléatoire classique avec $a_1 = \cdots = a_n = 1$, alors $\sigma_n^2 = n$ et S_n représente la position du marcheur après n pas et on a la majoration $\mathbb{P}(S_n \geqslant \alpha\sqrt{n}) \leqslant e^{\frac{-\alpha^2 n}{2n}} = e^{\frac{-\alpha^2}{2}}$.

18.5 **a.** Par définition, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Si $n \in \mathbb{N}$, $(X \leqslant n) = \bigcup\limits_{k=0}^{n} (X = k)$ (incompatibles) donc $\mathbb{P}(X \leqslant n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Notons $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}t^n dt$. On a $I_0 = e^{-\lambda} = \mathbb{P}(X \leqslant 0) = \mathbb{P}(X = 0)$ et, si $I_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(X \leqslant n)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$, alors par intégration par parties en posant les deux fonctions de classe C^1 $u : t \mapsto -e^{-t}$ et $v : t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ telles que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on a la relation $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}t^{n+1}dt = \dfrac{1}{n!}\bigg(\Big[-\dfrac{e^{-t}t^{n+1}}{n+1}\Big]_\lambda^{+\infty} - \displaystyle\int_\lambda^{+\infty}(-e^{-t})t^n dt\bigg)$ donc $I_{n+1} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{(n+1)!} + I_n = \mathbb{P}(X = n+1) + \mathbb{P}(X \leqslant n) = \mathbb{P}(X \leqslant n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X \leqslant n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}t^n dt$.

On peut aussi appliquer la formule de Taylor reste intégral à $\exp$ entre 0 et λ pour avoir la relation $e^\lambda = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\lambda^k}{k!} + \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^\lambda (\lambda - t)^n e^t dt$ et en déduire $\mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^\lambda (\lambda - t)^n e^{t-\lambda}dt$. On effectue ensuite le changement de variable $t = \lambda - u = \varphi(u)$ facile à justifier pour avoir $\mathbb{P}(X \leqslant n) = \dfrac{1}{n!}\Big(n! - \displaystyle\int_0^\lambda u^n e^{-u}du\Big)$. Or on sait que $n! = \Gamma(n+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{n+1-1}e^{-u}du$ donc, avec Chasles, il vient $\mathbb{P}(X \leqslant n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-u}u^n du$.

b. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \leqslant n) = \Omega$. De plus, la suite $((X \leqslant n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc par théorème de continuité croissante, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Par conséquent, avec la question **a.**, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}t^n dt = 1$ ce qui revient à $\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}t^n dt \underset{+\infty}{\sim} n!$ (indépendant de $\lambda > 0$).

c. $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} = e^{\lambda(t-1)}$. Ainsi, $G_X(1) = 1$ et $G_X(-1) = e^{-2\lambda}$.

d. $(X \text{ paire}) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X = 2n)$ (évènements incompatibles) donc, par σ-additivité, $\mathbb{P}(X \text{ paire}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n)$. Avec **c.**, $G_X(1) + G_X(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 + (-1)^k)\,\mathbb{P}(X = k) = 2\,\mathbb{P}(X \text{ paire})$ donc $\mathbb{P}(X \text{ paire}) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2} > \frac{1}{2}$.

e. Avec ces hypothèses, $(XY \text{ paire}) = (X \text{ paire}, Y = 1) \cup (X \text{ quelconque}, Y = 2)$. Ainsi, par indépendance entre les variables aléatoires X et Y, $\mathbb{P}(XY \text{ paire}) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(X \text{ paire}) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{e^{-2\lambda}}{4}$.

18.6 **a.** Comme $p \neq 0$ et $p \neq 1$, on en déduit que $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$. Par indépendance de X_n et X_{n+1}, il vient $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = p^2$. Ainsi Y_n suit la loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(p^2)$. D'après le cours, $\mathbb{E}(Y_n) = p^2,\ \mathbb{V}(Y_n) = p^2(1 - p^2)$.

b. • Si $i = j$, $Y_i = Y_j$ donc $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{V}(Y_i) = p^2(1 - p^2) > 0$. Y_i et Y_j ne sont pas indépendantes.

• Si $j = i+1$, $Y_iY_j = X_{i-1}X_i^2X_{i+1} = X_{i-1}X_iX_{i+1}$ et $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}(X_{i-1}X_iX_{i+1}) - \mathbb{E}(Y_i)\,\mathbb{E}(Y_j) = p^3 - p^4 > 0$ par indépendance de X_{i-1}, X_i et X_{i+1}. Ainsi, Y_i et Y_j ne sont pas non plus indépendantes.

• si $j > i+1$, alors Y_i dépend de X_{i-1} et X_i alors que Y_j dépend de X_{j-1} et X_j, ainsi, Y_i et Y_j sont indépendantes par le lemme des coalitions. Ainsi, $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$.

c. Comme S_n est bornée, elle admet un moment d'ordre 2, donc une variance, et on a d'après l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, pour $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2}$.

d. On traite trois cas selon le couple (n, m) :

- Si $n = m$, comme $Y_nY_m = Y_n^2 = Y_n$, on en déduit que $\mathbb{E}(Y_nY_m) = \mathbb{E}(Y_n) = p^2$.
- Si $|n - m| = 1$, $\mathbb{E}(Y_nY_m) = p^3$ d'après la question **b.**.
- Si $|n - m| \geqslant 2$, par indépendance de Y_n et Y_m, $\mathbb{E}(Y_nY_m) = \mathbb{E}(Y_n)\,\mathbb{E}(Y_m) = p^4$.

Les Y_n ne sont pas indépendants donc les hypothèses de la loi faible des grands nombres ne sont pas respectées. Par linéarité de l'espérance, comme $\forall k \in [\![1; n]\!],\ \mathbb{E}(Y_k) = p^2$, on a $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = \frac{np^2}{n} = p^2$.

Comme Y_n et Y_m sont indépendantes dès que $|n - m| \geqslant 2$, on a $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \text{Cov}(Y_i, Y_{i+1})$ d'après le cours. Si $i \in [\![1; n-1]\!]$, $\text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_iY_{i+1}) - \mathbb{E}(Y_i)\,\mathbb{E}(Y_{i+1}) = p^3 - p^4 = p^3(1 - p)$ donc $\mathbb{V}(S_n) = np^2(1 - p^2) + 2(n - 1)p^3(1 - p)$. Comme $p^3(1 - p) \geqslant 0$, $V(S_n) \leqslant Cn$ avec $C = p^2(1 - p^2) + 2p^3(1 - p)$ donc $C = p^2(1 - p)[1 + p + 2p] = [p(1 - p)](1 + 3p)p \leqslant \frac{1}{4} \times 4 \times 1 = 1$ et $\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\,\mathbb{V}(S_n) \leqslant \frac{C}{n} \leqslant \frac{1}{n}$.

D'après l'inégalité de TCHEBYCHEV, on a la majoration $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n/n)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\varepsilon^2} = 0$ donc, par encadrement, $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$ donc la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ satisfait les hypothèses de la loi faible des grands nombres même si elle n'en vérifie pas les hypothèses.

18.7 **a.** Comme Y est à valeurs positives, on a $0 \leqslant X \leqslant Z$. Et comme Z suit une loi géométrique, Z admet une espérance finie. On en déduit par comparaison que X admet aussi une espérance finie.
De même, Z^2 admet aussi une espérance finie car Z admet une variance finie. Ainsi, comme $0 \leqslant X^2 \leqslant Z^2$, la variable aléatoire X^2 admet une espérance finie donc X admet une variance finie.
Par linéarité de l'espérance et d'après le cours, $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{p} = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + 1 = 2\,\mathbb{E}(X) + 1$ donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-p}{2p}$.
Puisque X et Y sont indépendantes, $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{1-p}{p^2} = \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 2\,\mathbb{V}(X)$ donc $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{2p^2}$.

b. Comme le rayon de convergence de toute série génératrice est supérieur à 1, et que d'après le cours $\forall t \in]-1;1[,\ G_Z(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$, on a $\forall t \in]-1;1[,\ G_{X+Y+1}(t) = \mathbb{E}(t^{X+Y+1}) = \mathbb{E}(tt^{X+Y}) = t\,\mathbb{E}(t^{X+Y})$ par linéarité de l'espérance. De plus, comme X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(t^{X+Y}) = G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ donc $G_{X+Y}(t) = tG_X(t)G_Y(t)$. Mais comme X et Y suivent la même loi, on a $G_X = G_Y$ donc $G_Z(t) = tG_X(t)^2$. On en déduit donc que $\forall t \in]-1;1[,\ G_X(t) = \sqrt{\dfrac{p}{1-(1-p)t}}$ car G_X est positive sur $]-1;1[$.
On sait que $\forall x \in]-1;1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2} x^n$ ce qui donne, en remplaçant x par $-(1-p)t$, $\forall t \in [-1;1]\ G_X(t) = \sqrt{p}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}(-1)^n(1-p)^n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{p}\,(2n)!(1-p)^n}{4^n(n!)^2} t^n$. En identifiant les coefficients, par unicité du développement en série entière, comme le rayon R de convergence vérifie $R \geqslant 1$, on a la loi de X donnée par $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{\sqrt{p}\,(2n)!(1-p)^n}{4^n(n!)^2}$.

18.8 **a.** L'application nulle est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 de Ω dans $\mathbb{R}$ et une combinaison linéaire de deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2 est aussi une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 d'après le cours, donc E est un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à n car engendré par n "vecteurs". La variable aléatoire nulle appartient à G. Si $(X,Y) \in G^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda X + \mu Y$ est une variable aléatoire réelle sur Ω et, comme $0 \leqslant \mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2) = 0$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}((\lambda X + \mu Y)^2) = \lambda^2\,\mathbb{E}(X^2) + 2\lambda\mu\,\mathbb{E}(XY) + \mu^2\,\mathbb{E}(Y^2) = 0$. Ainsi, G est bien un sous-espace vectoriel de E et, en tant que tel en dimension finie, admet un supplémentaire F.
Si $(X,Y) \in E^2$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, XY admet une espérance finie donc f est bien définie sur E. f est bilinéaire par linéarité de l'espérance, symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ et positive car X^2 étant une variable aléatoire positive, on a $\mathbb{E}(X^2) = f(X,X) \geqslant 0$. Par contre, $f(X,X) = \mathbb{E}(X^2) = 0$ pour toute variable aléatoire X non nulle de G donc f n'est pas définie positive donc pas un produit scalaire sur E si $G \neq \{0\}$ car pour toute variable aléatoire X non nulle de G. Néanmoins, si $G = \{0\}$ et si $f(X) = \mathbb{E}(X^2) = 0$, alors $X \in G$ donc $X = 0$ et f est bien définie positive.
Par conséquent, f est un produit scalaire sur E si et seulement si $G = \{0\}$.
b. Par contre, $g = f|_{F^2} : F^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\forall (X,Y) \in F^2,\ g(X,Y) = f(X,Y) = \mathbb{E}(XY)$ a les mêmes propriétés de bilinéarité, symétrie, et positivité en tant qu'application induite mais elle est aussi définie positive car si $X \in F$ et $g(X,X) = \mathbb{E}(X^2) = 0$, on a $X \in F \cap G = \{0_E\}$ donc $X = 0$ est la variable aléatoire nulle. Par conséquent, $g = f|_{F^2}$ est un produit scalaire sur F.

c. Pour $(X,Y) \in F^2$, on a $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)$ par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

d. Méthode 1 : les variables aléatoires Z et $\mathbb{1}_{(Z>0)}$ admettent un moment d'ordre 2 donc, par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(Z>0)}Z)^2 \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{1}^2_{(Z>0)})\,\mathbb{E}(Z^2)$. Or $\mathbb{1}^2_{(Z>0)} = \mathbb{1}_{(Z>0)}$ ce qui montre que $\mathbb{E}(\mathbb{1}^2_{(Z>0)}) = \mathbb{P}(Z>0)$ et $\mathbb{1}_{(Z>0)}Z = Z$ car Z est positive. On a donc $\mathbb{E}(Z)^2 \leqslant \mathbb{P}(Z>0)\,\mathbb{E}(Z^2)$ donc, comme $\mathbb{E}(Z^2) > 0$ par hypothèse, on a bien $\mathbb{P}(Z>0) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(Z)^2}{\mathbb{E}(Z^2)}$.

Méthode 2 : par définition $\mathbb{E}(Z) = \sum\limits_{z\in Z(\Omega)} z\,\mathbb{P}(Z=z) \geqslant 0$ puis par inégalité de CAUCHY-SCHWARZ sur les séries, en écrivant $\mathbb{E}(Z) = \sum\limits_{\substack{z\in Z(\Omega)\\ z>0}} (z\sqrt{\mathbb{P}(Z=z)})(\sqrt{\mathbb{P}(Z=z)})$, comme ces séries convergent, on obtient $\mathbb{E}(Z) \leqslant \Big(\sum\limits_{\substack{z\in Z(\Omega)\\ z>0}} z^2\,\mathbb{P}(Z=z)\Big) \times \Big(\sum\limits_{\substack{z\in Z(\Omega)\\ z>0}} \mathbb{P}(Z=z)\Big) = \mathbb{E}(Z^2)\,\mathbb{P}(Z>0)$ donc $\mathbb{P}(Z>0) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(Z)^2}{\mathbb{E}(Z^2)}$ car $\mathbb{E}(Z^2) > 0$.

e. Notons A_i le nombre d'arêtes issues du sommet i, on a $A_i = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} X_{i,j}$ par définition donc, comme les variables aléatoires $X_{i,j}$ suivent la même loi de BERNOULLI et qu'elles sont indépendantes, d'après le cours, A_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n-1, p_n)$.

f. Aucune arête ne part du sommet i si et seulement si $A_i = 0$. Ainsi, $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(A_i=0)}$ et, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(A_i=0)}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i=0) = n(1-p_n)^{n-1}$.

g. Comme $p_n = c\dfrac{\ln(n)}{n}$, on a $\mathbb{E}(Z_n) = n(1-p)^{n-1} = n\exp\Big((n-1)\ln\Big(1 - c\dfrac{\ln(n)}{n}\Big)\Big)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $(n-1)\ln\Big(1-c\dfrac{\ln(n)}{n}\Big) \underset{+\infty}{=} n\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)\Big(-c\dfrac{\ln(n)}{n} + O\Big(\dfrac{\ln(n)^2}{n^2}\Big)\Big) \underset{+\infty}{=} -c\ln(n) + o(1)$ (après regroupement). Ainsi, $\exp\Big((n-1)\ln\Big(1-c\dfrac{\ln(n)}{n}\Big)\Big) \underset{+\infty}{=} e^{-c\ln(n)+o(1)} \underset{+\infty}{=} n^{-c}e^{o(1)} \underset{+\infty}{\sim} n^{-c}$ et on conclut que $\mathbb{E}(Z_n) \underset{+\infty}{\sim} n^{1-c}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = 0$ si $c > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = +\infty$ si $c < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = 1$ si $c = 1$.

h. Comme Z_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(Z_n) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n \geqslant k) \geqslant \mathbb{P}(Z_n \geqslant 1) = \mathbb{P}(Z_n > 0)$. Ainsi, il vient $\mathbb{P}(Z_n \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(Z_n)$. C'est d'ailleurs direct par MARKOV car Z_n est à valeurs positives donc, avec $\varepsilon = 1 > 0$, $\mathbb{P}(Z_n \geqslant 1) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(Z_n)}{1}$. Or, comme $\forall n \geqslant n_0,\ \mathbb{E}(Z_n) \leqslant n\exp\Big((n-1)\ln\Big(1-c\dfrac{\ln(n)}{n}\Big)\Big)$ car $c\dfrac{\ln(n)}{n} \leqslant p_n < 1$ pour tout $n \geqslant n_0$. On a donc, d'après **g.** et par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 0$ dans ces conditions. On n'a presque sûrement aucun sommet isolé quand n tend vers $+\infty$.

i. On développe $Z_n^2 = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(A_i=0)}\Big)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}^2_{(A_i=0)} + 2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{1}_{(A_i=0)}\mathbb{1}_{(A_j=0)}$ ce qui donne, comme $\mathbb{1}^2_{(A_i=0)} = \mathbb{1}_{(A_i=0)}$, la relation $Z_n^2 = Z_n + 2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{1}_{(A_i=0)\cap(A_j=0)}$ d'où, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z_n^2) = \mathbb{E}(Z_n) + 2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{P}(A_i=0, A_j=0)$. Il y a une arête possible entre les sommets i et j, et $n-2$ autres arêtes possibles arrivant en i et $n-2$ autres arrivant en j. Par indépendance mutuelle, on obtient $\mathbb{P}(A_i=0, A_j=0) = (1-p_n)^{2n-3}$. Ainsi, en reportant, $\mathbb{E}(Z_n^2) = n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}$ donc, en factorisant par rapport aux puissances de $1-p_n$, $\mathbb{E}(Z_n^2) = n(1-p_n)^{n-1}(1 + (n-1)(1-p_n)^{n-2})$. D'après la question **d.**, on a donc $1 \geqslant \mathbb{P}(Z_n > 0) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(Z_n)^2}{\mathbb{E}(Z_n^2)} = \dfrac{n}{n-1} \times (1-p_n) \times \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(n-1)(1-p_n)^{n-2}}}$.

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} (1-p_n) = 1$ car $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geqslant n_0$, $p_n \leqslant c\frac{\ln(n)}{n}$ et, comme en question **g.**, on a $\forall n \geqslant n_0$, $(n-1)(1-p_n)^{n-2} \geqslant (n-1)\exp\left((n-2)\ln(1-c\frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(Z_n)^2}{\mathbb{E}(Z_n^2)} = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 1$ par encadrement. Il y a presque sûrement au moins un point isolé dans ce cas quand n tend vers $+\infty$ (en fait il y en a beaucoup puisque $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = +\infty$).

18.9 **a.** X_n représente le nombre de succès (la face du dé lancé vaut 1) lors d'une répétition de lancers indépendants suivant la même loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{2}$ (deux faces sur quatre). D'après le cours, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. De même, comme il n'existe qu'une face sur quatre marquée 0 ou 2, Y_n et $Z_n = n - X_n - Y_n$ (qui représente le nombre de faces 2) suivent la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n}{4}$.

b. Comme dit à la question précédente, $Z_n = n - X_n - Y_n$ suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$ donc $(X_n + Y_n)(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et, pour $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n + Y_n = k) = \mathbb{P}(Z_n = n-k) = \binom{n}{n-k}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}$ ce qui montre que $X_n + Y_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$. On pouvait aussi dire que $X_n + Y_n$ représente le nombre de fois où l'on tombe sur les faces 0 ou 1 (3 faces sur 4) lors de n lancers indépendants avec la même conclusion, $X_n + Y_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$.

Si F_k est le numéro de la face du lancer k, pour $(i,j) \in [\![0;n]\!]^2$, $\big((X_n,Y_n) = (i,j)\big) = \emptyset$ si $i + j > n$ et $\big((X_n,Y_n) = (i,j)\big) = \bigsqcup_{\substack{1\leqslant m_1<\cdots<m_i\leqslant n \\ 1\leqslant p_1<\cdots<p_j\leqslant n \\ \{m_1,\cdots,m_i\}_{(=M)}\cap\{p_1,\cdots,p_j\}_{(=P)}=\emptyset}} \bigcap_{k=1}^{i}(F_{m_k} = 1) \cap \bigcap_{k=1}^{j}(F_{p_k} = 0) \cap \bigcap_{k\notin M\cup P}(F_k = 2)$ (réunion d'évènements incompatibles) donc, par indépendance des F_m et σ-additivité, on obtient la relation suivante : $\mathbb{P}((X_n,Y_n) = (i,j)) = N\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{1}{4}\right)^{n-i-j}$ où N est le nombre de $(i+j)$-uplets $(m_1,\cdots,m_i,p_1,\cdots,p_j)$ vérifiant les conditions imposées. Or il y a $\binom{n}{i}$ façons de choisir les $(m_1,\cdots,m_i)$ et, une fois choisi ce i-uplet, il y a, de manière indépendante, $\binom{n-i}{j}$ façons de choisir le j-uplet $(p_1,\cdots,p_j)$ parmi les $n-i$ lancers restants et un seul choix pour les indices correspondant à la face 2. Au total, cela donne l'expression $N = \binom{n}{i} \times \binom{n-i}{j} = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$ choix de tels $(i+j)$-uplets $(m_1,\cdots,m_i,p_1,\cdots,p_j)$.

Ainsi, $\mathbb{P}\big((X_n,Y_n) = (i,j)\big) = 0$ si $i + j > n$ et $\mathbb{P}\big((X_n,Y_n) = (i,j)\big) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{4}\right)^{n-i}$ si $i + j \leqslant n$.

Comme X_n et Y_n sont bornées, la covariance demandée existe et $\mathrm{Cov}(X_n,Y_n) = \mathbb{E}(X_nY_n) - \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(Y_n)$ donc $\mathrm{Cov}(X_n,Y_n) = \mathbb{E}(X_nY_n) - \frac{n^2}{8}$ d'après la question **a.**.

<u>Méthode 1 :</u> pour une variable aléatoire réelle U admettant un moment d'ordre 2, on a $\mathbb{E}(U^2) = \mathbb{V}(U) + \mathbb{E}(U)^2$ donc, comme on a aussi $X_nY_n = \frac{(X_n+Y_n)^2 - X_n^2 - Y_n^2}{2}$, par linéarité de l'espérance, cela donne la relation $\mathbb{E}(X_nY_n) = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{V}(X_n+Y_n) + \mathbb{E}(X_n+Y_n)^2 - \mathbb{V}(X_n) - \mathbb{V}(Y_n) - \mathbb{E}(X_n)^2 - \mathbb{E}(Y_n)^2\Big)$. Or on connaît les lois de X_n, Y_n et $X_n + Y_n$ donc $\mathbb{E}(X_n+Y_n) = \frac{3n}{4}$, $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{2}$, $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n}{4}$, $\mathbb{V}(X_n) = \frac{n}{4}$, $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{3n}{16}$ et $\mathbb{V}(X_n+Y_n) = \frac{3n}{16}$ ce qui donne $\mathbb{E}(X_nY_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{3n}{16} + \frac{9n^2}{16} - \frac{n}{4} - \frac{3n}{16} - \frac{n^2}{4} - \frac{n^2}{16}\right) = \frac{n(n-1)}{8}$. Ainsi, on trouve

$\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = \mathbb{E}(X_nY_n) - \dfrac{n^2}{8} = -\dfrac{n}{8}$.

Méthode 2 : par le théorème de transfert appliqué à (X_n, Y_n) dont on connaît la loi avec **c.** et avec $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $f(i,j) = ij$, on a $\mathbb{E}(X_nY_n) = \sum\limits_{i+j\leqslant n} ij\,\mathbb{P}\big((X_n, Y_n) = (i,j)\big) = \sum\limits_{i+j\leqslant n} ij \dfrac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-i}$.

Traitons deux cas :

$n = 1$ Alors $X_1Y_1 = 0$ car il n'y a qu'un seul lancer donc $\mathbb{E}(X_1Y_1) = 0$.

$n \geqslant 2$ $\mathbb{E}(X_nY_n) = \dfrac{n(n-1)}{8} \sum\limits_{\substack{i+j\leqslant n\\ i>0,j>0}} \dfrac{(n-2)!}{(i-1)!(j-1)!((n-2)-(i-1)-(j-1))!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{(n-2)-(i-1)}$ et,

avec $i' = i-1, j' = j-1$, $\mathbb{E}(X_nY_n) = \dfrac{n(n-1)}{8} \sum\limits_{i'+j'\leqslant n-2} \dfrac{(n-2)!}{i'!j'!((n-2)-i'-j')!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i'}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-2-i'}$.

Avec **c.** appliquée avec $n-2$ à la place de n, comme $\Omega = \bigsqcup\limits_{i'+j'\leqslant n-2} \big((X_{n-2}, Y_{n-2}) = (i', j')\big)$, on a $\sum\limits_{i'+j'\leqslant n-2} \mathbb{P}\big((X_{n-2}, Y_{n-2}) = (i', j')\big) = \sum\limits_{i'+j'\leqslant n-2} \dfrac{(n-2)!}{i'!j'!(n-2-i'-j')!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i'}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-2-i'} = 1$. Cette relation est même vraie pour $n = 2$ car $\sum\limits_{i'+j'\leqslant 0} \dfrac{n!}{i'!j'!(0-i'-j')!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i'}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{0-i'} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0\left(\dfrac{1}{4}\right)^0 = 1$.

Ainsi, $\mathbb{E}(X_nY_n) = \dfrac{n(n-1)}{8}$.

Dans tous les cas, on a donc $\mathbb{E}(X_nY_n) = \dfrac{n(n-1)}{8}$ donc $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = \dfrac{n(n-1)}{8} - \dfrac{n^2}{8} = -\dfrac{n}{8}$.

18.10 **a.** Par définition de $\lceil X \rceil$, on a $X \leqslant Y$ mais on n'a pas $X \leqslant Y-1$ car Y est le plus petit entier k vérifiant $X \leqslant k$ donc $X > Y-1$ et on a la double inégalité, comme pour la partie entière, $X \leqslant Y < X+1$. Comme Y est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, que $Y \leqslant X+1$ alors que $X+1$ admet une espérance finie par hypothèse, par comparaison, Y admet aussi une espérance finie. Comme Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'après le cours, $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y > k)$. De plus, pour $k \in \mathbb{N}$, comme $X \leqslant Y$, on a l'inclusion $(X > k) \subset (Y > k)$. De plus, comme $Y - 1 < X$, et que k est un entier, on a $(Y > k) = (Y \geqslant k+1) \subset (X > k)$. Ainsi, par double inclusion, on a $(X > k) = (Y > k)$ ce qui donne $\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(Y > k)$. Cependant, $0 \leqslant X \leqslant Y$ donc, par croissance de l'espérance, $0 \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$ et on obtient bien $0 \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y > k) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

b. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé et $n \in \mathbb{N}$, par hypothèse on a $0 \leqslant X_{n+1} \leqslant X_n$ donc $(X_{n+1} > k) \subset (X_n > k)$. En posant $A_n = (X_n > k)$, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et, par théorème de continuité décroissante, si $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, on a $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Comme $\forall \omega \in \Omega$, $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0$, on a $A = \emptyset$ car pour un $\omega \in \Omega$ fixé, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant X_n \leqslant \varepsilon = k$ donc $\omega \notin A$. Ainsi, on a bien $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n > k) = 0$.

c. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $u_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $u_k(x) = \mathbb{P}(X_{\lfloor x \rfloor} > k)$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $u(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$.

(H_1) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on a $0 \leqslant X_{\lfloor x \rfloor} \leqslant X_0$ par hypothèse donc $(X_{\lfloor x \rfloor} > k) \subset (X_0 > k)$ et u_k est bornée sur $\mathbb{R}_+$ avec $||u_k||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \mathbb{P}(X_0 > k)$. Comme $\sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X_0 > k)$ converge d'après **a.** car X_0 est positive et admet une espérance finie, on a la convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} ||u_k||_{\infty,\mathbb{R}_+}$ donc la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ vers u sur $\mathbb{R}_+$.

(H_2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction u_k admet une limite finie en $+\infty$ d'après la question **b.** et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} u_k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbb{P}(X_{\lfloor x \rfloor} > k) = \ell_k = 0$.

Par le théorème de double limite, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ell_k = 0$ donc, en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n) = 0$ ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n > k) = 0$. Par encadrement, comme on a $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \mathbb{E}(X_n) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n > k)$ d'après la question **a.**, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$ (c'est le théorème de convergence dominée pour les variables aléatoires).

18.11 **a.** Par construction et comme les cas extrêmes sont "n fois piles" ou "n fois faces" d'un côté et "alternance pile/face" ou "alternance face/pile" de l'autre, on a $N(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

- Si $P_k =$ "on fait pile au lancer numéro k", on a $(N=1) = \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n} P_k\Big) \sqcup \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{P_k}\Big)$. Par incompatibilité de ces deux évènements et indépendance de $P_1, \cdots, P_n$, on a $\mathbb{P}(N=1) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(P_k) + \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{P_k}) = p^n + (1-p)^n$.
- Avec ces mêmes notations, $(N=2) = \Bigg(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} P_i\Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{i=k+1}^{n} \overline{P_i}\Big)\Bigg) \sqcup \Bigg(\bigcup\limits_{j=1}^{n-1} \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{j} \overline{P_i}\Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{i=j+1}^{n} P_i\Big)\Bigg)$ et, avec les mêmes arguments, $\mathbb{P}(N=2) = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p^k(1-p)^{n-k}\Big) + \Big(\sum\limits_{j=1}^{n-1} (1-p)^j p^{n-j}\Big) = 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} p^k(1-p)^{n-k}$ en posant $k = n-j$ dans la seconde somme. Ainsi, $\mathbb{P}(N=2) = 2p(1-p)\sum\limits_{m=0}^{n-2} p^m(1-p)^{n-2-m}$ avec $m = k-1$.
  - Si $p = \dfrac{1}{2}$, on a donc $\mathbb{P}(N=2) = \dfrac{(n-1)}{2^{n-1}}$.
  - Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, classiquement, $\mathbb{P}(N=2) = 2p(1-p)\dfrac{p^{n-1}-(1-p)^{n-1}}{p-(1-p)}$.

b. Pour $k \in [\![1;n-1]\!]$, comme $(I_k = 1) = \big(P_k \cap \overline{P_{k+1}}\big) \sqcup \big(\overline{P_k} \cap P_{k+1}\big)$, on obtient $\mathbb{P}(I_k) = 2p(1-p)$. Puisque I_k ne prend que les valeurs 0 et 1, I_k suit la loi de BERNOULLI de paramètre $2p(1-p)$ avec $\mathbb{E}(I_k) = 2p(1-p)$ et $\mathbb{V}(I_k) = 2p(1-p)(1-2p(1-p))$.

c. On a une série supplémentaire à chaque changement de pile à face ou de face à pile entre les tirages k et $k+1$ (et on a ce cas si et seulement si $I_k = 1$) ce qui donne, en comptant le premier tirage qui amène forcément une première série, $N = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} I_k$.

Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(N) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(I_k)$. Ainsi, $\mathbb{E}(N) = 1 + 2p(1-p)(n-1)$.

D'après le cours, on a $\mathbb{V}(N) = \mathbb{V}\Big(1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} I_k\Big) = \mathbb{V}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n-1} I_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{V}(I_k) + 2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} \mathrm{Cov}(I_i, I_j)$. Or $\mathrm{Cov}(I_i, I_j) = \mathbb{E}(I_iI_j) - \mathbb{E}(I_i)\mathbb{E}(I_j)$ et la variable aléatoire I_iI_j ne prend que les valeurs 0 et 1 donc suit une loi de BERNOULLI. Traitons deux cas selon la proximité des entiers i et j :

<u>Si $j = i+1$</u>, $(I_iI_j = 1) = (I_i = 1, I_{i+1} = 1) = (P_i \cap \overline{P_{i+1}} \cap P_{i+2}) \sqcup (\overline{P_i} \cap P_{i+1} \cap \overline{P_{i+2}})$ donc, avec les mêmes arguments qu'avant, $\mathbb{P}(I_iI_j = 1) = p(1-p)p + (1-p)p(1-p) = p(1-p)$ donc $\mathbb{E}(I_iI_j) = p(1-p)$ et $\mathrm{Cov}(I_i, I_j) = p(1-p) - 4p^2(1-p)^2 = p(1-p)(1-4p(1-p)) = p(1-p)(1-2p)^2$.

<u>Si $j > i+1$</u>, comme la variable I_i ne dépend que des lancers i et $i+1$ et I_j ne dépend que des lancers $j > i+1$ et $j+1$, par le lemme des coalitions, I_i et I_j sont indépendantes donc $\mathrm{Cov}(I_i, I_j) = 0$.

Ainsi, $\mathbb{V}(N) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{V}(I_k) + 2\sum\limits_{i=1}^{n-2} \mathrm{Cov}(I_i, I_{i+1}) = 2p(1-p)(1-2p(1-p))(n-1) + 2p(1-p)(1-2p)^2(n-2)$

qu'on peut factoriser en $\mathbb{V}(N) = 2p(1-p)\big[(1-2p(1-p))(n-1) + (1-2p)^2(n-2)\big]$ ou écrire encore sous la forme $\mathbb{V}(N) = 2p(1-p)(2n-3) - 4p^2(1-p)^2(3n-5)$.