ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 11
VARIABLES ALÉATOIRES

11.1 Variables aléatoires infinies

11.1 <u>*Marche au hasard dans le plan*</u>

On considère une particule se déplaçant au hasard dans un plan de la manière suivante :

- le temps est discret ;
- à l'instant n, la particule tire une direction au hasard parmi Nord, Sud, Est, Ouest avec probabilité $\dfrac{1}{4}$ pour chaque direction puis effectue un pas dans cette direction ;
- les tirages sont mutuellement indépendants.

Le but de l'exercice est de prouver qu'il est presque sûr que la particule passera une infinité de fois par son point de départ. On note $Z_n = (X_n, Y_n)$ la position de la particule à l'instant n (avec $Z_0 = (0, 0)$) et N le nombre d'instants $n \geqslant 1$ tels que $Z_n = (0, 0)$. On peut avoir $N = +\infty$ si ça arrive une infinité de fois de sorte que $N(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Il s'agit de prouver que $\mathbb{P}(N = +\infty) = 1$.

a. Montrer que $\mathbb{P}(N \geqslant 2) = \big(\mathbb{P}(N \geqslant 1)\big)^2$ et généraliser.

b. En déduire qu'il suffit de prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(N \geqslant 1)^k$ diverge.

c. Exprimer $\mathbb{P}(Z_n = (0, 0))$ comme somme de coefficients binomiaux.

d. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}(Z_n = (0, 0))$ et un équivalent quand n tend vers $+\infty$.
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(Z_n = (0, 0))$ est-elle convergente ?

e. Soit N_p la VAD valant 1 si $Z_p = (0, 0)$ et 0 sinon. Comparer $\mathbb{E}(N_p)$ et $\mathbb{P}(Z_p = (0, 0))$.
Que vaut $\mathbb{E}(N_0 + \cdots + N_p)$? Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} \mathbb{E}(N_0 + \cdots + N_p) = +\infty$. Conclure.
Indication : on admettra provisoirement que si X est une VAD à valeurs entières : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.

11.2 On lance une infinité de fois une pièce qui donne pile avec une probabilité $p \in]0; 1[$.

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par X_n le rang d'arrivée du n-ième pile.

a. Reconnaître la loi de X_1. En déduire $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.

b. Déterminer la loi de X_2 en calculant $\mathbb{P}_{(X_1=i)}(X_2 = j)$. Calculer $\mathbb{E}(X_2)$.

c. Calculer $\mathbb{E}\big(X_2(X_2 - 2)\big)$. En déduire $\mathbb{V}(X_2)$.

d. Déterminer la loi de X_n. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

11.3 Soit $\lambda > 0$, $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p$. Soit le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est donnée par $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ p_{i,j} = \mathbb{P}(X = i,\ Y = j) = \dfrac{\lambda^i e^{-\lambda} p^j q^{i-j}}{j!(i - j)!}$ si $0 \leqslant j \leqslant i$ et $p_{i,j} = \mathbb{P}(X = i,\ Y = j) = 0$ sinon.

a. Vérifier que $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définit une loi de probabilité conjointe. Donner les lois marginales de X, Y.

b. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = i$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

c. Déterminer la loi de $Z = X - Y$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $Z = n$.
Qu'en déduire pour Y et Z ?

11.4 Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et suivant la même loi caractérisée par $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{C}{3^k}$. On pose $W = \mathrm{Min}(X, Y)$ et $Z = \mathrm{Max}(X, Y)$.

a. Déterminer la constante C.

b. Déterminer la loi et l'espérance de W et Z.

11.5 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X,Y) = (i,j)) = \frac{\alpha}{2^i j!}$.
Calculer α et déterminer les lois marginales de X et Y.

11.6 Soit N et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ mutuellement indépendantes. On suppose que les X_k suivent toutes une même loi de fonction génératrice G_X et d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et on pose $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$.
Par exemple N est le nombre d'appels arrivant un certain jour à un livreur de pizza et X_k est le nombre de pizza commandées lors du k-ième appel. S correspond au nombre total de pizzas commandées ce jour là.
a. Établir : $\forall t \in]-1;1[,\ G_S(t) = G_N\big(G_X(t)\big)$. On admet pouvoir intervertir les indices dans la double série.
b. Si les X_k et N admettent une espérance finie, établir $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X_1)$ (identité de Wald).
c. Quelle est la loi de S si :

- N suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et X_1 suit la loi $\mathcal{B}(p)$?
- N suit la loi $\mathcal{G}(q)$ et X_1 suit la loi $\mathcal{B}(p)$?

11.2 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

11.7 *X-Cachan PSI 2015* Mathieu Gaultier

Question supplémentaire : Un élève répond de manière aléatoire à un test.

Chaque question comprend k réponses distinctes : le candidat choisit une réponse au hasard, s'il a juste il obtient 1 point, sinon il choisit une autre réponse et s'il a juste, il obtient $1/2$ point.

Combien de questions comprend le test si la note moyenne que peut obtenir l'élève est de 5 ?

11.8 *Centrale Maths1 PSI 2015* Mathis Fronty

Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes mutuellement et qui suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On définit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par ${}^tU = (X_1 \cdots X_n)$ et on pose $M = U\,{}^tU$.

a. Déterminer la loi que suit $\operatorname{rang}(M)$.

b. Déterminer la probabilité pour que M soit une matrice de projection.

11.9 *Centrale Maths1 PSI 2015* Charlotte Sapaly

Soit $n \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} B & B^2 \\ B^2 & -B \end{pmatrix}$.

a. Si B est diagonalisable, A est-elle forcément diagonalisable ?

Indication : on pose $M = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$.

b. On suppose pour cette question que B est une matrice diagonale.

Quelle condition nécessaire et suffisante sur le spectre de B nous permet d'avoir A diagonalisable ?

Indication : on s'intéresse au cas simple où B est une matrice carrée de taille 2x2. On obtient une expression de A dans la base canonique et on étudie son expression dans la base (e_1, e_3, e_2, e_4). On généralisera le résultat obtenu pour une matrice nxn.

c. On considère maintenant la matrice B diagonale suivante : $B = \begin{pmatrix} X_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & X_n \end{pmatrix}$ où les X_k sont des variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi uniforme sur $\mathbb{U}_n$ (racines n-ièmes de l'unité).

Calculer la probabilité p que A soit diagonalisable.

11.10 *Mines PSI 2015* Benjamin Dieu

Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, a un réel et $p \in]0;1[$.

On suppose que $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \binom{n}{k} a^n (1-p)^n p$ si $k \leqslant n$ et $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = 0$ si $k > n$.

a. Déterminer a.

b. Déterminer la loi marginale de Y.

c. Reconnaître la loi de X (formule du binôme négatif donnée).

d. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

e. Déterminer la loi de $Z = Y - X$.

f. Déterminer la loi de X sachant $(Y = n)$.

11.11 *CCP PSI 2015* Inès Arranz-Valsero

2 joueurs A et B font 7 parties de golf. A a une probabilité 0.4 de gagner la partie. À la fin de chaque partie, le perdant doit mettre 30 dans une cagnotte commune. On note X le nombre de parties gagnées par A à la fin de la saison et Y l'argent mis par A dans la cagnotte.

a. Déterminer la loi de X. Quelles sont les valeurs possibles que peut prendre Y ?

b. Quelle est la probabilité que A ait mis 90 dans la cagnotte à la fin de la saison ?

c. Déterminer la somme d'argent que A peut espérer mettre dans la cagnotte à la fin de la saison.

Question supplémentaire : et la variance de Y ?

11.12 *E3A PSI 2015* Édouard Le Goas

On effectue n tirages indépendants avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On note X_n la variable égale au nombre de 1 tirés.

a. Exprimer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

b. Soit k un entier strictement positif. Exprimer la limite de $\mathbb{P}(X_n = k)$ quand n tend vers l'infini.

c. On pose $q(n)$ la probabilité que X_n soit pair et $p(n)$ celle que X_n soit impair.

Exprimer $p(n) + q(n)$ et $q(n) - p(n)$. En déduire la limite de $p(n)$ quand n tend vers l'infini.

d. Soit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de 2 tirés. X_n et Y_n sont ils indépendants ?

11.13 *X-Cachan PSI 2015* Mathieu Gaultier

Une chaîne de céréales place dans chaque paquet une figurine. Il y a un total de n figurines différentes.

Dans chaque paquet, il y a équiprobabilité de trouver une figurine précise.

On définit la variable N_k : le nombre de paquets achetés pour obtenir k figurines différentes.

On définit la variable $T_k = N_k - N_{k-1}$ (par convention on posera $T_1 = 1$).

a. Définir la loi T_2.

b. Soit λ_2, λ_3 deux entiers strictement positifs. Calculer $\mathbb{P}\big((T_2 = \lambda_2) \cap (T_3 = \lambda_3)\big)$. En déduire la loi de T_3.

c. Montrer que T_2 et T_3 sont indépendants.

d. On suppose que $T_1, \cdots, T_n$ sont deux à deux indépendants. Donner la loi de T_n puis trouver un équivalent de $\mathbb{E}(N_n)$ et de $\mathbb{V}(N_n)$ en $+\infty$. On admettra que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ et que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

e. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{N_n}{n \ln(n)} - 1 \right| > \varepsilon \right) = 0$.

11.14 *Centrale Maths1 PSI 2015* Bastien Chevallier, François-Xavier Solvar et Patxi Teillagorry

Soit deux variables aléatoires X et Y indépendantes qui suivent chacune la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

a. Trouver la loi de $S = X + Y$.

b. Trouver la loi de X sachant que $S = n$.

c. Reconnaître la loi de Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ si $\exists p \in]0;1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{Z>n}(Z > n+1) = 1 - p$.

Question supplémentaire : quelle est la signification de $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ si X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$?

11.15 *Mines PSI 2015* Gaël Pérez

Pour $a > 1$, on note $\zeta(a) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^a}$. Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ une VA telle que $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{\zeta(a)n^a}$.

Soit A_k l'évènement $X(\omega)$ est divisible par k.

a. Vérifier que P est une loi de probabilité. Déterminer $\mathbb{P}(A_k)$.

b. Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, i et j premiers entre eux. A_i et A_j sont-ils indépendants ?

c. Condition pour que X admette un moment d'ordre 1. Calculer alors son espérance.

d. Condition pour que X admette un moment d'ordre 2. Calculer alors sa variance.

11.16 *Mines PSI 2015 et ENS Cachan PSI 2017* Ludovic Péron et Tom Huix I

Soit $p \in]0;1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

a. Donner la loi de Y_n, son espérance, sa variance.

b. Pour quels couples (i, j) les variables aléatoires Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?

c. Calculer $\mathbb{E}(Y_n Y_m)$ et $\mathbb{E}\Big(\dfrac{Z_n}{n}\Big)$.

d. Montrer que : $\exists C \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{V}(Z_n) \leqslant Cn$.

e. En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{Z_n}{n} - p^2\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0$.

11.17 *ENS Cachan PSI 2016* Thomas Corbères et Marine Saint-Mézard

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VA mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$.

On pose $X = \sum\limits_{i=1}^{Z} U_i$ et $Y = \sum\limits_{i=1}^{Z} (1 - U_i)$. On pose $p_k = \mathbb{P}(X = k)$, $q_k = \mathbb{P}(Y = k)$ et $r_k = \mathbb{P}(Z = k)$.

a. Montrer que $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X = k, Y = l) = r_{k+l}\dbinom{k+l}{k} p^k (1-p)^l$.

b. En déduire une expression, pour $k \in \mathbb{N}$, de p_k en fonction de p et de $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Faire de même pour q_k.

c. On suppose que Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

On s'intéresse dans la suite de cet exercice à la réciproque. On suppose que Z suit une loi non presque sûrement nulle et que X et Y sont indépendantes.

d. Dans ces conditions, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = \sum\limits_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2 \\ k+l=n}} p_k q_l$.

e. Montrer que l'on a nécessairement p_0, p_1, q_0, q_1 strictement positifs.

f. Montrer que $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2$, $p_k q_{l+1}(l+1)p = p_{k+1} q_l (k+1)(1-p)$.

g. En déduire une relation de récurrence d'ordre 1 pour la suite $(q_l)_{l\in\mathbb{N}}$.

En déduire que Y suit une loi de Poisson de paramètre à préciser en fonction de p, p_0 et p_1.

h. Conclure.

11.18 *ENS Cachan PSI 2016* Hugo Tarlé

Pierre et Marie jouent à un jeu. Ils effectuent une série de parties indépendantes. Pierre gagne avec une probabilité p et Marie avec une probabilité $q = 1 - p$. À l'issue de la partie, il y a forcément un gagnant.

On note a_{2n} la probabilité pour qu'il y ait égalité des parties gagnées à l'issue de la $2n$-ième partie.

Et b_{2n} la probabilité pour que la première égalité arrive à la $2n$-ième partie.

On note $A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n}x^{2n}$.

a. Exprimer a_{2n} en fonction de n.

b. Relier A et B.

c. Quel est le rayon R_a de $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$?

d. Donner une condition sur p pour que $A(1)$ existe.

e. Montrer que $A(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} - 1$, puis donner $B(x)$.

f. Donner la probabilité η pour qu'il n'y ait jamais égalité du nombre de parties gagnées.

11.19 *ENS Cachan PSI 2016* Jean Migliorini II

Soit C un caractère présent chez 40% de la population. On étudie un échantillon de 200 personnes. Quelle est la probabilité que la fréquence d'apparition de C dans l'échantillon soit comprise entre 30% et 50% ?

11.20 *Centrale Maths1 PSI 2016* Alexandre Janot

Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui suivent la même loi. On pose $V = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et G_X la fonction génératrice de chacune des X_i.

a. Calculer G_V en fonction de G_{X_1}.

b. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des X_i. On suppose que N et X admettent des espérances finies. On pose $V = \sum_{i=1}^{N} X_i$. On admet que $G_N(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)G_{X_1}(t)^n$. Calculer $\mathbb{E}(V)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(N)$.

c. Application : on suppose que le nombre de personnes allant à la poste sur une journée suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Il y a deux guichets : G_1 et G_2. La probabilité qu'une personne se présente à G_1 est $p \in]0;1[$. Calculer le nombre de personnes qui se présentent en moyenne à G_1.

Questions subsidiaires :

- Si X_1 et X_2 sont indépendantes, $f(X_1)$ et $g(X_2)$ sont-elles toujours indépendantes ?
- Rayon de convergence d'une série génératrice ?
- Donner le théorème d'intégration terme à terme.
- Pourquoi une série entière et sa dérivée ont le même rayon de convergence ?
- Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson ?
- Fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli ?

11.21 <u>*Centrale Maths1 PSI 2016*</u> Jean Migliorini

Soit $\theta > 0$, $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi avec $\mathbb{P}(X_1 = k) = \lambda \dfrac{\theta^k}{(1+\theta)^k}$.

a. Déterminer λ et $G_{X_1}(t)$.

b. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$ et la loi de S_n.

Questions supplémentaires :
- Quelles conditions pour dériver terme à terme ?
- Quelles conditions pour avoir $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$?

11.22 <u>*Centrale Maths1 PSI 2016*</u> Marie Rebière

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

On pose $q = 1 - p$, $T = \mathrm{Min}(X, Y)$ et $Z = |X - Y|$.

a. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(T \geqslant k)$. En déduire la loi de T.

b. Donner $\mathbb{E}(X)$. Calculer $\mathbb{E}\big(1/X\big)$.

c. Calculer $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z)$. Indication : on pourra dissocier les cas $z = 0$ et $z \geqslant 1$.

d. En déduire que T et Z sont indépendantes.

11.23 <u>*Centrale Maths1 PSI 2016*</u> Clément Suberchicot

À l'instant $t = 0$, un mobile est au point O de coordonnées $(0, 0)$. À l'instant suivant, il s'est déplacé d'une case dans une direction (Nord, Sud, Est, Ouest). Les directions sont équiprobables.

On introduit $A_n = (X_n, Y_n)$, X_n et Y_n étant les coordonnées du point où est le mobile à l'instant n.

On note Z_n la distance de O à A_n.
a. Déterminer l'espérance et la variance de X_n.
b. Montrer que $\mathbb{E}(Z_n) \leqslant \sqrt{n}$.
c. On admet que $\sum\limits_{i=0}^{k} \dbinom{k}{i}^2 = \dbinom{2k}{k}$. Calculer $\mathbb{P}(Z_n = 0)$.

11.24 <u>*Mines PSI 2016*</u> Matthieu Cadiot II

Soit un sac de billes de n couleurs différentes réparties équitablement. On tire avec remise de façon indépendante. Le processus s'arrête lorsqu'on tire 2 billes de la même couleur successivement. On note X le premier entier k tel que le tirage k donne la même couleur que le tirage $k-1$, et $X = +\infty$ si une telle répétition n'intervient jamais.

a. Déterminer $\mathbb{P}(X = k)$.

b. Le processus s'arrête-t-il presque sûrement ?

c. Calculer l'espérance et la variance de X.

11.25 <u>*Mines PSI 2016*</u> Samuel Cailleaux III

Soit X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la même loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Calculer la probabilité que $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ si $M = \begin{pmatrix} 0 & X_1 - X_2 & X_1 - X_3 \\ X_1 - X_2 & 0 & 0 \\ X_1 - X_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11.26 *Mines PSI 2016* Alexandre Janot II

Une urne contient initialement b jetons blancs et a jetons d'autres couleurs. On tire successivement des jetons sans les remettre dans l'urne jusqu'à obtenir tous les jetons blancs. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages pour arrêter l'expérience.

a. Montrer que $\sum_{k=p}^{q}\binom{k}{p}=\binom{q+1}{p+1}$.

b. Trouver la loi de X.

c. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

11.27 *Mines PSI 2016* Sam Pérochon II

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue et décroissante.

a. Montrer qu'il existe une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n)=\int_n^{n+1}f(t)dt$ si et seulement si f est positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^{+\infty}f(t)dt=1$.

b. Montrer que X admet une espérance si et seulement si l'application $g:t\mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

c. Quelle condition pour que X admette une variance ?

11.28 *Mines PSI 2016* Marine Saint-Mézard II(et Centrale Maths1 PSI 2015 Charlotte Sapaly)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit $A=\begin{pmatrix}B & B^2\\ B^2 & -B\end{pmatrix}$.

a. Si B est diagonalisable, a-t-on nécessairement A diagonalisable ?

b. Dans cette question uniquement, on suppose que B est diagonale. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

c. On suppose que B est diagonale avec sur sa diagonale des variables aléatoires mutuellement indépendantes, uniformément réparties dans l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Calculer la probabilité p que A soit diagonalisable.

Questions supplémentaires :

- Quelle est la structure de l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité ?
- Quelle est la définition d'un groupe ?
- Quelles relations connaissez-vous sur les racines n-ièmes ? Preuve ?

11.29 *CCP PSI 2016* David Espert I

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on prend une urne avec n boules blanches et n boules noires.
Si on tire une boule noire, on la remet dans l'urne.
Si on tire une boule blanche, on ne la remet pas dans l'urne et on met une boule noire à la place.
On note X_p le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du p-ième tirage.
a. Quelle est la loi de X_1 ? De X_2 ?
b. Déterminer, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}(X_k=n)$.
c. Montrer que : $\forall p\geqslant 1,\ \forall k\geqslant 0,\ \mathbb{P}(X_{p+1}=k)=\dfrac{2n-k}{2n}\mathbb{P}(X_p=k)+\dfrac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p=k+1)$.

d. On note $G_p(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}t^k\,\mathbb{P}(X_p=k)$. Montrer que G_p est polynomiale.

e. Montrer que $G_{p+1}(t)=G_p(t)+\dfrac{1-t}{2n}G_p'(t)$. Déterminer $\mathbb{E}(X_{p+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(X_p)$, puis l'expression explicite de $\mathbb{E}(X_p)$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathbb{E}(X_n)}{n}$.

11.30 *CCP PSI 2016* Sam Pérochon I

Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi.

On suppose que $Z = X + Y + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

a. X admet-elle une espérance ? une variance ?

b. Déterminer la fonction génératrice $G_X : t \mapsto \mathbb{E}(t^X)$ de X.

c. Déterminer la loi de X.

11.31 *E3A PSI 2016* Antoine Badet III

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

Déterminer la loi de $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$.

11.32 *E3A PSI 2016* Sébastien Sequeira II

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, T une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1;k]\!]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. On considère $(X_1, \cdots, X_k)$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Toutes les X_i ont la même loi et sont mutuellement indépendantes entre elles et de T. Enfin, on pose la variable aléatoire Y définie par $Y(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{T(\omega)} X_i(\omega)$.

a. Montrer que si l'espérance des X_i existe, alors celle de Y aussi.

b. Exprimer alors $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{E}(X_1)$.

11.33 *ENS Cachan PSI 2017* Corentin Gatellier II

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que cette suite converge en loi vers une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$.

a. Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose que les X_n sont à valeurs dans $[\![0;m]\!]$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi si, et seulement si, la suite de fonctions génératrices associée notée $(G_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers G_X. Indication : un polynôme de degré m n'est défini que par $m+1$ points, ne pas utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange.

b. Soit une infinité de boîtes numérotées $B_0, B_1 \ldots$. Chacune de ces boîtes contient des boules blanches et des boules noires. On note p_n la proportion de boules blanches dans B_n. On réalise $m \geqslant 1$ tirages avec remise dans chaque urne B_n et on note X_n la variable aléatoire associée au nombre de boules blanches tirées. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi.

11.34 *Mines PSI 2015 et ENS Cachan PSI 2017* Ludovic Péron et Tom Huix I

Soit $p \in]0;1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

a. Donner la loi de Y_n, son espérance, sa variance.

b. Pour quels couples (i,j) les variables aléatoires Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?

c. Calculer $\mathbb{E}(Y_n Y_m)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{Z_n}{n}\right)$.

d. Montrer que : $\exists C \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{V}(Z_n) \leqslant Cn$.

e. En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{Z_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

$\boxed{\textbf{11.35}}$ *ENS Cachan PSI 2017* Sam Mamers

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on dira par la suite que X est une VAD. On pose alors $G_X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)z^k$. On dit que X est de type $m \in \mathbb{N}^*$ si X est une VAD et s'il existe un entier $r \in [\![0; m-1]\!]$ tel que $\forall k \in \mathbb{N},\ k \neq r\ [m],\ \mathbb{P}(X = k) = 0$.

a. Cas $m = 2$, montrer que X est de type 2 équivaut à $|G_X(-1)| = 1$

b. Cas $m \geqslant 3$, montrer que X est de type m équivaut à $\left|G_X\left(e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)\right| = 1$.

c. Montrer que si r existe, alors il est unique.

d. On pose $W = X + Y$ avec X et Y deux VAD indépendantes. Montrer : W de type $m \iff X$ et Y de type m.

$\boxed{\textbf{11.36}}$ *ENS Cachan PSI 2017* Vincent Meslier II

Un questionnaire comporte 20 questions. Pour chaque question, il y a k réponses dont une seule est correcte et qui rapporte 1 point. Un candidat choisit au hasard.

a. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de points du candidat. Quelle est la loi de X ?

b. S'il échoue, le candidat a une seconde chance qui lui rapporte $1/2$ point par bonne réponse. Y est le nombre de $1/2$ points obtenus. Quelle est la loi de Y ?

c. Trouver k pour que les candidats aient en moyenne une note de $5/20$.

$\boxed{\textbf{11.37}}$ *ENS Cachan PSI 2017* Sam Pérochon I

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de sa norme euclidienne associée $||x|| = \sqrt{(x|x)}$. Soit $n \geqslant 1$, une famille $(v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs unitaires de E et $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$.

a. On suppose les v_k deux à deux orthogonaux. Montrer que $\left|\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \right|\right| = \sqrt{n}$.

b. On ne suppose plus les v_k 2 à 2 orthogonaux. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes avec $X_k(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}$. Donner $\mathbb{E}(U)$ si $U = \left|\left| \sum_{k=1}^{n} X_k v_k \right|\right|^2$.

c. En déduire qu'il existe une famille $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ telle que $\left|\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \right|\right| \leqslant \sqrt{n}$.

d. Montrer : $(v_1, \cdots, v_n)$ est une famille orthonormale $\iff \forall (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n,\ \left|\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \right|\right| = \sqrt{n}$.

e. On suppose que $(v_1, \cdots, v_n)$ n'est pas une famille orthonormale.

Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ telle que $\left|\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k \right|\right| > \sqrt{n}$.

$\boxed{\textbf{11.38}}$ *ENS Cachan PSI 2017* Maxime Pouvereau I

On se donne $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et on note $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

On cherche à montrer l'inégalité suivante : $\forall x > 0,\ \mathbb{P}(\underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\text{Max}} |S_k| \geqslant 3x) \leqslant 3\,\mathbb{P}(\underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\text{Max}} |S_k| \geqslant x)$.

On note $A = \{\underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\text{Max}} |S_k| \geqslant 3x\}$, $A_1 = \{|S_1| \geqslant 3x\}$ et $\forall k \in [\![2; n]\!]$, $A_k = \{\underset{1 \leqslant i \leqslant k-1}{\text{Max}} |S_i| < 3x\} \cap \{|S_k| \geqslant 3x\}$.

a. Montrer que $\{A_1, \cdots, A_n\}$ forme une partition de A, que A_k et $\{|S_n - S_k| > 2x\}$ sont indépendants et que l'on a l'inégalité suivante : $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant x) + \mathbb{P}(A \cap (|S_n| < x))$.

b. Conclure.

11.39 *ENS Cachan PSI 2017* Antoine Romero-Romero

On considère une suite complexe $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et on pose $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

a. Montrer que $\forall s \in \mathbb{C},\ \forall n \geqslant 1,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^s} = \frac{A_n}{n^s} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \Big(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\Big) A_k$.

b. Montrer que si $A_n \underset{+\infty}{=} O(n^\alpha)$ avec $\alpha \geqslant 0$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ converge si $\mathrm{Re}\,(s) > \alpha$.

$(a_n)_{n\geqslant 1}$ désigne maintenant une suite de variables aléatoires indépendantes.

On pose toujours $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. De plus, $\mathbb{P}(a_n = -1) = \mathbb{P}(a_n = 1) = \frac{1}{2}$.

c. Montrer que $\forall x > 0,\ \forall \lambda > 0,\ \mathbb{P}(|A_n| > x) \leqslant 2\frac{\mathbb{E}(e^{\lambda A_n})}{e^{\lambda x}}$.

d. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(a) \leqslant e^{\frac{a^2}{2}}$. En déduire une autre majoration de $\mathbb{P}(|A_n| > x)$.

11.40 *Centrale Maths1 PSI 2017* Célia Detrez

On dispose de $2n$ boules dans une urne composée de paires numérotées de 1 à n. Si on tire 2 boules identiques, on les retire de l'urne, sinon on les remet dans l'urne. Soit A_n l'évènement : $A_n =$ "on retire deux boules au premier tirage" et la variable aléatoire $T_n =$ "nombre de tirages pour vider entièrement l'urne".

a. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.

b. Déterminer la loi de T_2. Utiliser $T_2 - 1$ pour calculer $\mathbb{E}(T_2)$ et $\mathbb{V}(T_2)$.

c. Utiliser des variables aléatoires suivant une loi connue pour calculer $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}(T_n)$.

11.41 *Centrale Maths1 PSI 2017* Joseph Dumoulin

Soit $a_1, \cdots, a_n$ des réels et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs 1 et -1 de manière équiprobable. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k$.

a. Calculer l'espérance m_n et l'écart-type σ_n de la variable aléatoire S_n.

b. Montrer que pour tout réel t, on a $\mathrm{ch}\,(t) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.

c. En déduire que $\forall \lambda > 0,\ \mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) \leqslant e^{\frac{\lambda^2 \sigma_n^2}{2}}$.

d. En déduire la meilleure majoration possible de $\mathbb{P}(S_n \geqslant x)$ pour un réel $x > 0$.

11.42 *Centrale Maths1 PSI 2017* Élisa Gressier-Monard

Soit X_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients valent 0 ou 1 : $X_n = \mathcal{M}_n(\{0,1\})$.

a. Montrer l'existence de $A_n \in X_n$ telle que $\forall M \in X_n,\ \det(M) \leqslant \det(A_n)$.

Soit $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On considère alors la matrice $M = (X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

b. Montrer que $M(\Omega) = X_n$.

c. Calculer la probabilité que M soit symétrique.

d. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ si $u_n = \det(A_n)$. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

11.43 *Centrale Maths1 PSI 2017* Maxime Lacourcelle

Un enfant fait la collection de jouets Kinder. Il y a m jouets différents et la probabilité $p \in]0;1[$ d'obtenir un de ces jouets est la même à chaque ouverture de l'œuf.

a. Calculer la probabilité q_m qu'il complète sa collection en m achats. Calculer $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{q_{m+1}}{q_m}$.

Soit X_k le nombre d'achats qu'il effectue entre le moment où il obtient son k-ième jouet et l'obtention du $(k+1)$-ième jouet. On pose aussi $T = 1 + \sum\limits_{k=1}^{m-1} X_k$.

b. Quelle loi suit X_k ?

c. Calculer $\mathbb{E}(T)$. Expliquer ce que représentent T et $\mathbb{E}(T)$.

d. Montrer que $\mathbb{E}(T) \underset{+\infty}{\sim} m\ln(m)$.

11.44 *Centrale Maths1 PSI 2017* Cléa Maricourt

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance finie. On la note $r(Z)$.

b. On suppose que $\mathbb{P}(Z = n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Calculer $r(Z)$.

c. Soit $(X_1, \cdots, X_q)$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant des moments d'ordre 2. On pose $S_q = \sum\limits_{k=1}^{q} X_k$. Calculer $\mathbb{E}(S_q)$ et $\mathbb{V}(S_q)$. Le faire avec les fonctions génératrices.

11.45 *Centrale Maths1 PSI 2017* Maxime Pouvereau

Soit $p \in]0;1[$. On répète indéfiniment et de manière indépendante le lancer d'une pièce : pile avec probabilité p et face ave probabilité $1-p$. On s'arrête quand on a obtenu le second pile et on note X le nombre de "face" obtenus pendant cette expérience.

a. Déterminer la loi de X.

b. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

c. Si $X = n$, on remplit une urne avec $n+1$ boules numérotées de 0 à n. On tire une boule dans l'urne et on note Y le numéro tiré. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

d. Question de cours : définir ce qu'est une variable aléatoire.

11.46 *Mines PSI 2017* Aloïs Blarre II

a. Soit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. Écrire le développement en série entière de f.

b. À quelle condition sur r peut-on définir une variable aléatoire X telle $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{(2n)!\,r}{2^{3n}(n!)^2}$.

c. Montrer que, quand cette condition est réalisée, X admet une espérance et une variance et les calculer.

11.47 *Mines PSI 2017* Maxime Lacourcelle I

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = \mathcal{P}(E)$.

Pour une partie A de E, $\mathbb{P}(\{A\})$ est proportionnelle à $\mathrm{card}\,(A)$.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir un singleton ?

b. On prend une partie, on note C son cardinal. Calculer $\mathbb{E}(C)$ et $\mathbb{V}(C)$.

c. Calculer la probabilité, en prenant de manière indépendante A et B dans $\mathcal{P}(E)$, que $\mathrm{card}\,(A) \leqslant \mathrm{card}\,(B)$.

11.48 *Mines PSI 2017* Sam Mamers II

Soit N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = (x+1)\ln(1+x) - x$.
a. Montrer que e^{uN} admet une espérance finie pour tout réel $u > 0$.
b. Montrer que pour tout $y > 0$, on a $\underset{u>0}{\mathrm{Inf}}\left(\mathbb{E}(e^{u(N-(1+y)\lambda)})\right) = e^{-\lambda h(y)}$.
c. En déduire que $\mathbb{P}(N \geqslant (1+y)\lambda) \leqslant e^{-\lambda h(y)}$.

11.49 *Mines PSI 2017* Sam Pérochon I

Soit E un ensemble de cardinal n. A et B sont deux parties de E choisies de manière équiprobable et indépendante. Soit I (resp. U) la variable aléatoire égale au cardinal de $A \cap B$ (resp. $A \cup B$).

a. Calculer la probabilité que A et B soient disjoints.

b. Déterminer les lois de I et U.

c. Calculer l'espérance et la variance de I et U.

11.50 *CCP PSI 2017* Adrien Cassagne II

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X \leqslant n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}t^n dt$.
b. En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}t^n dt$ quand n tend vers $+\infty$.
c. Donner la fonction génératrice G_X de X. Que valent $G_X(1)$ et $G_X(-1)$?
d. En déduire la probabilité que X soit paire.
e. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X suivant une loi uniforme sur $\{1,2\}$. Calculer $\mathbb{P}(XY \text{ paire})$.

11.51 *CCP PSI 2017* Élisa Gressier-Monard II

On note N la variable représentant le nombre n de jetons tirés au cours d'un jeu ; elle vérifie $\mathbb{P}(N = n) = \dfrac{1}{2^n}$.

Si n est pair, le joueur gagne n jetons, sinon il en perd n.

Donner la probabilité de gagner, l'expression du gain algébrique G et son espérance.

11.52 *CCP PSI 2017* Cléa Maricourt II

On s'intéresse à des bactéries dans une éprouvette. On note Y leur nombre et on suppose que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque bactérie a (indépendamment des autres) une probabilité $p \in]0;1[$ d'avoir une certaine propriété $\mathcal{P}$. On désigne par X le nombre de ces bactéries dans l'éprouvette qui ont cette propriété $\mathcal{P}$.
a. Donner la loi de X sachant $(Y = j)$.
b. Trouver la loi du couple (X, Y). Puis la loi de X.
c. Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

11.53 *CCP PSI 2017* Antoine Romero-Romero I

On considère la suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes $(X_n)_{n\geqslant 1}$ qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. On se donne une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $N+1$ suive la loi géométrique de paramètre p.
a. Déterminer la loi de S_n.
b. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour $x \in]-1;1[$, la valeur de $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dbinom{n}{k} x^{n-k}$.
c. Déterminer $\mathbb{P}(S_N = k)$ pour tout entier naturel k.

11.54 <u>*E3A PSI 2017*</u> Cléa Maricourt

Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On note T la variable aléatoire égale au plus petit entier n tel qu'on ait deux 1 consécutifs aux tirages n et $n+1$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit les évènements A_n et B_n de la façon suivante:

- $A_n =$ "pas deux 1 consécutifs jusqu'au tirage n et $X_n = 0$".
- $B_n =$ "pas deux 1 consécutifs jusqu'au tirage n et $X_n = 1$".

On pose aussi $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $q_n = \mathbb{P}(B_n)$.

a. Calculer $\mathbb{P}(T=0)$, $\mathbb{P}(T=1)$ et $\mathbb{P}(T=2)$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T=n) = \frac{F_n}{2^{n+1}}$ où $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite de Fibonacci.

d. Question rajoutée : en déduire que T admet une espérance finie et la calculer.

11.55 <u>*Petites Mines PSI 2017*</u> Agathe Maldonado I

On lance 6 dés simultanément. Lorsqu'un dé ou plus vaut 6, on le(s) met de côté et on relance les autres jusqu'à ce que tous les dés vaillent 6. On définit la variable aléatoire X qui compte le nombre de lancers qu'on doit effectuer pour que les 6 dés vaillent 6.

a. Donner la loi de X. On pourra calculer sa fonction de répartition.

b. Montrer que X admet une espérance et une variance, les calculer.

11.56 <u>*ENS Ulm/Cachan PSI 2018*</u> Emeric Benoist

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

a. Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

b. Soit $\lambda > 0$ et $Z_i = e^{\lambda\left(X_i - \frac{1}{2}\right)}$ pour $i \geqslant 1$. Calculer $\mathbb{E}(Z_i)$.

c. Déterminer $\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))})$.

d. Soit $\lambda > 0$ et $t > 0$, trouver $f_t(\lambda)$ tel que $\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) > nt) \leqslant e^{-nf_t(\lambda)}$.

e. Calculer $I(t) = \underset{\lambda>0}{\mathrm{Max}}(f_t(\lambda))$. En déduire une majoration de $\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) > nt)$.

f. On lance 1000 pièces équilibrées. Majorer la probabilité d'obtenir au moins 600 fois pile.

Comparer avec les majorations obtenues avec les inégalités de Markov et Tchebychev.

11.57 <u>*ENS Ulm/Cachan PSI 2018*</u> Gauthier Crosio et Nicolas Ziegler II

Soit X, Y deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On définit $M = \mathrm{Max}(X, Y)$. Donner un équivalent en l'infini de $\mathbb{P}(M = n)$.

11.58 <u>*ENS Ulm/Cachan PSI 2018*</u> Elio Garnaoui II

Déterminer les lois de X et Y, non presque sûrement constantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, telles que $\mathbb{P}(X+Y>4) = \mathbb{P}(X+Y=3) = \mathbb{P}(X+Y=1) = 0$ et $\mathbb{P}(X+Y=0) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X+Y=2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X+Y=4) = \frac{1}{3}$.

11.59 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Martin Gros

a. Soit $\alpha > 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, le réel $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

b. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. On définit la suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ par $s_0 = 0$ et $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ si $n \geqslant 1$ et on suppose l'existence de $M > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |s_n| \leqslant M\, n^\beta$. Pour $\varepsilon > 0$, que dire de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n^{\beta+\varepsilon}}$?

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi de Rademacher : $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = 1/2$. On pose aussi $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

c. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(a) \leqslant e^{\frac{a^2}{2}}$.

d. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(|S_n| > x) \leqslant 2e^{\frac{-x^2}{2n}}$. Indication : constater que $(S_n > x) = (e^{tS_n} > e^{tx})$ si $t > 0$.

e. Soit $\varepsilon > 0$, on pose $A_n = (|S_n| > n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ et $E_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Calculer $\mathbb{P}(E_\varepsilon)$.

f. Pour $s > \frac{1}{2}$, on pose $C_s = \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \sum_{n\geqslant 1} \frac{X_n(\omega)}{n^s} \text{ converge}\right\}$. Calculer $\mathbb{P}(C_s)$.

11.60 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Eneko Jauretche I

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que sa série génératrice G a un rayon $R > 1$ et que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < R^2 \Longrightarrow G(x)G(y) = \frac{1}{2}G(\sqrt{x^2 + y^2})$.

a. Déterminer $G(0)$.

b. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = 2k + 1) = 0$.

c. Montrer que G est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont on exprimera les coefficients en fonction de x et $G'(1)$.

d. En déduire l'expression de G, puis les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

11.61 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Oihana Piquet

a. Soit $n \geqslant 3$. Quelles sont les $2n$ isométries du plan laissant invariant le polygone régulier C à n sommets ?

Soit E_n l'ensemble de ces $2n$ isométries.

b. Soit (A, B) deux points adjacents de C. Montrer qu'un élément de E_n est défini par l'image de (A, B). Combien y a-t-il d'images possibles de (A, B) ?

c. Soit $X \in E_n$. Montrer qu'il existe un unique $Y \in E_n$ tel que $Y \circ X = \mathrm{id}_C$.

d. Soit $N \geqslant 1$ et $X_1, \cdots, X_N$ des variables aléatoires indépendantes et uniformément réparties dans $E_n \setminus \{\mathrm{id}_C\}$. Calculer $\mathbb{P}(X_2 \circ X_1 = \mathrm{id})$.

e. Calculer la probabilité $p_{N,n}$ que $X_N \circ \cdots \circ X_1 = \mathrm{id}_C$ mais que pour tout $M < N$, $X_M \circ \cdots \circ X_1 \neq \mathrm{id}_C$.

f. Trouver un équivalent de $p_{n,n}$ quand n tend vers $+\infty$.

11.62 *Centrale Maths1 PSI 2018* Vincent Barreau

Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X admet une espérance (et on note $Y = X - \mathbb{E}(X)$) et une variance $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$. On fixe $\alpha > 0$.

a. Donner les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev et rappeler rapidement les démonstrations.

b. Vérifier que $\forall \lambda > 0,\ \ \mathbb{E}((Y+\lambda)^2) = \sigma^2 + \lambda^2$.

c. Montrer que $\forall \lambda > 0,\ \ \mathbb{P}(Y \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{\lambda^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda}$.

d. En déduire que $\mathbb{P}(Y \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}$.

e. Montrer que $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{2\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}$.

11.63 *Centrale Maths1 PSI 2018* Charlotte Beaune

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ d'où $S_0 = 0$. On définit $N = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{(S_n=0)}$.

a. Que représente la variable aléatoire N ?

b. Exprimer l'évènement $(N = 0)$ en fonction des évènements de la suite $\big((S_n = 0)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c. Exprimer l'évènement $(N = +\infty)$ en fonction des évènements de la suite $\big((S_n = 0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

d. En déduire que $\mathbb{P}(N < +\infty) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k = 0)\,\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{i>k} (S_i - S_k \neq 0)\Big)$.

e. En déduire que $\mathbb{P}(N = +\infty) = 1$.

Questions de cours :

- Rappeler la loi géométrique (univers image, expérience modélisée).
- Déterminer la loi du second succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli.
- Définition d'un système complet d'évènements.

11.64 *Centrale Maths1 PSI 2018* Adrien Sarrade

Dans un centre d'appels, on note X la variable aléatoire du nombre d'appels reçus par jour, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a. Calculer la fonction génératrice de X, et l'espérance de X, X^2, X^3.

b. Chaque client possède une probabilité p d'être mis en attente. Calculer la loi de Y, variable aléatoire du nombre de personnes mises en attente chaque jour.

c. Soit Z la variable aléatoire donnant le numéro du premier client mis en liste d'attente. On note $Z = 0$ s'il n'y a aucun client mis en attente. Déterminer la loi de Z.

11.65 *Mines PSI 2018* Raphaël Pobeda I

Soit Z_1, Z_2, Z_3 trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi géométrique.

Dans le plan, on considère les droites D_1, D_2, D_3 d'équation cartésienne $D_k\ :\ x + Z_k y + Z_k^2 = 0$ ($k \in [\![1;3]\!]$).

Calculer la probabilité q que les trois droites soient parallèles ou concourantes.

11.66 *Mines PSI 2018* Paul Simon II

Soit une urne contenant une proportion $p \in]0;1[$ de boules blanches et $1-p$ de boules noires. On tire avec remise et indéfiniment une boule dans cette urne. On note X (resp. Y) la variable aléatoire comptant la longueur de la première (resp. seconde) chaîne de même couleur.

Par exemple, si $\omega = \text{NNNNBBBN......}$, alors $X(\omega) = 4$ et $Y(\omega) = 3$.

a. Donner la loi conjointe de (X, Y).

b. Donner les lois et les espérances de X et Y.

c. À quelle condition sur p les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?

11.67 *Mines PSI 2018* Benoit Souillard I

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

On pose $Z = |X - Y|$. Déterminer la loi de Z et son espérance.

11.68 *CCP PSI 2018* Erwan Dessailly et Baptiste Egreteau II

Soit $R \in \mathbb{N}^*$. Un garçon pose une devinette par jour à sa sœur. Elle a indépendamment du jour une probabilité $\frac{1}{3}$ de répondre juste. Si elle répond bien R jours consécutifs, le jeu s'arrête. Pour $n \geqslant R$, on note p_n la probabilité que le jeu s'arrête à l'instant n.

a. Calculer la probabilité p_R que la fille réponde bien les R premiers jours.

On définit la variable aléatoire Z par :

- $Z = 0$ si la fille répond bien les R premiers jours.
- $Z = n \in [\![1;R]\!]$ le premier jour où elle se trompe.

b. Déterminer la loi de Z.

c. Montrer que $\forall n \geqslant R,\ p_{n+1} = \sum_{k=0}^{R-1} \frac{2}{3^{k+1}} p_{n-k}$.

d. On fixe $R = 2$. Calculer p_n en fonction de n.

11.69 *CCP PSI 2018* Martin Gros II

Des personnes A_1, A_2 et A_3 rentrent dans un bureau de poste. Il n'y a que deux guichets alors A_3 attend son tour. On est à l'instant 0 et le temps est compté en entiers. L'entier X_i, le temps de service d'une personne A_i, suit la loi suivante : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_i = k) = (1-p)p^k$ (avec $p \in]0;1[$).

Y est la variable aléatoire comptant l'instant où A_3 peut commencer à être servie.

a. Déterminer la fonction de répartition de Y et en déduire sa loi. Indication : travailler avec $\mathbb{P}(Y > k)$.

b. Exprimer l'instant Z où A_3 quitte le bureau de poste en fonction de X_3 et Y, et déterminer la loi de Z.

c. Déterminer $\mathbb{E}(Z)$.

11.70 *CCP PSI 2018* Titouan Sancier I

On considère une urne à $n \geqslant 2$ boules. On réalise des tirages avec remise.

On note X_n le premier rang tel qu'une autre boule que la première soit tirée.

a. Montrer que X_n est une variable aléatoire discrète et déterminer la loi de X_n.

b. Montrer que X_n admet une espérance. La calculer. Trouver $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Soit Y_n le premier rang tel que toutes les boules de l'urne aient été tirées au moins une fois.

c. Déterminer la loi de Y_2.

d. Déterminer la loi de Y_3.

11.71 *CCP PSI 2018* Benoit Souillard II

On considère un dé non pipé à 6 faces. On effectue n lancers indépendants.
Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui prend pour valeur le chiffre obtenu au k-ième lancer.
On note aussi $M_n = \mathrm{Max}(X_1, \cdots, X_n)$ et $m_n = \mathrm{Min}(X_1, \cdots, X_n)$.
a. Déterminer la loi de X_k et la fonction de répartition F de X_k.
b. Exprimer la fonction de répartition G_n de M_n en fonction de F.
c. Faire de même avec la fonction de répartition H_n de m_n.
d. Y a-t-il convergence simple de la suite de fonctions $(G_n)_{n\geqslant 1}$ sur $\mathbb{R}$? Uniforme ? Et pour $(H_n)_{n\geqslant 1}$?

11.72 *ENS Cachan PSI 2019* Axel Brulavoine

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant la même loi. Soit aussi N une variable aléatoire entière indépendante de toutes les X_i. On pose $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$.
a. Si chaque X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$ et N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, déterminer la loi de la variable aléatoire S_N.
b. On revient au cas général. Exprimer G_{S_N} en fonction de G_N et de G_{X_1}. Indication : on admet pouvoir intervertir les indices dans la double série numérique convergente.
c. En supposant que X_1 et N admettent des espérances finies, calculer $\mathbb{E}(S_N)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(N)$.
c. En supposant que X_1 et N admettent des variances finies, montrer que $\mathbb{V}(S_N) = \mathbb{V}(X)\,\mathbb{E}(N) + \mathbb{E}(X)^2\,\mathbb{V}(N)$.

11.73 *Centrale Maths1 PSI 2019* Romain Cornuault

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. On pose $E = \{C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid BC^T = 0 \text{ ou } BC^T \text{ non diagonalisable}\}$.

a. Donner le rang de BA^T.

b. Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

On prend maintenant $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $B^T = (1\ 1\ \dots\ 1)$. On se donne une famille $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{1}{2}$.

On pose enfin la variable aléatoire matricielle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X^T = (X_1\ X_2\ \dots\ X_n)$.

c. On note l'évènement U = "BX^T diagonalisable". Calculer $\mathbb{P}(U)$.

11.74 *ENS Cachan PSI 2015 (2) et Mines PSI 2019* Floriane Léonard et Arthur Lacombe et Thomas Brémond I

Soit un entier n tel que $n \geqslant 2$, on se donne des points $A_1, \dots, A_n$ distincts dans le plan.
Pour tout couple $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on relie par un segment les points A_i et A_j avec une probabilité p_n (on ne fait rien sinon). Les différentes liaisons entre ces points sont mutuellement indépendantes.
Pour $i \in [\![1;n]\!]$, on définit la variable aléatoire X_i par $X_i = 1$ si A_i est isolé et $X_i = 0$ sinon.
On pose enfin $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Le but est de calculer la probabilité d'avoir (ou pas) au moins un point isolé.
a. Donner la loi de X_1. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$.
b. Donner une majoration de la probabilité d'avoir au moins un point isolé.
c. Montrer que pour toute variable aléatoire discrète réelle Y admettant un moment d'ordre 2 et d'espérance non nulle, on a l'inégalité suivante : $\mathbb{P}(Y = 0) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(Y)}{\mathbb{E}(Y)^2}$.

Dans la suite de l'exercice, on pose $p_n = c\,\dfrac{\ln(n)}{n}$ avec $c > 0$.

d. Si $c > 1$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = 1$.

e. Si $c < 1$, calculer $\mathbb{E}(X_iX_j)$ pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ et $\mathbb{E}(S_n^2)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)$.

f. Comportement asymptotique de $\mathbb{E}(S_n)$ quand n tend vers $+\infty$ si $c > 1$? Si $c < 1$? Si $c = 1$?

11.75 *Mines PSI 2019* Charles Broquet I

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

a. Déterminer la loi de $S = X + Y$.

b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X sachant $(S = k)$.

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z > n + 1 | Z > n) = 1 - p$.

c. Déterminer la loi de Z.

d. On suppose que X, Y et Z sont mutuellement indépendantes, calculer $\mathbb{P}(X + Y = Z)$.

11.76 *Mines PSI 2017 et Mines PSI 2019* Thomas Laborde II et Auriane Luquet I

On s'intéresse à des enquêtes téléphoniques. Un enquêteur a une liste de n clients (numérotés de 1 à n) à appeler. Il les appelle tous par vagues, successivement, et chaque appel est indépendant des autres. Pour chaque appel, il a une probabilité $p \in]0;1[$ d'entrer en contact avec le client.
On note X_1 le nombre de personnes appelées (et eues au téléphone) lors de la première vague.
Ensuite, lors de la deuxième vague, l'enquêteur appelle les $n - X_1$ clients restants.
On note X_2 le nombre de personnes appelées (et eues au téléphone) lors de la seconde vague.
Pour $k \geqslant 2$, soit X_k la variable aléatoire comptant le nombre de personnes effectivement eues au téléphone lors de la k-ième vague où l'enquêteur a appelé les $n - X_1 - \cdots - X_{k-1}$ personnes non contactées au préalable.
Pour $i \in [\![1;n]\!]$, on note Y_i le numéro de la vague au cours de laquelle le client numéro i décroche son téléphone lors de l'appel de l'enquêteur.

a. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

b. Déterminer les lois de X_1, X_2 et Y_i (pour $i \in [\![1;n]\!]$).

c. Déterminer, pour tout entier $k \geqslant 3$, la loi de X_k.

d. Déterminer la loi de $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} X_j$. pour $k \in \mathbb{N}^*$.

On appelle N le nombre de vagues d'appels nécessaires pour que toutes les personnes décrochent.

e. Déterminer la loi de N. En déduire l'espérance de N.

11.77 *CCP PSI 2019* Axel Brulavoine I

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Soit aussi une variable aléatoire N suivant la loi géométrique de paramètre p et indépendantes de toutes les X_i. On pose $Y = \sum\limits_{k=1}^{N} X_k$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, donner la loi de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

b. Soit $x \in]-1;1[$, calculer $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.

c. Calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

11.78 *CCP PSI 2019* Kévin Dufrechou II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $N \in \mathbb{N}^*$ tels que $2n \leqslant N$. Un enclos contient N lapins, chacun d'entre eux a la probabilité $\frac{1}{2}$ d'être un mâle. On extrait de cet enclos $2n$ lapins. On note M la variable aléatoire qui compte le nombre de mâles extraits. On note C la variable aléatoire qui compte le nombre maximal de couples mâle/femelle que l'on peut former avec les $2n$ lapins extraits.

a. Déterminer la loi de M.

b. Exprimer C en fonction de M, en déduire la loi de C.

c. Déterminer l'espérance de C. Trouver un équivalent de $n - \mathbb{E}(C)$.

11.79 *CCP PSI 2019* Thomas Méot II

Soit A_1, A_2, A_3 trois personnes qui rentrent dans une poste qui contient deux guichets. A_1 et A_2 sont servis en premier et A_3 patiente. On note X_i (pour $i \in [\![1;3]\!]$) la variable aléatoire qui compte le temps que met une personne à être servie. On donne la loi de chaque X_i : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_i = k) = (1-p)p^k$ avec $p \in]0;1[$.
On note Y la variable aléatoire qui compte le temps qu'un des deux guichets met à se libérer (temps pour que A_3 accède au guichet) et Z la variable aléatoire qui compte le temps que A_3 met à sortir de la poste.
a. Déterminer la fonction de répartition de Y, puis déterminer sa loi de probabilité.
Indication : on pourra s'intéresser à $\mathbb{P}(Y > k)$.
b. Déterminer Z en fonction de X_3 et Y. En déduire la loi de Z.
c. Déterminer le temps moyen que A_3 met à sortir de la poste.

11.80 *CCP PSI 2019* Elaia Mugica II

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui suivent la même loi.
On définit les deux variables aléatoires associées $D = |X - Y|$ et $M = Min(X, Y)$.
Supposons pour les trois prochaines questions que X et Y suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$. Donner la loi de M.
b. Donner la loi conjointe de (M, D). Indication : on calculer $\mathbb{P}(D = d, M = m)$ selon que $d = 0$ ou $d > 0$.
c. Toujours en distinguant ces deux cas, calculer $\mathbb{P}(M = m | D = d)$ si $d \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Qu'en déduire ?
d. Supposons maintenant que D et M sont indépendantes et que $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(M = m) > 0$. En considérant les évènements $(D = 0, M = m)$ et $(D = 1, M = m)$, déterminer les lois de X et Y.

11.81 *CCP PSI 2019* Tanguy Sommet II

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. On pose $Z = X + Y$.
a. Montrer que Z suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
b. Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver la loi de X sachant $(Z = n)$.

11.82 *Petites Mines PSI 2019* Augustin Aumont I

Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{a}{e^n}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
a. Déterminer la valeur de a.
b. Montrer l'existence et calculer la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

11.83 *Petites Mines PSI 2019* Réjane Bastien-Amaré I

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
Soit Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $q \in]0;1[$.
On suppose que X et Y sont indépendantes et on pose $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$.
Quelle est la probabilité que A soit inversible ?

11.84 *X PSI 2020* Théo Ballet I

On effectue une suite de lancers d'une pièce. On note T la variable aléatoire donnant le numéro n du premier lancer tel qu'on ait tiré successivement Pile (au tirage $n-1$) puis Face (au tirage n).
a. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}(T > n)$.
b. Quelle est la probabilité qu'on tire un jour Pile puis Face ?
c. Calculer $\mathbb{E}(T)$.

11.85 <u>*X PSI 2020*</u> Thomas Bougnon I

Soit $n \geqslant 2$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes uniformément réparties sur $[\![1;n]\!]$. On pose $\Delta_n = \underset{1 \leqslant i \leqslant n-1}{\text{Max}}(|X_{i+1} - X_i|)$.

a. Montrer que Δ_n est une variable aléatoire.

b. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(\Delta_n \leqslant k) \leqslant \big(\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant k)\big)^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

c. Calculer, selon la valeur de k, la quantité $\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant k)$.

d. En déduire les valeurs de $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\Delta_n > \lambda n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\Delta_n > n - an^{\alpha})$ si $\lambda \in]0;1[$, $a > 0$ et $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.

11.86 <u>*ENS Cachan PSI 2021*</u> Aloïs Doucet

On note G un graphe non orienté, S l'ensemble de ses sommets (numérotés de 1 à n). Chaque sommet peut être relié aux autres, la probabilité d'une liaison est $p \in]0;1[$.

Soit x et y deux sommets distincts de ce graphe, on note $T_{x,y} = 1$ si une arête existe entre x et y et $T_{x,y} = 0$ sinon : la variable aléatoire $T_{x,y}$ suit donc une loi de Bernoulli de paramètre p.

On note Z le nombre de sommets isolés (aucune arête ne part de ce sommet).

a. On a n sommets, combien a-t-on d'arêtes ?

b. On prend un sommet, quelle est la loi régissant le nombre d'arêtes issues de ce sommet ?

c. Montrer que $\mathbb{E}(Z) = n(1-p)^{n-1}$.

d. Montrer que $\mathbb{P}(Z = 0) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{E}(Z)^2}$. Indication : on pourra utiliser $\tilde{Z} = Z - \mathbb{E}(Z)$.

On suppose dorénavant que $p = c\dfrac{\ln(n)}{n}$ avec $c > 0$.

e. Comportement asymptotique de $\mathbb{E}(Z)$ quand n tend vers $+\infty$ en fonction de c.

f. Que peut-on dire de $\mathbb{P}(Z = 0)$ si $c > 1$ quand n tend vers $+\infty$?

g. Que peut-on dire de $\mathbb{P}(Z = 0)$ si $c < 1$ quand n tend vers $+\infty$?

11.87 <u>*ENS Cachan PSI 2021*</u> Paul Jaïs et Pierre-Issa Lacourte

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et S_n le groupe des permutations de l'ensemble $[\![1;n]\!]$ (les bijections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$). On définit $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $d_0 = 1$ et, si $n \geqslant 1$, d_n est le nombre de permutations σ de S_n n'ayant aucun point fixe.

a. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe, on pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} u_{n-k}$.

Trouver u_n en fonctions des termes de la suite $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$. Indication : commencer par $n = 2$, $n = 3$.

b. Calculer d_n en fonction de n.

On considère une urne avec n boules numérotées de 1 à n et on effectue n tirages sans remise en notant $a_1, \cdots, a_n$ les numéros des boules dans l'ordre. Soit $\sigma : [\![1;n]\!] \to [\![1;n]\!]$ la permutation définie par $\sigma(k) = a_k$ associée à cette expérience aléatoire.

c. Montrer que σ suit la loi uniforme sur S_n.

d. Soit Q une partie de $[\![1;n]\!]$, on pose $\mathbb{1}_Q$ la fonction indicatrice de Q, c'est-à-dire $\mathbb{1}_Q : \Omega \to \{0,1\}$ définie par $\mathbb{1}_Q(\omega) = 1$ si $\forall i \in Q,\ \sigma(\omega)(i) = i$ et $\mathbb{1}_Q(\omega)(i) = 0$ sinon. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_Q$.

Soit F la variable aléatoire qui compte le nombre de points fixes de σ. On note f sa fonction génératrice.

e. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\dbinom{F}{j}$ pour $j \in [\![0;n]\!]$.

f. Déterminer complètement f.

g. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(F = k)$.

11.88 *ENS Cachan PSI 2021* Guillaume Touly

Soit une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui suivent toutes la loi de BERNOULLI $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

- On définit T tel que $T = n$ si n est le plus petit entier tel que $X_n = 0$ et $T = +\infty$ s'il n'existe aucun entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $X_p = 0$.
- On définit T' tel que $T' = n$ si n est le plus petit entier strictement positif tel que $X_n = X_{n-1} = 1$ et $T' = +\infty$ s'il n'existe aucun entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_p = X_{p-1} = 1$.

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(T = n)$ et $\mathbb{P}(T > n)$.

b. Calculer $\mathbb{P}(T = +\infty)$.

c. Calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.

d. Calculer $\mathbb{P}(T' = k)$ pour $k \in [\![1;4]\!]$.

e. Montrer, pour $n \geqslant 2$, que $\mathbb{P}(T' > n) \leqslant \dfrac{3\,\mathbb{P}(T' > n-2)}{4}$.

f. Montrer que T' est presque sûrement finie ; c'est-à-dire que $\mathbb{P}(T' = +\infty) = 0$.

g. Montrer, pour $n \geqslant 2$, que $\mathbb{P}(T' = n) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(T' = n-1) + \dfrac{1}{4}\mathbb{P}(T' = n-2)$.

h. Montrer que T' est d'espérance finie et calculer cette espérance (sans calculer $\mathbb{P}(T' = n)$).

11.89 *ENS Rennes PSI 2021* Raffi Sarkissian

Soit $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \cdots\}$ l'ensemble des nombres premiers ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc...) et, pour $s > 1$, $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.

a. Soit $s > 1$, pour quels valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, la famille $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\lambda n^{-s}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ par l'intermédiaire de $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \lambda n^{-s}$?

b. Soit $s > 1$, pour λ trouvé à la question **a.**, soit X une variable aléatoire suivant la loi Q_s précédente : c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = n) = \lambda n^{-s}$. Pour quelles valeurs de s la variable X admet-elle une espérance finie ?

c. Pour p nombre premier, on pose $A_p = p\,\mathbb{N}^*$. Montrer que les $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont indépendants pour la loi de probabilité précédente.

d. En déduire que $\zeta(s) = \lim\limits_{N\to+\infty} \prod\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1 - p_n^{-s}}$ qu'on note $\zeta(s) = \prod\limits_{p\in\mathcal{P}} \dfrac{1}{1 - p^{-s}}$.

e. Est-ce que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{p_n}$ converge ?

11.90 *Centrale Maths1 PSI 2021* Antoine Greil II

a. Énoncer puis démontrer l'inégalité de MARKOV.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_1, \cdots, X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de BERNOULLI de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et $\varepsilon > 0$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, majorer la quantité $\mathbb{P}\left(S_n - \dfrac{n}{2} > \varepsilon\right)$.

11.91 *Mines PSI 2021* Maëva Berland I

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes la loi de BERNOULLI de paramètre $p \in]0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_{n-1}X_n$ et $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

a. Donner la loi de Y_n, son espérance, sa variance.

b. Exprimer la covariance Y_iY_j si $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Les Y_n sont-ils deux à deux indépendants ?

c. Donner une majoration de $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$.

d. $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie-t-elle les hypothèses de la loi faible des grands nombres ? Satisfait-elle ses résultats ?

11.92 *Mines PSI 2021* Maxime Brachet I

Pierre et Marie jouent à un jeu. Ils effectuent une série de parties indépendantes. Pierre gagne avec une probabilité p et Marie avec une probabilité $q = 1 - p$. À l'issue de la partie, il y a forcément un gagnant.

On note a_{2n} la probabilité pour qu'il y ait égalité des parties gagnées à l'issue de la $2n$-ième partie.
Et b_{2n} la probabilité pour que la première égalité arrive à la $2n$-ième partie.

On note $A(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $B(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_{2n}x^{2n}$.

a. Exprimer a_{2n} en fonction de n.

b. Quel est le rayon R_a de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$?

c. Donner une condition sur p pour que $A(1)$ existe.

d. Montrer que $A(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} - 1$.

e. Relier A et B. En déduire $B(x)$.

f. Donner la probabilité η pour qu'il n'y ait jamais égalité du nombre de parties gagnées.

11.93 *Mines PSI 2021* Clotilde Cantini I

On appelle au téléphone n personnes (numérotées de 1 à n) par vague de façon indépendante sachant qu'une personne répond avec une probabilité $p \in]0;1[$. On définit les variables aléatoires suivantes :

- X_1 représente le nombre de personnes ayant répondu pendant la première vague.
- X_2 est le nombre de personnes ayant répondu parmi les $n - X_1$ contactées lors de la deuxième vague.
- En général, si $k \geqslant 3$, X_k correspond au nombre de personnes parmi les $n - X_1 - X_2 - \cdots - X_{k-1}$ ayant été appelées lors de la k-ième vague d'appels.
- Pour $i \in [\![1;n]\!]$, on note Y_i le numéro de la vague pendant laquelle la personne numéro i a répondu.
- Pour $k \geqslant 1$, $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ est le nombre de personnes ayant répondu lors des k premières vagues.
- N est le nombre de vagues d'appels nécessaires à ce que toutes les personnes décrochent.

a. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

b. Donner les lois de X_1 et X_2 et la loi de Y_k.

c. Donner la loi de X_k pour tout entier $k \geqslant 3$.

d. Donner la loi de S_k.

e. Donner la loi de N. En déduire l'espérance de N.

11.94 *Mines PSI 2021* Quentin Granier III

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$.
On choisit de manière équiprobable une permutation dans S_n et on note F_n son nombre de points fixes.
Calculer l'espérance de F_n et sa variance.

11.95 *Mines PSI 2021* Antoine Greil I

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X > n-1) > 0$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \mathbb{P}(X = n | X > n-1)$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0;1[$ et $\mathbb{P}(X > n-1) = \prod\limits_{k=1}^{n-1}(1-u_k)$.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge.

Réciproquement, soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in [0;1[$ et telle que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ diverge.

c. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait la relation $\mathbb{P}(Y > n-1) > 0$ et $\mathbb{P}(Y = n | Y > n-1) = v_n$.

11.96 *Mines PSI 2021* Arthur Riché I

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur effectue 5 tirages dans cette urne.

On compte les points comme suit :

- une boule blanche tirée rapporte 2 points ($+2$ points).
- une boule noire tirée fait perdre 3 points (-3 points).

On définit les variables aléatoires X et Y comme suit :

- X qui est le nombre de boules blanches tirées.
- Y qui est le nombre de points obtenus (somme de $+2$ et de -3).

Dans les deux prochaines questions, les cinq tirages se font avec remise.

a. Trouver la loi de X, son espérance et sa variance.

b. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Dans les deux questions suivantes, les cinq tirages s'effectuent sans remise.

c. Trouver la loi de X, son espérance et sa variance.

d. Déterminer la loi de Y.

11.97 *Mines PSI 2021* Raffi Sarkissian I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $M = U{}^tU$ et $S = {}^tVMV$.

a. Quelles lois suivent les variables aléatoires $\mathrm{rang}\,(M)$ et $\mathrm{Tr}\,(M)$?

b. Quelle est la probabilité que M soit un projecteur ?

c. Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$. Indication : on pourra commencer par le cas $n = 2$.

11.98 *CCINP PSI 2021* Julie Coheleach I

Le nombre d'enfants N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. La probabilité qu'un enfant soit une fille est $p \in]0;1[$. On note X le nombre de filles.

a. Donner la loi de probabilité du couple (N, X).

b. Donner la loi de X.

11.99 *CCINP PSI 2021* Mehdi Hamdaoui I

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui suivent la même loi, qui admettent une espérance et une variance finies, et telles que $Z = X+Y+1$ suive la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

a. Déterminer, en fonction de p, l'espérance et la variance de X.

b. Trouver la fonction génératrice de X.

c. Déterminer la loi de X.

11.100 *CCINP PSI 2021* Pierre-Issa Lacourte I

On dispose d'une urne contenant trois jetons indiscernables numérotés de 1 à 3. On effectue des tirages mutuellement indépendants avec remise d'un seul jeton à la fois. On note :

- Y le numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois deux numéros différents.
- Z le numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois les trois numéros.

a. Déterminer la loi de Y.

b. Identifier la loi de $Y - 1$. En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

c. Déterminer la loi du couple (Y, Z).

d. En déduire la loi de Z ainsi que $\mathbb{E}(Z)$.

11.101 *CCINP PSI 2021* Margot Reungoat I

On dispose de $n \geqslant 2$ urnes numérotées de 1 à n. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, dans l'urne numérotée k, on a k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et une boule dans cette urne. On définit :

- X_n le numéro de l'urne choisie.
- Y_n le numéro de la boule obtenue.

a. Déterminer la loi du couple (X_n, Y_n).

b. En déduire la loi de Y_n (sous forme de somme).

c. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$.

d. Calculer $\mathbb{V}(Y_n)$.

11.102 *ENS Cachan PSI 2022* Lucas Lacampagne

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi, $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \dfrac{1}{2}$. On pose aussi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires :

- $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
- $T = \mathrm{Min}(\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\})$ si $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\} \neq \emptyset$ et $T = +\infty$ sinon.

a. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de S_n.

b. Calculer $\mathbb{P}(T = 2)$, $\mathbb{P}(T = 4)$ et $\mathbb{P}(T = 2n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On pose $p_0 = 1$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. On pose aussi $q_k = \mathbb{P}(T = 2k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n x^n$ est convergente pour $|x| < 1$. On pose alors $p(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.

d. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ p_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{n-k} q_k$.

e. Montrer que $\forall x \in]-1;1[,\ G_T(x) = \dfrac{p(x^2) - 1}{p(x^2)}$.

f. En déduire la loi de T et son espérance.

11.103 *ENS Cachan PSI 2022* Paul Mayé

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on dira par la suite que X est une VAD. On pose alors $G_X(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) z^k$. On dit que X est de type $m \in \mathbb{N}^*$ si X est une VAD et s'il existe un entier $r \in [\![0; m-1]\!]$ tel que $\forall k \in \mathbb{N},\ k \neq r\ [m],\ \mathbb{P}(X = k) = 0$.

a. Cas $m = 2$, montrer que X est de type 2 équivaut à $|G_X(-1)| = 1$

b. Cas $m \geqslant 3$, montrer que X est de type m équivaut à $\left|G_X\left(e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)\right| = 1$.

c. Montrer que si r existe, alors il est unique. On note désormais cet entier $r(X)$.

d. On pose $W = X+Y$ avec X et Y deux VAD indépendantes. Montrer : W de type $m \Longleftrightarrow X$ et Y de type m.

e. Montrer, si X et Y sont deux VAD indépendantes de type m et $W = X+Y$, que $r(W) \equiv r(X) + r(Y)\ [m]$.

11.104 *Centrale Maths1 PSI 2022* Olivier Courmont I

Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, on tire les n boules successivement et sans remise. On note X_k le numéro de la boule obtenue au tirage $k \in [\![1;n]\!]$. On dit qu'on a un pic au tirage k si $\forall i \in [\![1;k-1]\!],\ X_i < X_k$. En particulier, on a toujours un pic au tirage 1. On note S_n le nombre de pics lors de ce tirage. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note T_k la variable de BERNOULLI valant 1 s'il y a un pic au tirage k.

a. Calculer $\mathbb{P}(S_n = n)$ et $\mathbb{P}(S_n = 1)$.

b. Donner la loi de T_k.

c. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(S_n)$.

On admet que $\mathbb{P}(T_i = 1, T_j = 1) = \dfrac{1}{ij}$ (A) si $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

d. Les variables aléatoires T_i et T_j sont-elles indépendantes ?

e. Calculer $\mathbb{V}(S_n)$ et en donner un équivalent.

11.105 *Centrale Maths1 PSI 2022* Amandine Darrigade

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,1\}$ qui suivent la loi $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a. Quelles sont les valeurs que peut prendre S_n ?

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre $\mathbb{P}(|S_{n+1}| = 1)$, $\mathbb{P}(|S_n| = 2)$ et $\mathbb{P}(|S_n| = 0)$.

c. Pour $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre $\mathbb{P}(|S_{n+1}| = k)$, $\mathbb{P}(|S_n| = k+1)$ et $\mathbb{P}(|S_n| = k-1)$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(|S_{n+1}|) = \mathbb{E}(|S_n|) + \mathbb{P}(|S_n| = 0)$.

e. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}(|S_n| = 0)$.

f. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|S_n|) = +\infty$.

g. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(|S_n|)$ quand n tend vers $+\infty$.

11.106 *Centrale Maths1 PSI 2022* Tony Géreaud

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. On note $U(\omega)$ la plus grande valeur propre de $M(\omega)$ et $V(\omega)$ la plus petite.

a. Donner la probabilité que M soit inversible.

b. Calculer $\mathrm{Cov}(U,V)$. U et V sont-elles indépendantes ?

c. On note $Z = \mathrm{Max}(X,Y)$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

11.107 *Centrale Maths1 PSI 2022* Camille Pucheu

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes suivant toutes la même loi. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $M_n = \mathrm{Max}(X_1, \cdots, X_n)$.

a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(M_n \leqslant k-1) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k-1)^n$.

b. Soit ici un réel $\alpha > 1$ tel que la variable aléatoire X_1^α admette une espérance finie notée m_α. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_1 \leqslant k-1) \geqslant 1 - \frac{m_\alpha}{k^\alpha}$. En déduire que M_n admet une espérance finie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. On suppose ici que X_1 suit la loi géométrique de paramètre $1/2$. Montrer que M_n admet une espérance finie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\mathbb{E}(M_n) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \big(1 - (1 - 2^{-k})^n\big)$.

d. En déduire une expression de $\mathbb{E}(M_n)$ sous forme de somme finie.

11.108 *Centrale Maths1 PSI 2022* Matis Viozelange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, des réels $x_1, \cdots, x_n$ distincts et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note $p_k = \mathbb{P}(X = x_k) > 0$. On définit aussi la fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\Phi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$.

a. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ |\Phi(t)| \leqslant 1$.

b. Établir que $|\Phi(t)|^2 \underset{0}{=} 1 - \mathbb{V}(X)t^2 + o(t^2)$.

c. On suppose que $X(\Omega) \subset a + \mathbb{Z}b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$, c'est-à-dire que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\exists m_k \in \mathbb{Z}$, $x_k = a + m_k b$. Montrer que $\exists t_0 \in \mathbb{R}^*,\ |\Phi(t_0)| = 1$.

d. On suppose dorénavant qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\Phi(t_0)| = 1$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} e^{i(x_k t_0 - \alpha)} p_k$. En déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que $X(\Omega) \subset a + \mathbb{Z}b$.

11.109 *Mines PSI 2022* Noé Chassagne I

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à une urne contenant n boules non discernables numérotées de 1 à n. On effectue des tirages et, à chaque tirage, on supprime de l'urne les boules dont le numéro est supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider entièrement l'urne.

a. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

b. Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$.

c. Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Question supplémentaire : montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

11.110 *Mines PSI 2022* Jimmy Guertin II

Soit $p \in]0;1[$ et (X_1, X_2) deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_k(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p$ pour $k = 1$ ou $k = 2$.

a. Trouver la (ou les) valeur(s) de p telle(s) que X_1X_2 est indépendante de X_1, de X_2.

b. Trouver la (ou les) valeur(s) de p telle(s) que X_1X_2 est indépendante de (X_1, X_2).

11.111 *Mines PSI 2022* Fares Keraautret I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in [\![1;n]\!]$. On se donne deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit la variable aléatoire $Z_m : \Omega \to [\![1;n]\!]$ par $Z_m(\omega) = X(\omega)$ si $Y(\omega) \leqslant m$ et $Z_m(\omega) = Y(\omega)$ sinon.

a. Déterminer la loi de Z.

b. Calculer l'espérance de X, Y, Z_m en fonction de n et m.

c. Trouver la valeur m_0 de m telle que $\mathbb{E}(Z_m)$ est maximale.

11.112 *Mines PSI 2022* Paul Lafon II

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et des urnes notées $U_0, \cdots, U_p$ telles que U_i contient i boules blanches et $p - i$ boules noires. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit une urne au hasard et on effectue n tirages dans cette urne avec remise.
La variable aléatoire N_p correspond au nombre de boules blanches tirées et, pour tout entier $i \in [\![0;p]\!]$, on définit l'évènement A_i = "on choisit l'urne U_i".

a. Calculer $\mathbb{P}_{A_i}(N_p = k)$ pour $i \in [\![0;p]\!]$ et $k \in [\![0;n]\!]$.

b. Calculer $\mathbb{E}(N_p)$ sous réserve d'existence.

c. Montrer que $\lim_{p \to +\infty} \mathbb{P}(N_p = k) = \binom{n}{k} \int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx$ avec a et b à déterminer.

11.113 *CCINP PSI 2022* Lola Belle Wangue I

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On note :

- X le nombre de lancers pour obtenir la première séquence “pile-face”.
- Y le numéro du premier lancer où on tombe sur “pile”.

a. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

b. Déterminer la loi de X.

c. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

11.114 *CCINP PSI 2022* Manon Odelot I

Soit $p \in]0;1[$ et X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout couple $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, on ait $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \binom{n}{k}\frac{p}{2^n}(1-p)^n$ si $k \leqslant n$ et $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = 0$ sinon.

a. Déterminer la loi de Y.

b. Montrer que $\forall x \in]-1;1[,\ \sum\limits_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

c. Déterminer la loi de X. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d. Déterminer la loi de $Z = Y - X$.

e. Déterminer la loi de X sachant $(Y = n)$.

11.115 *CCINP PSI 2022* Baptiste Savarit I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et dont la loi est donnée par la relation $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{k+1}\binom{n}{k}$ pour un réel $a > 0$.

a. Déterminer α dépendant de n et k tel que $\binom{n}{k} = \alpha\binom{n+1}{k+1}$ si $k \in [\![0;n]\!]$.

b. En déduire la valeur de a.

c. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

11.116 *CCINP PSI 2022* Paul Sterlin II

On dispose d’une urne contenant trois jetons indiscernables numérotés de 1 à 3. On effectue des tirages indépendants avec remise d’un seul jeton à la fois. On note :

- Y le numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois deux numéros différents.
- Z le numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois les trois numéros.

a. Déterminer la loi de Y.

b. Identifier la loi de $Y - 1$. En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

c. Déterminer la loi du couple (Y, Z).

d. En déduire la loi de Z ainsi que $\mathbb{E}(Z)$.

11.117 *CCINP PSI 2022* Matis Viozelange I

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Posons $Z = X + Y$.

a. Montrer que Z suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de X sachant $(Z = n)$.

11.118 *Mines-Télécom PSI 2022* Marius Desvalois II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, n jetons et n urnes $U_1, \cdots, U_n$. Pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, on place le k^e jeton de manière équiprobable dans l'une des urnes $U_1, \cdots, U_k$. On note X_n le nombre d'urnes n'ayant pas de jetons à la fin de ce processus. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on définit la variable aléatoire B_k par $B_k = 1$ si U_k est vide et $B_k = 0$ sinon.

a. Déterminer $X_n(\Omega)$. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = n-1)$.

b. Déterminer la loi de B_k pour $k \in [\![1;n]\!]$. Calculer $\mathbb{E}(B_k)$ et $\mathbb{V}(B_k)$ pour $k \in [\![1;n]\!]$.

c. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$. Calculer aussi $\mathbb{V}(X_n)$.

11.119 *Navale PSI 2022* Naïs Baubry I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(p,q) \in]0;1[^2$ tel que $p+q < 1$ et $r = 1-p-q$.

On lance n fois un dé truqué qui n'a que $1, 2, 3$ sur ses faces. À chaque lancer, on a une probabilité p d'obtenir la face 1, une probabilité q d'obtenir la face 2, une probabilité r d'obtenir la face 3.

On note X (resp. Y) la variable aléatoire donnant le nombre de 1 (resp. 2) obtenus au cours des n lancers. Les lancers sont supposés indépendants.

a. Déterminer les lois de X et de Y.

b. Déterminer la loi du couple (X,Y).

c. X et Y sont-elles indépendantes ?

On suppose maintenant que le nombre de lancers N est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On lance à nouveau N fois le dé truqué avec les mêmes variables aléatoires X et Y.

d. Déterminer les lois de X et Y.

e. X et Y sont-elles indépendantes ?

11.120 *ENS Cachan PSI 2023* Lilian Dupouy

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2. On pose $E = \mathrm{Vect}(X_1, \cdots, X_n)$ et on définit $f : E^2 \to \mathbb{R}$ par $f(X,Y) = \mathbb{E}(XY)$.

On pose $G = \{X \in E \mid \mathbb{E}(X^2) = 0\}$ et on considère un sous-espace vectoriel F de E tel que $E = F \oplus G$.

a. Montrer que f est bilinéaire, symétrique et positive. Est-elle définie positive ?

b. La fonction $f|_{F^2}$ est-elle un produit scalaire sur F ?

c. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $(X,Y) \in F^2$.

d. Soit Z une variable aléatoire discrète réelle positive admettant un moment d'ordre 2 et telle que $\mathbb{E}(Z^2) > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(Z > 0) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(Z)^2}{\mathbb{E}(Z^2)}$.

On note G un graphe non orienté, S l'ensemble de ses sommets (numérotés de 1 à n). Chaque sommet peut être relié aux autres, de manière indépendante, la probabilité d'une liaison est $p_n \in]0;1[$.

Soit i et j deux sommets distincts de ce graphe, on note $X_{i,j} = 1$ si une arête existe entre les sommets i et j et $X_{i,j} = 0$ sinon : la variable aléatoire $X_{i,j}$ suit donc une loi de Bernoulli de paramètre p_n.

On note $Z_n = \mathrm{card}\big(\{i \in [\![1;n]\!] \mid \forall j \in [\![1;n]\!] \setminus \{i\},\ X_{i,j} = 0\}\big)$ le nombre de sommets isolés.

e. On prend un sommet i, quelle est la loi régissant le nombre d'arêtes issues de ce sommet ?

f. Montrer que $\mathbb{E}(Z_n) = n(1-p_n)^{n-1}$.

g. Comportement asymptotique de $\mathbb{E}(Z_n)$ quand n tend vers $+\infty$ en fonction de $c > 0$ tel que $p_n = c\dfrac{\ln(n)}{n}$.

h. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 0$ si $\exists c > 1,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ p_n \geqslant c\dfrac{\ln(n)}{n}$ (on écrit $p_n \gg \dfrac{\ln(n)}{n}$).

i. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 1$ si $\exists c < 1,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ p_n \leqslant c\dfrac{\ln(n)}{n}$ (on écrit $p_n \ll \dfrac{\ln(n)}{n}$).

11.121 *Centrale Maths1 PSI 2023* Juan Dupierris

On étudie un dé équilibré qui comporte quatre faces : une marquée 0, deux marquées 1 et une marquée 2.

On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois ce dé et on note X_n (resp. Y_n) le nombre de 1 (resp. 0) obtenus.

a. Donner les lois de X_n et Y_n. Quelles sont leurs espérances ?

b. Donner la loi de $X_n + Y_n$.

c. Donner la loi de (X_n, Y_n).

d. Donner la covariance de X_n et Y_n.

11.122 *Centrale Maths1 PSI 2023* Olivier Farje

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et une urne avec initialement N boules rouges. On tire successivement dans l'urne :

Si on tire une boule rouge, on la remplace par une verte.

Si on tire une boule verte, on la remet dans l'urne.

On note X_p le nombre de boules rouges dans l'urne à l'issue du p-ième tirage. On pose $X_0 = N$.

On note Y le rang où on enlève la dernière boule rouge ($Y = 0$ si ce rang n'existe pas).

a. Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ \forall k \geqslant 0,\ \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$.

b. En déduire une relation entre $\mathbb{E}(X_{n+1})$ et $\mathbb{E}(X_n)$.

c. Donner $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et N et en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ et de $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X_N)}{N}$.

d. Montrer que $(Y = 0) \subset \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1)$, puis en déduire la valeur de $\mathbb{P}(Y = 0)$.

11.123 *Centrale Maths1 PSI 2023* Gabriel Hofman

On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \;\middle|\; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

a. Quelles sont les matrices de F qui sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

b. Quelles sont les matrices de F dont l'endomorphisme canoniquement associé est un projecteur orthogonal ?

Soit X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$.

c. Quelle est la probabilité que $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & X \end{pmatrix}$ soit inversible ?

11.124 *Centrale Maths1 PSI 2023* Antoine Vallade

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire sur un espace probabilisé suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé et suivant toutes la loi de X. On pose $N = \mathrm{Inf}\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n > X_0\}$ si $\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n > X_0\} \neq \emptyset$ et $N = +\infty$ sinon..

a. Montrer à l'aide de la formule de Taylor reste intégral que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X > k) \leqslant \dfrac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$.

b. La variable aléatoire N admet-elle une espérance finie ?

c. Montrer que N est presque sûrement finie.

11.125 *Mines PSI 2023* Paul-Antoine Baury-Carpentier I

Pour tout réel x, on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier relatif k tel que $x \leqslant k$.

Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive admettant une espérance finie et on pose $Y = \lceil X \rceil$.

a. Montrer que $0 \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

b. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de variables aléatoires discrètes réelles positives telle que X_0 admet une espérance finie et telle que $\forall \omega \in \Omega,\ \lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n > k) = 0$.

c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$.

11.126 *Mines PSI 2023* Arthur Biot I

On répète une expérience de Bernoulli indépendante de même paramètre $p \in]0;1[$. On note X_n le nombre d'expériences nécessaires pour obtenir le n-ième succès.

a. X_1 est-elle une variable aléatoire discrète ?

b. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_1.

c. Déterminer la loi de X_n pour $n \geqslant 2$. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

d. Soit $Y_1, \cdots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X_1 et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$. Expliquer.

11.127 *Mines PSI 2023* Lilian Dupouy II

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à une urne contenant n boules non discernables numérotées de 1 à n. On effectue des tirages et, à chaque tirage, on supprime de l'urne les boules dont le numéro est supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider entièrement l'urne.

a. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

b. Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$.

c. Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Question supplémentaire : montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

11.128 *CCINP PSI 2023* Marius Desvalois I

Soit $\alpha \in]0;1[$, $\lambda > 0$ et X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on ait $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!}$ si $0 \leqslant j \leqslant i$ et $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0$ sinon. On pose $Z = X - Y$.

a. Déterminer la loi de X.

b. Déterminer la loi de Y.

c. X et Y sont-elles indépendantes ?

d. Déterminer la loi de Z.

e. Pour $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y = j)$.

f. Conclure.

11.129 *CCINP PSI 2023* Juan Dupierris I et Gabriel Hofman I

Une entreprise commercialise deux produits A et B. Le service après-vente reçoit des appels concernant ces deux produits, 20% pour le produit A et 80% pour le produit B. On note X_A (resp. X_B) la variable aléatoire qui compte le nombre d'appels avant d'en avoir un qui concerne le produit A (resp. B).

On note L la variable aléatoire qui compte la longueur de la première chaîne d'appels sur un même produit.

Par exemple, si on reçoit les appels $AAABBAB$...., alors $X_A = 1$, $X_B = 4$, $L = 3$.

a. Déterminer la loi de X_A. Montrer que X_A admet une espérance et une variance finies et les calculer. Faire de même pour X_B.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, décomposer $(L = n)$ en distinguant selon le $(n+1)$-ième appel.

En déduire que $\mathbb{P}(L = n) = 0,8\,\mathbb{P}(X_A = n) + 0,2\,\mathbb{P}(X_B = n)$.

c. En déduire que L admet une espérance finie et la calculer.

11.130 *CCINP PSI 2023* Jonathan Filocco I

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules (numéros de 1 à X) dans une urne, telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ avec $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = i) = \frac{i}{2^{i+1}}$. On procède à un tirage et on note Y le numéro de la boule tirée.

a. Montrer que la définition de la loi de X est cohérente.

b. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

c. Déterminer la loi conjointe de X et Y.

d. Calculer la loi de Y et son espérance.

11.131 *CCINP PSI 2023* Sacha Meslier I

On joue à pile ou face, avec une probabilité $p \in]0;1[$ de faire pile et $1-p$ de faire face. On effectue $n \geqslant 2$ lancers. On note N le nombre de séries obtenues. Par exemple $N = 3$ si, pour $n = 10$, on a les tirages $PPPPFFFFPP$ et $N = 5$ si, pour $n = 10$, on tire $FPPFFPPPFF$.

Pour tout entier $k \in [\![1; n-1]\!]$, on définit I_k telle que $I_k = 0$ si les lancers k et $k+1$ donnent des résultats identiques et $I_k = 1$ sinon.

a. Déterminer $N(\Omega)$.

b. Calculer $\mathbb{P}(N = 1)$ et $\mathbb{P}(N = 2)$.

c. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, donner la loi de I_k.

d. Écrire N en fonction des I_k.

e. Déterminer l'espérance et la variance de N.

11.132 *CCINP PSI 2023* Antoine Vallade I

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = i) = \frac{\alpha\, i}{2^i}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Calculer α.

b. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

c. Calculer $\mathbb{V}(X)$.

11.3 Officiel de la Taupe

11.133 *OdlT 2015/2016 X-Cachan PSI planche 40I*

n convertisseurs numériques fonctionnant de manière indépendante sont placés en série. Chaque convertisseur restitue correctement le bit qu'on lui fournit avec la probabilité p et renvoie le bit opposé avec la probabilité $1-p$, $p \in [0;1]$. On note X_0 le bit en entrée de chaîne et X_k le bit en sortie du k-ième convertisseur.

On pose $A_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 0) \end{pmatrix}$; déterminer une relation de récurrence entre les A_k et en déduire la probabilité que le bit initial soit correctement rendu en sortie du n-ième convertisseur.

Que se passe-t-il lorsque l'on passe à la limite ?

L'exercice suivant ne pourra être abordé que si le précédent a été résolu.

11.134 *OdlT 2015/2016 X-Cachan PSI planche 40II*

Cet exercice ne peut être abordé que si le précédent a été résolu

Un dé pipé a six faces numérotées de 1 à 6 et la probabilité d'obtenir la face k est notée $p(k)$; on le lance n fois successives et on note x_k la face obtenue au k-ième lancer.

Que peut-on dire du nombre N_k d'apparitions de la face k quand n tend vers $+\infty$?

En supposant que $\forall k \in [\![1;6]\!]$, $np(k) \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité d'obtenir une suite $(x_1, \cdots, x_n)$ de lancers telle que $\forall k \in [\![1;6]\!]$, $N_k = np(k)$? Cas du dé non pipé.

11.135 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 120I*

Un chocolatier propose de collectionner n vignettes différentes qu'il distribue au hasard dans ses chocolats, qui coûtent 1 euro le paquet. Calculer l'argent moyen à dépenser pour avoir les n vignettes. Déterminer un équivalent de cet argent moyen à dépenser quand n tend vers $+\infty$.

11.136 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 123I* Soit X une V.A. d'un espace probabilisé (Ω, A, P), et $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

On note G_X sa fonction génératrice. Montrer que $\forall r \in]0;1[$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \dfrac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}$ et étudier le cas d'égalité.

11.137 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 126I* Soit une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

On pose $f(t) = \mathbb{E}(t^X)$. Calculer $f^{(k)}(1)$ en fonction de $u_k(X) = \mathbb{E}\Big(\prod_{p=0}^{k-1}(X - p)\Big)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Montrer que $\mathbb{P}(X = j) = \dfrac{1}{j!}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{j-k}\dfrac{u_k(X)}{(k-j)!}$.

11.138 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 238I* On pose $\forall \alpha \geqslant 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = \dfrac{e^{-2}4^k(1 + \alpha k)}{(2k)!}$.

Soient Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 2 et $T = 1 + Y$; déterminer $\mathbb{P}(T = k)$.

Trouver une condition sur α pour que (p_k) définisse une probabilité.

On suppose cette condition vérifiée et on donne une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que l'on ait $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = p_k$; déterminer l'espérance de X.

11.139 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 239II*

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}\Big(\dfrac{1}{1+X}\Big)$.

11.140 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 247I*

Deux variables aléatoires X et Y suivent respectivement une loi de Poisson de paramètre λ et une loi binomiale de paramètres n et p à condition que $X = n$.

Déterminer la loi conjointe de (X, Y), en déduire la loi de Y et la reconnaître.

Déterminer la loi de $Z = X - Y$; les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

11.141 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 249II*

Deux variables aléatoires X et Y suivent une loi de Bernoulli de paramètres respectifs p et q. La covariance de X et Y est nulle. Montrer que $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 1)$ puis que X et Y sont indépendantes.

11.142 *OdlT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 280I*

Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent la loi donnée par $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p(1-p)^k$, $p \in]0;1]$. Donner la loi conjointe de $U = \mathrm{Max}(X, Y)$ et $V = \mathrm{Min}(X, Y)$ puis en déduire les lois de U et de V ; sont-elles indépendantes ? Donner la loi de $S = U + V$; admet-elle une espérance ?

11.143 *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 36I*

Soit deux réels $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$; on note $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes et prenant leurs valeurs dans $[a;b]$.

Si S est leur somme, on veut montrer que $\forall t > 0,\ \mathbb{P}(S - \mathbb{E}(S) \geqslant t) \leqslant e^{\frac{-2t^2}{n(b-a)^2}}$.
Montrer que si ϕ est continue de $[c;d]$ dans $\mathbb{R}$, nulle en c et d, de classe C^2 sur $]c;d[$, de dérivée seconde strictement positive, alors ϕ est négative ou nulle.
Soit $s > 0$; montrer, à l'aide du résultat précédent, que : $\forall y \in [c;d]$, $e^{sy} \leqslant \dfrac{c-y}{c-d}e^{sd} + \dfrac{y-d}{c-d}e^{sc}$.

Soit une variable aléatoire Y d'espérance nulle et prenant ses valeurs dans $[c;d]$.
Montrer que $\ln\left(\mathbb{E}(e^{sY})\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{c}{c-d}e^{sd} + \dfrac{-d}{c-d}e^{sc}\right)$ puis que $\mathbb{E}(e^{sY}) \leqslant e^{\frac{s^2(d-c)^2}{8}}$ (on admettra que $\ln\left(\dfrac{c}{-d}e^{sd} + \dfrac{y-d}{c-d}e^{sc}\right) \leqslant \dfrac{s^2(d-c)^2}{8}$). Montrer que $\mathbb{P}(S - \mathbb{E}(S) \geqslant t) \leqslant e^{-st}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}(e^{s(X_i - \mathbb{E}(X_i))})$.

En choisissant bien les Y, montrer que $\mathbb{P}(S - \mathbb{E}(S) \geqslant t) \leqslant e^{-st + n\frac{s^2(b-a)^2}{8}}$.
Déterminer le minimum du majorant ci-dessus et conclure.

11.144 *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 39*

Des variables aléatoires indépendantes U_i suivent une loi de Bernoulli de même paramètre $p \in]0;1[$.

Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{Z} U_i$ et $Y = Z - X = \displaystyle\sum_{i=1}^{Z}(1 - U_i)$.
Montrer que $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X = k, Y = l) = \binom{k+l}{k}p^k(1-p)^l r_{k+l}$ où $r_i = \mathbb{P}(Z = i)$.
Exprimer $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbb{P}(Y = k)$ à l'aide de p et de la suite $(r_n)_{n \geqslant 0}$.
Montrer que si Z suit une loi de Poisson, X et Y sont indépendantes. On suppose X et Y indépendantes et Z non presque sûrement nulle ; montrer que $r_n = \displaystyle\sum_{k+l=n} p_k q_l$ puis que p_0, p_1, q_0, q_1 sont strictement positifs.

Montrer que $p_{k+1}q_l(k+1)(1-p) = p_k q_{l+1}(l+1)p$ et en déduire une relation de récurrence vérifiée par $(q_n)_{n \geqslant 0}$. En déduire q_n en fonction de p_0, p_1 et p. Montrer que Z suit une loi de Poisson.

11.145 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planches 110II et 114I abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année*

On donne $n \geqslant 2$ variables aléatoires réelles discrètes $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0;1[$. On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = U^tU \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$. Donner les lois de $\text{rang}(M)$ et $\text{Tr}\,(M)$.

Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'une projection ?

On note V le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1 et $S = {}^tVMV$; donner $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

11.146 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 115II*

Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi géométrique de paramètres respectifs p et q. Montrer que $Z = \text{Min}(X, Y)$ et $T = \text{Max}(X, Y)$ sont deux variables aléatoires.

Donner leurs fonctions génératrices et, si elles existent, leurs espérances.

11.147 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 208II*

On note N la variable représentant le nombre n de jetons tirés au cours d'un jeu ; elle vérifie $\mathbb{P}(N = n) = \dfrac{1}{2^n}$.

Si n est pair, le joueur gagne n jetons, sinon il en perd n.

Donner la probabilité de gagner, l'expression du gain algébrique G et son espérance.

11.148 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 213II abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année*

Des variables aléatoires indépendantes X_n suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in]0,1[$ et vérifient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = p \in]0;1[$. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - p\Big| > \varepsilon\Big) = 0$.

11.149 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 215II*

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer l'espérance de $Y = X^2 + 1$. Calculer $\mathbb{P}(2X < Y)$. Calculer la probabilité que X soit pair ; y a-t-il plus de chances que X soit impair ?

11.150 *OdlT 2016/2017 EIVP PSI planche 244III abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année*

On lance deux dés à 6 faces de façon indépendante, jusqu'à obtenir au moins un 6 ; trouver la loi de la variable aléatoire N donnant le nombre de lancers nécessaire.

11.151 *OdlT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 248II*

Une poule pond un nombre N d'œufs suivant la loi de Poisson de paramètre λ ; K d'entre eux éclosent avec une probabilité p, de manière indépendante les uns des autres. Donner les valeurs prises par N, la loi de probabilité de K sachant que $N = n$ œufs ont été pondus et en déduire la loi de K.

11.152 *OdlT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 249I abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année*

On lance n fois 2 dés non truqués A et B ; X est la variable aléatoire associée au nombre de fois où le chiffre de A est strictement supérieur à celui de B. Donner la loi de X, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$. Rappeler Bienaymé-Tchebychev. Exprimer $p_n = \mathbb{P}\left(0,9 < \dfrac{X}{\mathbb{E}(X)} < 1,1\right)$ avec $|X - \mathbb{E}(X)|$ et trouver n tel que $p_n \geqslant 0,99$.

11.153 *OdlT 2016/2017 ENSEA PSI planche 251II*

c chasseurs font face à l lapins munis de fusils à carottes ; les lapins touchent les chasseurs indépendamment avec une probabilité $p \in]0;1[$. On note X_i l'indicatrice de l'évènement C_i : "le i-ème chasseur est touché" et V la variable aléatoire représentant le nombre de chasseurs visés par les lapins.

Déterminer l'espérance de V et la probabilité que C_i se produise.

11.154 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 116III, abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année*

On pioche une poignée de jetons dans une urne en contenant n, numérotés de 1 à n ; on admet que chaque poignée (y compris la poignée vide) a la même probabilité d'être tirée.

Donner l'espérance de la variable aléatoire S donnant la somme des numéros tirés.

11.155 *Compléments OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 177II*

Spot $p \in]0;1[$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p.

Donner la loi de $S = X + Y$ et celle de X sachant $(S = n)$.

Reconnaître la loi de Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Z > n | Z > n+1) = 1 - p$.