CHAPITRE 13
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PARTIE 13.1 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SCALAIRES

DÉFINITION 13.1 :
Soit α, β, γ *trois applications continues sur un intervalle* I *et à valeurs dans* $\mathbb{K}$.

(i) L'équation $(E)\ :\ \alpha y' + \beta y = \gamma$ *est une* **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** 1.

(ii) Une solution de (E) *est* $y : I \to \mathbb{K}$ *dérivable sur* I *telle que* $\forall t \in I,\ \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$.

(iii) L'équation $(E_0)\ :\ \alpha y' + \beta y = 0$ *est l'***équation homogène associée** *à* (E).

REMARQUE 13.1 : On peut considérer des solutions $y : J \to \mathbb{K}$ *de* (E) *où* $J \subset I$.

PROPOSITION 13.1 :
L'ensemble S_0 **des solutions de** (E_0) **est un sous-espace vectoriel de** $C^0(I, \mathbb{K})$.
Si y_p **est une solution particulière de l'équation** (E) **alors l'ensemble** S **des solutions de** (E) **est** $S = y_p + S_0$ **: c'est un sous-espace affine de** $C^0(I, \mathbb{K})$.

REMARQUE 13.2 : Si la fonction α *ne s'annule pas sur* I, y *est solution de* $\alpha y' + \beta y = \gamma$ *si et seulement si* y *est solution de* $y' - ay = b$ *avec* $a = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ *et* $b = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ *;* a *et* b *sont alors continues sur* I *: on dit alors que l'équation est mise sous forme* **résolue**.

PROPOSITION 13.2 :
Soit a **et** b **deux fonctions continues sur un intervalle** I **et à valeurs dans** $\mathbb{K}$.

(i) Les solutions de l'équation homogène $(E_0)\ :\ y' - ay = 0$ **sont les fonctions** y_λ **définies sur** I **par** $\forall t \in I,\ y_\lambda(t) = \lambda e^{A(t)}$ **où** $\lambda \in \mathbb{K}$ **et** A **est une primitive de** a **sur** I.

(ii) S_0 **est la droite vectorielle engendrée par** $t \mapsto e^{A(t)}$ **:** $S_0 = \mathrm{Vect}(e^A)$.

REMARQUE 13.3 : Méthode de la **variation de la constante** *:*

- *Soit* $a, b : I \to \mathbb{K}$ *continues et* y_0 *une solution non nulle de l'équation homogène* $y' - ay = 0$ *alors il existe une solution de l'équation* $y' - ay = b$ *de la forme* $y = \lambda y_0$, *où* λ *est une fonction dérivable sur* I.
- y *solution de* $(E) \iff \lambda' = \dfrac{b}{y_0}$ *ce qui permet de trouver (en intégrant) une solution particulière.*

THÉORÈME 13.3 :
Si a **et** b **sont continues sur** I, **les solutions de** $y' - ay = b$ **sont les fonctions** y_λ **définies par** $\forall t \in I,\ y(t) = \lambda e^{A(t)} + e^{A(t)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}du$ **où** A **est une primitive de** a **sur** I, $\lambda \in \mathbb{K}$ **et** $t_0 \in I$.

THÉORÈME ÉNORME 13.4 :
Soit a **et** b **deux fonctions continues sur un intervalle** I **et** $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, **le problème de** CAUCHY $\begin{cases} y' &= a(t).y + b(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$ **admet une unique solution** y **définie sur** I **en entier.**

REMARQUE 13.4 : • *Sous ces conditions,* $\varphi : S_0 \to \mathbb{K}$ *définie par* $\varphi(y) = y(t_0)$ *est un isomorphisme.*

- *L'espace vectoriel des solutions de* (E_0) *sur un intervalle* I *où l'équation est résolue est une droite.*
- *Si l'équation n'est pas sous forme résolue sur* I*, on la résout sur tous les intervalles où* α *ne s'annule pas et on essaie de raccorder les solutions en les points singuliers.*
- *Il peut y avoir sur* I *une infinité de solutions, une seule ou aucune.*

DÉFINITION 13.2 :
Soit α, β, γ *et* δ *quatre applications continues sur* I *et à valeurs dans* $\mathbb{K}$.

(i) $(E)\ :\ \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = \delta$ *est une* **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** 2.

(ii) $y : I \to \mathbb{K}$ *deux fois dérivable est* **solution** *de* (E) *si* $\forall t \in I,\ \alpha(t)y''(t) + \beta(t)y'(t) + \gamma(t)y(t) = \delta(t)$.

(iii) L'équation $(E_0)\ :\ \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$ *est l'***équation homogène associée** *à* (E).

REMARQUE 13.5 :

- *Si la fonction* α *ne s'annule pas sur* I, y *est solution de* $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = \delta$ *si et seulement si* y *est solution de* $y'' - ay' - by = c$ *avec* $a = -\dfrac{\beta}{\alpha}$, $b = -\dfrac{\gamma}{\alpha}$ *et* $c = \dfrac{\delta}{\alpha}$ *;* a, b *et* c *sont alors continues sur* I.
- *En posant* $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $y'' - ay' - by = c \iff X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$.

THÉORÈME ÉNORME 13.5 :
Soit a, b et c trois applications continues sur un intervalle I et $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K}^2$, le problème de CAUCHY $\begin{cases} y'' &= ay' + by + c \\ y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= y'_0 \end{cases}$ **admet une unique solution définie sur I en entier.**

PROPOSITION 13.6 :
Soit a et b deux applications continues sur un intervalle I.

(i) L'ensemble S_0 des solutions de $(E_0)\ :\ y'' - ay' - by = 0$ est un espace de dimension 2.

(ii) Deux solutions y_1 et y_2 de (E_0) linéairement indépendantes forment une base de S_0.

(iii) $y = \alpha y_0$ est solution de (E_0) si et seulement si α' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène (méthode de LAGRANGE).

(iv) Il existe une base de S_0 de la forme $(y_0, \alpha y_0)$, où α est de classe C^2 sur I.

THÉORÈME 13.7 :
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, alors les solutions de $(E_0)\ :\ ay'' + by' + cy = 0$ sont :

(i) $y = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sont les racines de $aX^2 + bX + c$.

(ii) $y = (\alpha_1 t + \alpha_2) e^{\lambda_1 t}$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ si λ_1 est la racine double de $aX^2 + bX + c$.

REMARQUE 13.6 : • *L'équation* $(C)\ :\ az^2 + bz + c = 0$ *s'appelle l'***équation caractéristique** *de* (E).

- *La matrice associée à cette équation dans le système* $Y' = AY$ *où* $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ *est* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{pmatrix}$ *et son polynôme caractéristique vérifie* $aX^2 + bX + c = a\chi_A$ *: cohérent !*
- *Le cas (i) est le cas où* A *est diagonalisable et (ii) celui où elle est seulement trigonalisable.*

REMARQUE HP 13.7 : Si $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, $P \in \mathbb{C}[X]$ *et* $m \in \mathbb{C}$, *il existe une solution particulière de* $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = P(t)e^{mt}$ *de la forme* $y : t \mapsto t^{\alpha} Q(t) e^{mt}$ *avec* $Q \in \mathbb{C}[X]$, $\deg(Q) = \deg(P)$ *et :*

(i) $\alpha = 0$ *si* m *n'est pas racine de* $aX^2 + bX + c$.

(ii) $\alpha = 1$ *si* m *est racine simple (et* $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$*) de* $aX^2 + bX + c$.

(iii) $\alpha = 2$ *si* m *est racine double (*$\Delta = 0$*) de* $aX^2 + bX + c$.

THÉORÈME 13.8 :
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$**, les solutions réelles de** $(E_0)\ :\ ay'' + by' + cy = 0$ **sont** $(\Delta = b^2 - 4ac)$ **:**

- **(i)** $y = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ **avec** $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ **si** $\lambda_1 \neq \lambda_2$ **racines réelles de** $aX^2 + bX + c$ **et** $\Delta > 0$**.**
- **(i)** $y = (\alpha_1 t + \alpha_2)e^{\lambda_1 t}$ **avec** $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ **si** $\lambda_1 = -\dfrac{b}{2a}$ **racine double de** $aX^2 + bX + c$ **et** $\Delta = 0$**.**
- **(iii)** $y = \big(\alpha_1 \cos(\beta t) + \alpha_2 \sin(\beta t)\big)e^{\alpha t}$ **avec** $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ **si** $z_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ **et** $z_2 = \alpha - i\beta$ $((\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2)$ **sont les racines complexes de** $aX^2 + bX + c$ **quand** $\Delta < 0$**.**

PARTIE 13.2 : ANNEXES

13.2.1 : Systèmes différentiels

DÉFINITION 13.3 :
Soit $n \geqslant 1$*, deux applications* $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *continues sur* I*.*

- *(i) Un* **système différentiel linéaire d'ordre** 1 *est de la forme* $(E)\ :\ X' = A(t)X + B(t)$.
- *(ii) Une* **solution de** (E) *est* $X : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *dérivable sur* I *telle que* $\forall t \in I,\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.
- *(iii) Le* **système homogène** *associée à* (E) *est le système* (E_0) *:* $X' = A(t)X$.

REMARQUE 13.8 : Écriture du système différentiel :

Si on note, pour $t \in I$, $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) & \cdots & b_n(t) \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *et* $A(t) = \big(a_{i,j}(t)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

le système (E) *est équivalent à* $\begin{cases} x_1' & = & a_{1,1}(t)x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}(t)x_n & + & b_1(t) \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\ x_n' & = & a_{n,1}(t)x_1 & + & \cdots & + & a_{n,n}(t)x_n & + & b_n(t) \end{cases}$*, c'est-à-dire que :* X *est solution de* $(E) \iff \forall t \in I,\ \forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i'(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)x_j(t) + b_i(t)$.

REMARQUE 13.9 : Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n*, c'est-à-dire une équation différentielle du type* $y^{(n)} - a_{n-1}(t)y^{(n-1)} - \cdots - a_0(t)y = b(t)$ *avec* $y : I \to \mathbb{K}$ n *fois dérivable et les fonctions* $a_0, \cdots, a_{n-1}, b$ *continues sur* I*, peut se traduire par un système différentiel d'ordre* 1.

REMARQUE HP 13.10 : Soit $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *continues sur* I*, le problème de* CAUCHY $\begin{cases} X' & = & A(t)X + B(t) \\ X(t_0) & = & X_0 \end{cases}$ *admet une unique solution* X *définie sur* I *en entier.*

PROPOSITION 13.9 :
Soit $(E)\ :\ X' = A(t)X + B(t)$ **un système différentiel linéaire d'ordre** 1**,** S **l'ensemble des solutions sur** I **de** (E) **et** S_0 **l'ensemble des solutions sur** I **du système homogène** (E_0)**.**

- **(i)** S_0 **est un sous-espace vectoriel de** $C^1\big(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big)$**.**
- **(ii) Pour tout** $t_0 \in I$**,** $\varphi_{t_0} : S_0 \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **définie par** $\varphi_{t_0}(X) = X(t_0)$ **est un isomorphisme donc** S_0 **est un espace de dimension** n**.**
- **(iii) Les solutions non nulles de** (E_0) **ne s'annulent pas sur** I**.**
- **(iv) Si** $X_p \in S$ **(solution particulière) alors** $S = X_p + S_0$ **(sous-espace affine).**

⊙ On se limite à des systèmes (E) : $X' = AX + B(t)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est continue sur I.

REMARQUE 13.11 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ réelle et les équations (E_0) : $X' = AX$ (réel) et (E'_0) : $Z' = AZ$ (complexe). Une fonction $X : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est solution réelle de (E_0) si et seulement s'il existe une fonction $Z : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ solution complexe de (E'_0) telle que $X = \mathrm{Re}(Z)$.
Cela signifie que pour déterminer les solutions réelles de $X' = AX$ où A est réelle, on peut commencer par déterminer les solutions complexes dont on prendra les parties réelles.

PROPOSITION 13.10 :
Si A est diagonalisable (sur $\mathbb{K}$), il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ donc le système $X' = AX$ équivaut à $Y' = DY$ où on a posé $X = PY$.
De plus, si on pose $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \end{pmatrix}^T$ alors $Y' = DY$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, il existe une constante $\alpha_k \in \mathbb{K}$ telle que $y_k : t \mapsto \alpha_k e^{\lambda_k t}$.

REMARQUE 13.12 : Le calcul de la matrice P^{-1} n'est pas nécessaire pour la résolution de $X' = AX$.

PROPOSITION 13.11 :
Si A n'est que trigonalisable (sur $\mathbb{K}$), on pose encore $X = PY$ avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ et T triangulaire supérieure et on a de nouveau $X' = AX$ si et seulement si $Y' = TY$. Ce système $Y' = TY$ est un système différentiel qui se résout en partant de la dernière ligne et en remontant en reportant les résultats intermédiaires.

REMARQUE 13.13 : Cette méthode fonctionne encore si A n'est pas constante mais si P l'est.

13.2.2 : Équations classiques (HP)

REMARQUE 13.14 : Équations à variables séparables : ce sont des équations du premier ordre de la forme (E) : $y'f(y) = g(t)$ où f et g sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si F (resp. G) est une primitive de f (resp. g) sur des bons intervalles, une solution y de (E) sur $J \subset I$ vérifie $F(y) = G(t) + k$ avec $k \in \mathbb{K}$; il faut espérer ensuite que F soit bijective pour qu'on puisse écrire $y = F^{-1}(G(t) + k)$ qu'il faut ensuite tracer. Les **solutions maximales** *ne sont pas forcément définies sur les mêmes intervalles comme c'était le cas pour les équations linéaires.*

REMARQUE 13.15 : Équations de BERNOULLI : ce sont des équations du type (E) : $ay' + by + cy^{\alpha} = 0$ où a, b et c sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Sur des intervalles où ni a ni y ne s'annule, on pose $z = y^{1-\alpha}$ si y solution de (E) et y n'est pas la fonction nulle, on trouve alors $z' = (\alpha - 1)\dfrac{bz + c}{a}$ qu'on sait de nouveau résoudre.

REMARQUE 13.16 : Équations de RICCATI : ce sont des équations de la forme (E) : $ay' + by + cy^2 = d$ où a, b, c et d sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Si on trouve une solution particulière y_0 de (E) alors en posant $z = y - y_0$, la fonction z vérifie une équation de BERNOULLI qu'on sait maintenant résoudre.