CHAPITRE 13
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

⊙ L'étude des équations différentielles débute à la fin du XVII^e siècle avec la création, par Newton et Leibniz, du calcul différentiel qui permet leur manipulation. Pour ce qui est des équations linéaires, les principales méthodes de résolution théoriques exposées dans ce chapitre datent du XVIII^e : Euler sait résoudre l'équation homogène d'ordre n à coefficients constants et Lagrange connaît la structure de l'ensemble des solutions d'une équation homogène et met en place la méthode de variation des constantes qui porte son nom pour l'équation complète.

Pendant toute cette période, le besoin de prouver de manière générale l'existence de solutions à une équation différentielle ne se fait pas sentir. En effet, le concept de fonction est encore assez flou et, de manière plus ou moins explicite, les fonctions sont toutes supposées être localement la somme de leur série de Taylor. Dans ces conditions, il semble clair que l'équation $(E)\ :\ y^{(n)} = f(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$, jointe à la donnée des conditions initiales $y(t_0), y'(t_0), \cdots, y^{(n-1)}(t_0)$, qui fournit les n premiers coefficients, permet de calculer par récurrence tous les coefficients du développement en série entière d'une solution y de (E) au voisinage de t_0, la convergence étant implicitement admise.

C'est Cauchy qui, vers 1820, prouve le premier théorème garantissant l'existence et l'unicité locales de solutions pour l'équation $(E)\ :\ y' = f(t, y)$ en montrant que, si f est suffisamment régulière, la méthode d'approximation d'Euler converge vers une solution sur un voisinage de t_0. Lipschitz prouve le même résultat en 1876, sous des hypothèses plus faibles sur f, en mettant en lumière l'importance des conditions qui portent maintenant son nom.

Après la méthode d'Euler d'approximation des solutions d'une équation différentielle, les allemands Runge et Kutta ont développé une méthode beaucoup plus rapide pour approcher numériquement les solutions d'un problème de Cauchy d'une équation différentielle et qui, de plus, a le mérite d'être plus stable par rapport aux conditions initiales.

I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts, $\mathbb{K}$ désignera soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

TABLE DES MATIÈRES

PROGRAMME

1 : Équations différentielles linéaires scalaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.	
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	La résolution explicite de l'équation différentielle doit comporter des indications.
Théorème de CAUCHY linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de CAUCHY.	
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène, dimension.	Exemples d'utilisation de développements en série entière pour la recherche de solutions.
(rappel chapitre réduction : en ce qui concerne les matrices diagonalisables)	Application au calcul des puissances d'une matrice diagonalisable, à des exemples de systèmes diffé--rentiels à coefficients constants. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.

PARTIE 13.1 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SCALAIRES

13.1.1 : Équations différentielles scalaires du premier ordre (révision)

DÉFINITION 13.1 :
Soit α, β, γ trois applications continues sur un <u>*intervalle*</u> I *et à valeurs dans* $\mathbb{K}$.

(i) L'équation (E) : $\alpha y' + \beta y = \gamma$ *est une* **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** 1.

(ii) Une solution de (E) *est* $y : I \to \mathbb{K}$ *dérivable sur* I *telle que* $\forall t \in I,\ \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$.

(iii) L'équation (E_0) : $\alpha y' + \beta y = 0$ *est l'***équation homogène associée** *à* (E).

<u>*REMARQUE 13.1*</u> *: On peut considérer des solutions* $y : J \to \mathbb{K}$ *de* (E) *où* $J \subset I$.

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS 13.1 :
L'ensemble S_0 des solutions de (E_0) est un sous-espace vectoriel de $D^1(I, \mathbb{K})$.
Si y_p est une solution particulière de l'équation (E) alors l'ensemble S des solutions de (E) est $S = y_p + S_0$: c'est un sous-espace affine de $D^1(I, \mathbb{K})$ (fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$).

REMARQUE 13.2 : Si la fonction α ne s'annule pas sur I, y est solution de $\alpha y' + \beta y = \gamma$ si et seulement si y est solution de $y' - ay = b$ avec $a = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ et $b = \dfrac{\gamma}{\alpha}$; a et b sont alors continues sur I : on dit alors que l'équation est mise sous forme **normalisée**.

PROPOSITION SUR LA FORME DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $y' = ay$ 13.2 :
Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

(i) Les solutions de l'équation homogène (E_0) : $y' - ay = 0$ sont les fonctions y_λ définies sur I par $\forall t \in I,\ y_\lambda(t) = \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A est une primitive de a sur I.

(ii) S_0 est la droite vectorielle engendrée par $t \mapsto e^{A(t)}$: $S_0 = \mathrm{Vect}(e^A)$.

DÉMONSTRATION : (i) Soit $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable, définissons alors $z : I \to \mathbb{K}$ par $z(t) = e^{-A(t)}y(t)$. Alors la fonction z est dérivable sur I par composée et produit et on a l'équivalence, comme I est un intervalle :

$$y' - ay = 0 \Longleftrightarrow e^{-A}y' - ae^{-A}y = 0 \Longleftrightarrow z' = 0 \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K},\ z = \lambda \ (z \text{ est constante}).$$

Ainsi, $y \in S_0 \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall t \in I,\ y(t) = \lambda e^{A(t)}$.

(ii) Ce qui précède montre que y est solution de (E) si et seulement si y est proportionnelle à la fonction $t \mapsto e^{A(t)}$.

REMARQUE FONDAMENTALE 13.3 : Méthode de la **variation de la constante** *:*

- *Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues et y_0 une solution non nulle de l'équation homogène $y' - ay = 0$ alors il existe une solution de l'équation (E) : $y' - ay = b$ de la forme $y = \lambda y_0$, où λ est dérivable sur I.*
- *y solution de $(E) \Longleftrightarrow \lambda' = \dfrac{b}{y_0}$ ce qui permet de trouver (en intégrant) une solution particulière.*

DÉMONSTRATION : On sait que y_0 étant non nulle et solution de S_0, elle ne s'annule pas sur I, ainsi, pour une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable, on peut poser $\lambda = \dfrac{y}{y_0}$ qui est aussi dérivable sur I. Ainsi $y = \lambda y_0$ et, si $t_0 \in I$:

$$y \in S \Longleftrightarrow (\lambda' y_0 + \lambda y_0') - a\lambda y_0 = b \Longleftrightarrow \lambda' = \frac{b}{y_0} \Longleftarrow \forall t \in I,\ \lambda(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{b(u)}{y_0(u)}du.$$

THÉORÈME SUR LA FORME DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $y' - ay = b$ 13.3 :
Si a et b sont continues sur I, les solutions de $y' - ay = b$ sont les fonctions y_λ définies par $\forall t \in I,\ y_\lambda(t) = \lambda e^{A(t)} + e^{A(t)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}du$ où A est une primitive de a sur I, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $t_0 \in I$.

DÉMONSTRATION : Définissons $y_p : I \to \mathbb{K}$ par $y_p(t) = e^{A(t)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}du$ où $t_0 \in I$. D'après le théorème fondamental de l'intégration, y_p est dérivable sur I par produit car $u \mapsto b(u)e^{-A(u)}$ est continue sur I. On dérive y_p et on obtient $y_p'(t) = A'(t)e^{A(t)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}du + e^{A(t)}b(t)e^{-A(t)} = a(t)y_p(t) + b(t)$ car $A'(t) = a(t)$. Ainsi, y_p est une solution particulière de (E). D'après les propositions 13.1 et 13.2, les solutions de (E) s'écrivent $y : I \to \mathbb{K}$ avec $y(t) = \underbrace{\lambda e^{A(t)}}_{\text{sol. équa. hom.}} + \underbrace{e^{A(t)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}du}_{\text{sol. part.}}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

REMARQUE 13.4 : Dans ce cadre restreint, on démontre le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ *linéaire.*

THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ LINÉAIRE D'ORDRE 1 (ÉNORME) 13.4 :
Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle I et $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème de CAUCHY $\begin{cases} y' &= a(t).y + b(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$ **admet une unique solution y définie sur I en entier.**

DÉMONSTRATION : D'après le théorème précédent, en prenant pour primitive de la fonction a sur I la fonction $A : I \to \mathbb{K}$ définie par $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)du$, les solutions de (E) sur I sont, si $t_0 \in I$, les fonctions $y : I \to \mathbb{K}$ qui s'écrivent, avec $\lambda \in \mathbb{K}$, $y(t) = \lambda e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}du$. La condition $y(t_0) = y_0$ est équivalente à $\lambda = y_0$ car $A(t_0) = 0$ donc $e^{A(t_0)} = 1$ et $\int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}du = 0$. Ainsi, la seule solution de (E) sur I qui vérifie $y(t_0) = y_0$ est la fonction $y : t \mapsto y_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}du$ avec $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)du$.

REMARQUE 13.5 : • *Sous ces conditions, $\varphi : S_0 \to \mathbb{K}$ définie par $\varphi(y) = y(t_0)$ est un isomorphisme.*

• *L'espace vectoriel des solutions de (E_0) sur un intervalle I où l'équation est résolue est une droite.*

• *Si l'équation n'est pas sous forme normalisée sur I, on la résout sur tous les intervalles où α ne s'annule pas et on essaie de raccorder les solutions en les points singuliers.*

• *Il peut y avoir sur I une infinité de solutions, une seule ou aucune.*

EXEMPLE 13.1 : Résoudre l'équation $(E) : (1 - t^2)y' - 2ty = t^2$ sur tous les intervalles de $\mathbb{R}$.

ORAL BLANC 13.2 : Mines PSI 2018 Pauline Lamaignère II

Déterminer les solutions de l'équation $(E) : 2t(1 + t)y' + (1 + t)y = 1$ sur des intervalles à préciser.

13.1.2 : Équations différentielles scalaires du second ordre

DÉFINITION 13.2 :
Soit α, β, γ et δ quatre applications continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

(i) $(E) : \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = \delta$ *est une* **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2**.

(ii) $y : I \to \mathbb{K}$ *deux fois dérivable est* **solution** *de (E) si* $\forall t \in I,\ \alpha(t)y''(t) + \beta(t)y'(t) + \gamma(t)y(t) = \delta(t)$.

(iii) L'équation $(E_0) : \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$ *est l'***équation homogène associée** *à (E).*

REMARQUE 13.6 : Si la fonction α ne s'annule pas sur I, y est solution de $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = \delta$ si et seulement si y est solution de $y'' - ay' - by = c$ avec $a = -\dfrac{\beta}{\alpha}$, $b = -\dfrac{\gamma}{\alpha}$ et $c = \dfrac{\delta}{\alpha}$; a, b et c sont alors continues sur I. On dit qu'elle est mise sous forme normalisée.

THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ LINÉAIRE ORDRE 2 (ÉNORME) 13.5 :
Soit a, b et c trois applications continues sur un intervalle I et $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K}^2$, le problème de CAUCHY $\begin{cases} y'' &= ay' + by + c \\ y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= y'_0 \end{cases}$ **admet une unique solution définie sur I en entier.**

DÉMONSTRATION : hors programme.

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS 13.6 :
Soit a, b et c trois applications continues sur un intervalle I, l'équation (E) : $y'' = ay' + by + c$ et l'équation homogène associée (E_0) : $y'' = ay' + by$.

(i) L'ensemble S_0 des solutions de (E_0) est un espace de dimension 2.

(ii) Deux solutions y_1 et y_2 de (E_0) linéairement indépendantes forment une base de S_0.

(iii) Si y_p est une solution "particulière" de l'équation (E) alors l'ensemble S des solutions de (E) est $S = y_p + S_0$: c'est un sous-espace affine de $C^2(I, \mathbb{K})$.

REMARQUE FONDAMENTALE 13.7 :

- *La famille (y_1, y_2) est alors appelée* **système fondamental** *de solutions de (E).*
- *Si on ne connaît qu'une solution y_1 de (E_0) sur I et qu'on suppose que y_1 ne s'annule pas sur I, on peut en déterminer une seconde, et donc un système fondamental de solutions de (E), par une "variation de la constante" en posant $y = zy_1$ avec $c : I \to \mathbb{K}$ de classe C^2 : c'est la méthode de* LAGRANGE *qui ramène la détermination de y à la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par z'. Il existe donc une base de S_0 de la forme (y_1, y_2), où $y_2 = zy_1$ avec z de classe C^2 sur I.*

DÉMONSTRATION : D'abord, si y_1 est une solution de (E_0), alors y_1 est au moins deux fois dérivable sur I donc, comme $y''_1 = ay'_1 + by_1$ est continue par opérations puisque a et b sont supposées continues sur I, la fonction y''_1 est continue sur I et y_1 est C^2 sur I.
(i) Soit $z : I \to \mathbb{K}$ de classe C^2 sur I, posons $y = zy_1$, alors y est de classe C^2 sur I par opérations et $y' = z'y_1 + zy'_1$ et $y'' = z''y_1 + 2z'y'_1 + zy''_1$ donc, comme $y''_1 = ay'_1 + by_1$, en reportant dans (E_0), on a $y'' - ay' - by = 0 \iff z''y_1 + 2z'y'_1 + zy''_1 - a(z'y_1 + zy'_1) - bzy_1 = 0 \iff z''y_1 + 2z'y'_1 - az'y_1 = 0$ d'où $y'' - ay' - by = 0 \iff y_1 z'' + (2y'_1 - ay_1)z' = 0$.
(ii) En posant $w = z'$, comme y_1 ne s'annule pas sur I par hypothèse, l'équation $y_1 z'' + (2y'_1 - ay_1)z' = 0$ équivaut à $w' + \left(2\dfrac{y'_1}{y_1} - a\right)w = 0$ qu'on résout classiquement, en notant A une primitive de a (car a est continue sur I) sur I : $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall t \in I,\ w(t) = z'(t) = \lambda e^A y_1^{-2}$. On intègre à nouveau, en notant t_0 un élément de l'intérieur de I et on peut choisir $z : I \to \mathbb{K}$ définie par $\forall t \in I,\ z(t) = \lambda \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{A(u)}}{y_1(u)^2} du$. Comme a est continue sur I, A est C^1 sur I donc, puisque y_1 est elle aussi de classe C^2 sur I, la fonction z est de classe C^2 sur I par opérations et théorème fondamental de l'intégration. En prenant $\lambda = 1$ par exemple, la fonction $y_2 = zy_1 : I \to \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in I,\ y_2(t) = y_1(t) \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{A(u)}}{y_1(u)^2} du$ ainsi définie est bien solution de (E) de classe C^2 sur I. Reste à voir qu'elle n'est pas colinéaire à y_1. Raisonnons par l'absurde, si elle était proportionnelle à y_1, alors z serait constante donc z' serait la fonction nulle sur I. Ceci contredit le choix $\lambda = 1$ car $\alpha' = \dfrac{e^A}{y_0^2}$ reste strictement positif sur I. Ainsi, la famille (y_1, y_2) est bien une famille libre de solutions de (E) sur I et on sait que cet ensemble S_0 de solutions est un espace vectoriel de dimension 2 : (y_1, y_2) est une base de S_0.

EXEMPLE 13.3 : Résoudre l'équation d'EULER $(E)\ :\ t^2y''+3ty'+y=0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $y=t^\alpha$.

REMARQUE 13.8 : Des indications seront données pour trouver une/les solution(s) de (E_0) *:*

- *Comme dans l'exemple précédent, on pourra changer de fonction en considérant l'équation vérifiée par* $u : t \mapsto \big(f(y(t)\big)$ *ou de variable en trouvant l'équation satisfaite par* $v : t \mapsto y(\varphi(t))$.
- *Comme dans l'exemple suivant, on peut aussi chercher des solutions* y *de* (E_0) *qui sont développables en série entière au voisinage de* 0.

EXERCICE 13.4 : Résoudre l'équation homogène $(E_0)\ :\ (1+t^2)y''+4ty'+2y=0$ en recherchant ses solutions développables en série entière.

ORAL BLANC 13.5 : Centrale PSI 2013

a. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $h : t \mapsto \displaystyle\int_0^t \big(g(u)\cos(u)\sin(t) - g(u)\sin(u)\cos(t)\big)du$ est solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ y''+y=g$. En déduire toutes les solutions de (E).

b. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t)+f(t) \geqslant 0$. Prouver : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t)+f(t+\pi) \geqslant 0$.

13.1.3 : Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

THÉORÈME SUR LA FORME DES SOLUTIONS DE $ay''+by'+cy=0$ ($(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$) 13.7 :
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, alors les solutions de $(E_0)\ :\ ay''+by'+cy=0$ sont :

(i) $y=\alpha_1 e^{\lambda_1 t}+\alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ **avec** $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ **si** $\lambda_1 \neq \lambda_2$ **sont les racines de** aX^2+bX+c.

(ii) $y=(\alpha_1 t+\alpha_2)e^{\lambda_1 t}$ **avec** $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ **si** λ_1 **est la racine double de** aX^2+bX+c.

REMARQUE 13.9 : • *L'équation* $(C)\ :\ az^2+bz+c=0$ *s'appelle l'***équation caractéristique** *de* (E).

- *La matrice associée à cette équation dans le système* $Y'=AY$ *où* $Y=\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ *est* $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$ *et son polynôme caractéristique vérifie* $aX^2+bX+c=a\chi_A$ *: cohérent !*
- *Le cas (i) est le cas où* A *est diagonalisable et (ii) celui où elle est seulement trigonalisable.*

REMARQUE HP 13.10 : Si $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, $P \in \mathbb{C}[X]$ *et* $m \in \mathbb{C}$, *il existe une solution particulière de* $(E)\ :\ ay''+by'+cy=P(t)e^{mt}$ *de la forme* $y : t \mapsto t^\alpha Q(t)e^{mt}$ *avec* $Q \in \mathbb{C}[X]$, $\deg(Q)=\deg(P)$ *et :*

(i) $\alpha=0$ *si* m *n'est pas racine de* aX^2+bX+c.

(ii) $\alpha=1$ *si* m *est racine simple (et* $\Delta=b^2-4ac \neq 0$*) de* aX^2+bX+c.

(iii) $\alpha=2$ *si* m *est racine double (*$\Delta=0$*) de* aX^2+bX+c.

⊙ Le cas réel est plus complexe.

THÉORÈME SUR LA FORME DES SOLUTIONS DE $ay''+by'+cy=0$ **(**$(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$**) 13.8 :**
Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^2$**, les solutions réelles de** $(E_0)\ :\ ay''+by'+cy=0$ **sont (**$\Delta=b^2-4ac$**) :**

(i) $y=\alpha_1 e^{\lambda_1 t}+\alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ **avec** $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$ **si** $\lambda_1\neq\lambda_2$ **racines réelles de** aX^2+bX+c **et** $\Delta>0$**.**

(i) $y=(\alpha_1 t+\alpha_2)e^{\lambda_1 t}$ **avec** $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$ **si** $\lambda_1=-\dfrac{b}{2a}$ **racine double de** aX^2+bX+c **et** $\Delta=0$**.**

(iii) $y=\big(\alpha_1\cos(\beta t)+\alpha_2\sin(\beta t)\big)e^{\alpha t}$ **avec** $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$ **si** $z_1=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}$ **et** $z_2=\alpha-i\beta$ **(**$(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$**) sont les racines complexes de** aX^2+bX+c **quand** $\Delta<0$**.**

REMARQUE 13.11 : Pour les solutions particulières de l'équation avec second membre, on passe par le cas complexe et on prend la partie réelle d'une solution particulière.

PARTIE 13.2 : ANNEXES

13.2.1 : Systèmes différentiels linéaires du premier ordre

REMARQUE 13.12 : Si $X : I\to\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *est défini par* $X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t) & \cdots & x_n(t)\end{pmatrix}^T\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*, alors* X *est dérivable en* $t_0\in I$ *si et seulement si* $t\mapsto\dfrac{X(t)-X(t_0)}{t-t_0}$ *admet une limite finie quand* t *tend vers* t_0*.*
Puisque $\dfrac{X(t)-X(t_0)}{t-t_0}=\begin{pmatrix}\dfrac{x_1(t)-x_1(t_0)}{t-t_0} & \cdots & \dfrac{x_n(t)-x_n(t_0)}{t-t_0}\end{pmatrix}^T$*, on a* X *dérivable en* $t_0\in I$ *si et seulement si toutes les* $x_k : I\to\mathbb{K}$ *sont dérivables en* t_0 *et on a alors* $X'(t_0)=\begin{pmatrix}x_1'(t_0) & \cdots & x_n'(t_0)\end{pmatrix}^T$*.*

DÉFINITION 13.3 :
Soit $n\geqslant 1$*, deux applications* $A : I\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $B : I\to\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *continues sur* I*.*

(i) Un **système différentiel linéaire d'ordre** 1 *est de la forme* $(E)\ :\ X'=A(t)X+B(t)$*.*

(ii) Une **solution de** (E) *est* $X : I\to\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *dérivable sur* I *telle que* $\forall t\in I,\ X'(t)=A(t)X(t)+B(t)$*.*

(iii) Le **système homogène** *associée à* (E) *est le système* (E_0) *:* $X'=A(t)X$*.*

REMARQUE 13.13 : Écriture du système différentiel :

Si on note, pour $t\in I$*,* $B(t)=\begin{pmatrix}b_1(t) & \cdots & b_n(t)\end{pmatrix}^T\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *et* $A(t)=\big(a_{i,j}(t)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,*

le système (E) *est équivalent à* $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1' & = & a_{1,1}(t)x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}(t)x_n & + & b_1(t)\\ \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots\\ \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots\\ x_n' & = & a_{n,1}(t)x_1 & + & \cdots & + & a_{n,n}(t)x_n & + & b_n(t)\end{array}\right.$*, c'est-à-dire que :* X *est solution de* $(E)\iff\forall t\in I,\ \forall i\in[\![1;n]\!],\ x_i'(t)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}(t)x_j(t)+b_i(t)$*.*

EXEMPLE 13.6 : Résoudre $(E)\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} x' & = & \cos(t)\,x+\sin(t)\,y\\ y' & = & -\sin(t)\,x+\cos(t)\,y\end{array}\right.$.

REMARQUE 13.14 : Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n, c'est-à-dire une équation différentielle du type (E) : $y^{(n)} - a_{n-1}(t)y^{(n-1)} - \cdots - a_0(t)y = b(t)$ avec $y : I \to \mathbb{K}$ n fois dérivable et les fonctions $a_0, \cdots, a_{n-1}, b$ continues sur I, peut se traduire par un système différentiel d'ordre 1.

DÉMONSTRATION : On pose $X = \left(y\ y' \cdots\ y^{(n-1)}\right)^T$ et on a $X' = AX + B$ avec $B(t) = (0\ 0\ \cdots\ 0\ b(t))^T$. A est la matrice compagnon dont le polynôme caractéristique est $X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0$.

EXEMPLE 13.7 : Représenter matriciellement l'équation $y'' - t^2y' + e^ty = 1 + 3t$.

THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ LINÉAIRE (ÉNORME) 13.9 :
Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continues sur I et $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors le problème de CAUCHY $\begin{cases} X' &= A(t)X + B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$ admet une unique solution X définie sur I en entier.

DÉMONSTRATION : hors programme.

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS 13.10 :
Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continues sur I et (E) : $X' = A(t)X + B(t)$ un système différentiel linéaire d'ordre 1, S l'ensemble des solutions sur I de (E) et S_0 l'ensemble des solutions sur I du système homogène (E_0).

(i) **S_0 est un sous-espace vectoriel de $C^1\left(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)$.**

(ii) **Pour tout $t_0 \in I$, $\varphi_{t_0} : S_0 \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par $\varphi_{t_0}(X) = X(t_0)$ est un isomorphisme donc S_0 est un espace de dimension n.**

(iii) **Les solutions non nulles de (E_0) ne s'annulent pas sur I.**

(iv) **Si $X_p \in S$ (solution particulière) alors $S = X_p + S_0$ (sous-espace affine).**

13.2.2 : Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

⊙ On se limite en pratique à des systèmes (E) : $X' = AX + B(t)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est continue sur I. Et même, d'après le programme, à des systèmes différentiels linéaires avec $n = 2$ ou $n = 3$.

REMARQUE 13.15 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ réelle et les équations (E_0) : $X' = AX$ (réel) et (E'_0) : $Z' = AZ$ (complexe). Une fonction $X : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est solution réelle de (E_0) si et seulement s'il existe une fonction $Z : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ solution complexe de (E'_0) telle que $X = \mathrm{Re}(Z)$.

Cela signifie que pour déterminer les solutions réelles de $X' = A$ où A est réelle, on peut commencer par déterminer les solutions complexes dont on prendra les parties réelles.

EXERCICE 13.8 : On lance une particule chargée (charge q et masse m) dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{k}$. La champ électrique $\overrightarrow{E}$ est nul. Elle subit donc la force de LORENTZ $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$. On néglige toutes les autres forces exercées sur la particule (gravité,...). À l'instant $t = 0$, la particule est en O et a pour vitesse $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{k}$. On pose $\overrightarrow{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Déterminer la trajectoire de la particule.

PROPOSITION SUR LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DIAGONALISABLE 13.11 :
Si A est diagonalisable (sur $\mathbb{K}$), il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ donc le système $X' = AX$ équivaut à $Y' = DY$ où on a posé $X = PY$.
De plus, si on pose $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \end{pmatrix}^T$ alors $Y' = DY$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, il existe une constante $\alpha_k \in \mathbb{K}$ telle que $y_k : t \mapsto \alpha_k e^{\lambda_k t}$.

REMARQUE 13.16 : Le calcul de la matrice P^{-1} n'est pas nécessaire pour la résolution de $X' = AX$.

EXERCICE 13.9 : Résoudre le système différentiel suivant $\begin{cases} x' &= y+z \\ y' &= x \\ z' &= x+y+z \end{cases}$.

REMARQUE 13.17 : On peut faire la même chose avec un second membre.

EXERCICE 13.10 : Résoudre le système différentiel suivant $\begin{cases} x' &= x+8y-t-7 \\ y' &= 2x+y-2t-1 \end{cases}$.

EXERCICE 13.11 : Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' &= y+z-1 \\ y' &= x+y-1 \\ z' &= x+z-2 \end{cases}$.

PROPOSITION SUR LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME TRIGONALISABLE 13.12 :
Si A n'est que trigonalisable (sur $\mathbb{K}$), on pose encore $X = PY$ avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ et T triangulaire supérieure et on a de nouveau $X' = AX$ si et seulement si $Y' = TY$. Ce système $Y' = TY$ est un système différentiel qui se résout en partant de la dernière ligne et en remontant en reportant les résultats intermédiaires.

ORAL BLANC 13.12 : Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' &= 2y+2z \\ y' &= -x+2y+2z \\ z' &= -x+y+3z \end{cases}$.

REMARQUE 13.18 : Cette méthode fonctionne encore si A n'est pas constante mais si P l'est.

EXERCICE 13.13 : Résoudre le système à coefficients non constants : $\begin{cases} x' &= (t+3)x+2y \\ y' &= -4x+(t-3)y \end{cases}$.

13.2.3 : Équations à variables séparables (HP)

REMARQUE 13.19 : Ce sont des équations du premier ordre de la forme $(E) \ : \ y'f(y) = g(t)$ *où* f *et* g *sont des fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Si* F *(resp.* G*) est une primitive de* f *(resp.* g*) sur des bons intervalles, une solution* y *de* (E) *sur* $J \subset I$ *vérifie* $F(y) = G(t) + k$ *avec* $k \in \mathbb{K}$ *; il faut espérer ensuite que* F *soit bijective pour qu'on puisse écrire* $y = F^{-1}(G(t) + k)$ *qu'il faut ensuite tracer. Les* **solutions maximales** *ne sont pas forcément définies sur les mêmes intervalles comme c'était le cas pour les équations linéaires.*

EXERCICE 13.14 : Résoudre $y'\sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-y^2} = 0$.

13.2.4 : Équations de Bernoulli (HP)

REMARQUE 13.20 : Ce sont des équations du type $(E) \ : \ ay' + by + cy^\alpha = 0$ *où* a*,* b *et* c *sont des fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *et* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$*. Sur des intervalles où ni* a *ni* y *ne s'annule, on pose* $z = y^{1-\alpha}$ *si* y *solution de* (E) *et* y *n'est pas la fonction nulle, on trouve alors* $z' = (\alpha - 1)\dfrac{bz + c}{a}$ *qu'on sait de nouveau résoudre.*

EXERCICE 13.15 : Résoudre l'équation $(E) \ : \ ty' + 3y = t^2y^2$.

13.2.5 : Équations de Riccati (HP)

REMARQUE 13.21 : Ce sont des équations de la forme $(E) \ : \ ay' + by + cy^2 = d$ *où* a*,* b*,* c *et* d *sont des fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$*. Si on trouve une solution particulière* y_0 *de* (E) *alors en posant* $z = y - y_0$*, la fonction* z *vérifie une équation de* Bernoulli *qu'on sait maintenant résoudre.*

EXERCICE 13.16 : Résoudre l'équation $(E) \ : \ y' = -y^2 + 2t^2y + 2t - t^4$.

COMPÉTENCES

- Maîtriser la terminologie des équations et systèmes différentiels, leur ordre et leur linéarité.
- Se rappeler des structures de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire.
- Connaître les conditions de Cauchy-Lipschitz qui assurent l'existence et l'unicité d'une solution.
- Savoir résoudre un système différentiel carré linéaire en trigonalisant la matrice du système.
- Connaître les méthodes de résolution d'une équation linéaire scalaire d'ordre 1...
- ... et discuter des éventuels raccords en les points singuliers (avec la structure vectorielle associée).
- Maîtriser la structure des solutions d'une équation différentielle scalaire d'ordre 2...
- ... et savoir trouver une seconde solution de l'équation homogène si on en connaît une non nulle.
- Penser à chercher les solutions des équations linéaires qui sont développables en série entière.
- Se rappeler des équations différentielles scalaires du second ordre à coefficients constants.