CHAPITRE 14
ESPACES VECTORIELS NORMÉS, TOPOLOGIE ET CONTINUITÉ

⊙ La topologie générale est une branche des mathématiques qui fournit un vocabulaire et un cadre général pour traiter des notions de limite, de continuité, et de voisinage. Les espaces topologiques forment le socle conceptuel permettant de définir ces notions. Elles sont assez générales pour s'appliquer à un grand nombre de situations différentes : ensembles finis, ensembles discrets, espaces de la géométrie euclidienne, espaces numériques et matriciels, espaces fonctionnels plus complexes, mais aussi en géométrie algébrique.

La topologie générale définit le vocabulaire fondamental. Elle possède deux prolongements importants, permettant une analyse plus approfondie encore de la notion générale de forme : la topologie différentielle, généralisant les outils de l'analyse classique (dérivée, champs de vecteurs, etc.) et la topologie algébrique, introduisant des invariants calculables tels que les groupes d'homologie.

Un exemple fondamental est celui des espaces métriques, ensembles (de points) au sein desquels une notion de distance entre les éléments de l'ensemble est définie. Tout espace métrique est canoniquement muni d'une topologie. Les espaces métrisables sont les espaces topologiques obtenus de cette manière. L'exemple correspondant le plus à notre expérience intuitive de l'espace est l'espace affine euclidien à trois dimensions : la distance entre deux points comme la longueur du segment les reliant.

Quand il s'agit d'un espace vectoriel, les topologies sont souvent (et c'est le cadre ici) associées à des normes où la distance entre deux vecteurs est la norme du vecteur différence. Il y a pléthore d'exemples de ce type dans toutes les branches des mathématiques : espaces numériques, fonctionnels. Développée notamment par David Hilbert et Stefan Banach, cette notion d'espace vectoriel normé est fondamentale en analyse et plus particulièrement en analyse fonctionnelle, avec l'utilisation d'espaces de Banach (toutes suite de Cauchy converge) tels que les espaces L^p.

TABLE DES MATIÈRES

PROGRAMME

1 : Topologie d'un espace vectoriel normé

Contenus	Capacités & Commentaires
Point intérieur à une partie. Ouvert d'un espace normé.	Une boule ouverte est un ouvert.
Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.	
Fermé d'un espace normé.	Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.
Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.	
Point adhérent à une partie, adhérence.	L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.
Partie dense.	
Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	

2 : Limite et continuité en un point

Contenus	Capacités & Commentaires
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.	Caractérisation séquentielle.
Opérations algébriques sur les limites, composition.	
Continuité en un point.	Caractérisation séquentielle.

3 : Continuité sur une partie

Contenus	Capacités & Commentaires
Opérations algébriques, composition.	
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	

4 : Espaces vectoriels normés de dimension finie

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.	La notion de norme subordonnée est hors programme. Exemples du déterminant, du produit matriciel.

PARTIE 14.1 : TOPOLOGIE DANS UN EVN

14.1.1 : Ouverts et fermés

DÉFINITION 14.1 :
Soit E *un espace vectoriel normé,* U *une partie de* E *et* $a \in E$*, on dit que :*

- a *est un* **point intérieur** *à* U *si* $\exists r > 0,\ B(a,r) \subset U$.
- U *est un* **ouvert** *de* E *(ou que* U *une* **partie ouverte** *de* E*) si* $\forall a \in U,\ \exists r > 0,\ B(a,r) \subset U$.

EXEMPLE 14.1 : $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ normé par $||\,.\,||_2$.

REMARQUE 14.1 : • $\emptyset$ *et* E *sont des ouverts de* E.

- *On peut remplacer* $B(a,r)$ *par* $B_f(a,r)$ *dans la définition des points intérieurs ou des ouverts.*
- *On dit point intérieur mais on devrait plutôt dire vecteur intérieur car* E *est un espace vectoriel.*
- U *est ouverte si et seulement si tous ses points sont intérieurs à elle-même.*
- *Les intervalles ouverts de* $\mathbb{R}$ *sont des parties ouvertes.*
- *Si* a *est intérieur à* A *alors* $a \in A$ *mais il existe des points de* A *qui ne sont pas intérieurs à* A.

EXERCICE CLASSIQUE 14.2 : Soit $E = C^0([0;1],\mathbb{R})$ et $U = \{f \in E \mid f > 0\}$.
Est-ce que U est ouvert si on munit E de la norme $||\,.\,||_\infty$? Et si on choisit la norme $||\,.\,||_1$?

PROPOSITION SUR LES PROPRIÉTÉS DES OUVERTS 14.1 :
Soit E **un espace vectoriel normé.**

- **Toute boule ouverte est une partie ouverte.**
- **Toute réunion (quelconque) de parties ouvertes de** E **est une partie ouverte de** E**.**
- **Toute intersection finie de parties ouvertes de** E **est une partie ouverte de** E**.**

EXERCICE 14.3 : Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E. On suppose que $\operatorname*{Inf}_{a\in A, b\in B} ||a-b|| > 0$. Prouver qu'il existe des ouverts U et V de E tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U\cap = \emptyset$.

REMARQUE 14.2 : Une intersection quelconque de parties ouvertes peut ne pas être ouverte.

EXEMPLE 14.4 : Soit $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B\Big(0_E, \frac{n+1}{n}\Big) = B_f(0_E,1)$ n'est pas un ouvert de E.

DÉFINITION 14.2 :
Soit E *un espace vectoriel normé,* F *une partie de* E *et* $a \in E$*, on dit que :*

- a *est un* **point adhérent** *à* F *si* $\forall r > 0,\ B(a,r) \cap F \neq \emptyset$.
- F *est un* **fermé** *de* E *(ou que* F *est une* **partie fermée** *de* E*) si son complémentaire (dans* E*) est une partie ouverte de* E.

REMARQUE 14.3 : • $\emptyset$ *et* E *sont des fermés de* E.

- *Les intervalles fermés de* $\mathbb{R}$ *sont des fermés.*
- *Il existe des parties ouvertes et fermées et des parties ni ouvertes ni fermées.*
- *Si* $a \in A$ *alors* a *est adhérent à* A *mais il existe des points adhérents à* A *qui ne sont pas dans* A.
- *Si* A *est une partie de* $\mathbb{R}$ *non vide et majorée, alors* $\operatorname{Sup} A$ *est adhérent à* A.

PROPOSITION SUR LES PROPRIÉTÉS DES FERMÉS 14.2 :
Soit E un espace vectoriel normé.

- **Toute boule fermée et toute sphère est une partie fermée.**
- **Toute réunion finie de parties fermées de E est une partie fermée de E.**
- **Toute intersection (quelconque) de parties fermées de E est une partie fermée de E.**

REMARQUE 14.4 : Une réunion quelconque de parties fermées peut ne pas être fermée.

EXEMPLE 14.5 : Dans le $\mathbb{R}$-espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées qu'on munit de la norme $||f||_\infty = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, soit l'ensemble C des fonctions f telles que $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \geqslant A,\ f(x) = f(A)$.
Montrer que toute fonction admettant une limite finie en $+\infty$ est adhérente à C.

THÉORÈME DE CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DES POINTS ADHÉRENTS ET DES PARTIES FERMÉES (ÉNORME) 14.3 :
Soit A et F deux parties d'un espace vectoriel normé E et $a \in E$:

- **a est adhérent à A si et seulement s'il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$.**
- **F est fermée si et seulement si toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ convergente vérifie $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \in F$.**

REMARQUE 14.5 :

- *Cela ne veut pas dire que toute suite de vecteurs appartenant à une partie fermée F converge mais que si une telle suite de vecteurs de F converge alors sa limite est aussi dans F.*
- *Ce qui précède signifie que "F est fermée si et seulement si tout point adhérent à F appartient à F".*

EXEMPLE 14.6 : Montrer que tout fermé F d'un espace vectoriel normé E peut s'écrire comme intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

14.1.2 : Adhérence et densité

DÉFINITION 14.3 :
*Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E, on définit l'***adhérence** *de A comme étant la partie de E contenant les points adhérents à A ; on la note $\overline{A}$.*

REMARQUE HP 14.6 : Les deux notions qui suivent viennent de disparaître du programme :

- *L'***intérieur** *de A défini comme la partie de E contenant les points intérieurs à A, notée $\overset{\circ}{A}$.*
- *La* **frontière** *de A, notée $\mathrm{Fr}(A)$, est définie par $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.*
- *On a donc $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$ et $\mathrm{Fr}(A) \subset \overline{A}$ et l'égalité $\mathrm{Fr}(A) \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$.*

REMARQUE 14.7 : Soit E un espace normé, $\overline{A}$ est fermé.

EXEMPLE 14.7 : Soit $C \subset E$ un convexe, montrer que $\overline{C}$ l'est aussi.

DÉFINITION 14.4 :
Soit E un espace normé, $A \subset E$, on dit que A est dense dans E si $\overline{A} = E$.

EXEMPLE 14.8 : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

EN PRATIQUE : Soit E *un espace vectoriel normé et* A *une partie de* E, $a \in E$, *pour montrer que :*

- A *est ouverte, on prouve que :* $\forall a \in A,\ \exists r > 0,\ \forall b \in E,\ ||b - a|| < r \Longrightarrow b \in A$.
- A *est ouverte, on l'exprime comme réunion d'ouverts ou intersection finie d'ouverts.*
- A *est ouverte, on établit (séquentiellement) que son complémentaire est fermé.*
- A *est ouverte, on trouve* $f : E \to \mathbb{R}$ *continue et* U *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *(habituellement des intervalles ouverts* $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$, $]0;1[$ *ou* $]-1;1[$*) tels que* $A = f^{-1}(U)$.
- A *est fermée, on l'exprime comme intersection de fermés ou réunion finie de fermés.*
- A *est fermée, on établit que son complémentaire est ouvert.*
- A *est fermée, on trouve* $f : E \to \mathbb{R}$ *continue et* F *un fermé de* $\mathbb{R}$ *(habituellement des intervalles fermés* $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $[0;1]$, $[-1;1]$ *ou* $\{0\}$*) tels que* $A = f^{-1}(F)$.
- A *est fermée, on prouve que si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *converge, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in A$.
- a *est adhérent à* A, *on vérifie que* $\forall r > 0,\ \exists x \in A,\ ||x - a|| < r$.
- a *est adhérent à* A, *on trouve* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
- A *est dense, pour tout* $x \in E$, *on trouve une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.

14.1.3 : Invariance de ces notions avec des normes équivalentes

PROPOSITION D'INVARIANCE PAR ÉQUIVALENCE DES NORMES 14.4 :
Soit un espace vectoriel E **et** N_1, N_2 **deux normes équivalentes dans** E. **Si** $A \subset E$ **et** $a \in E$ **:**

- a **est intérieur à** A **dans l'espace vectoriel normé** $(E, N_1) \Longleftrightarrow a$ **est intérieur à** A **dans** (E, N_2).
- a **est adhérent à** A **dans l'espace vectoriel normé** $(E, N_1) \Longleftrightarrow a$ **est adhérent à** A **dans** (E, N_2).
- A **est ouvert dans l'espace vectoriel normé** $(E, N_1) \Longleftrightarrow A$ **est ouvert dans** (E, N_2).
- A **est fermé dans l'espace vectoriel normé** $(E, N_1) \Longleftrightarrow A$ **est fermé dans** (E, N_2).
- A **est dense dans l'espace vectoriel normé** $(E, N_1) \Longleftrightarrow A$ **est dense dans** (E, N_2).

REMARQUE 14.8 : • Ces notions topologiques dépendent en général des normes employées.
• En dimension finie, pas besoin de préciser la norme choisie, elles sont toutes équivalentes : on parle donc de la **topologie des normes**.

PARTIE 14.2 : LIMITE ET CONTINUITÉ PONCTUELLE

14.2.1 : Limite

DÉFINITION 14.5 :
Soit $(E, ||\,.\,||_E)$, $(F, ||\,.\,||_F)$ *deux espaces vectoriels normés,* $A \subset E$, $f : A \to F$, a *un point de* E *adhérent à* A, $\ell \in F$, *on dit que* f **tend vers** ℓ **en** a *si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ ||x - a||_E \leqslant \alpha \Longrightarrow ||f(x) - \ell||_F \leqslant \varepsilon$.

REMARQUE 14.9 : • On peut remplacer les inégalités strictes par des larges sans changer la notion.
• L'existence et la valeur d'une limite dépend des normes employées dans E *et dans* F.
• Si E *et* F *sont de dimensions finies, la convergence de* f *et la limite sont indépendantes des normes.*

PROPOSITION SUR L'UNICITÉ DE LA LIMITE DES FONCTIONS 14.5 :
Si f **admet une limite en** a **alors elle est unique.**

DÉFINITION 14.6 :
Avec les notations de la définition précédente, le vecteur ℓ *est noté* $\lim_a f$ *ou* $\lim_{x \to a} f(x)$ *:* **limite de** f **en** a.

EXEMPLE 14.9 : Limite en $(0,0)$ de $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \dfrac{(x+y)(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

DÉFINITION 14.7 :
Soit $f : A \to \mathbb{R}$*, où* A *est une partie d'un espace vectoriel normé* E*, et* a *un point de* E *adhérent à* A *;*

(i) $\lim_a f = +\infty$ *si* $\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ ||x-a||_E < \alpha \Longrightarrow f(x) > K$.

(ii) $\lim_a f = -\infty$ *si* $\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ ||x-a||_E < \alpha \Longrightarrow f(x) < K$.

Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*,* F *un espace vectoriel normé,* $f : I \to F$ *et* $\ell \in F$ *;*

(i) Si I *n'est pas majoré,* $\lim_{+\infty} f = \ell$ *si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > K \Longrightarrow ||f(x)-\ell||_F < \varepsilon$.

(ii) Si I *n'est pas minoré,* $\lim_{-\infty} f = \ell$ *si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x < K \Longrightarrow ||f(x)-\ell||_F < \varepsilon$.

Ce sont les **limites infinies** *ou les* **limites en l'infini**.

REMARQUE 14.10 : Dans la suite, si I *est un intervalle non majoré, on dit (par abus) que* $+\infty$ *est adhérent à* I*. De même, si* I *est non minoré, on dit que* $-\infty$ *est adhérent à* I*.*

14.2.2 : Continuité en un point

DÉFINITION 14.8 :
Soit A *est une partie de* E*,* $f : A \to F$*,* $a \in A$*, on dit que* f *est* **continue en** a *si* $\lim_a f = f(a)$.

REMARQUE 14.11 : Soit A *est une partie de* E*,* $f : A \to F$*,* $a \in \overline{A} \setminus A$*, on suppose que* f *admet une limite en* a*, on dit que* f *est* **prolongeable par continuité en** a*. La fonction* $\tilde{f}$ *définie sur* $A \cup \{a\}$ *par* $\tilde{f}(x) = f(x)$ *si* $x \in A$ *et* $\tilde{f}(a) = \lim_a f$ *est continue en* a *(***prolongement par continuité** *de* f *en* a*).*

THÉORÈME DE CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA LIMITE DES FONCTIONS ET DE LA CONTINUITÉ 14.6 :
Soit $f : A \to F$**,** a **adhérent à** A **et** $b \in F$**, alors on a l'équivalence qui constitue la caractérisation séquentielle de la limite :** $\left(\lim_a f = b\right) \Longleftrightarrow \left(\forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_{n \to +\infty} u_n = a \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(u_n) = b\right)$.
Soit $f : A \to F$ **et** $a \in A$**, alors on adapte pour obtenir la caractérisation séquentielle de la continuité :** $\left(f \text{ continue en } a\right) \Longleftrightarrow \left(\forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_{n \to +\infty} u_n = a \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(u_n) = f(a)\right)$.

EXEMPLE 14.10 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$ est-elle continue en $(0,0)$?

PROPOSITION DE CARACTÉRISATION DE LIMITE PAR LES COORDONNÉES 14.7 :
Soit E **et** F **des espaces vectoriels normés,** $A \subset E$**,** $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_p)$ **une base de** F **de dimension** p**,** $f : A \to F$ **et, pour** $k \in [\![1;p]\!]$**,** $b = \sum_{k=1}^{p} b_k v_k \in F$ **et les** $f_k : A \to \mathbb{K}$ **telles que :** $\forall x \in A,\ f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x) v_k$.
Alors on a l'équivalence : $\lim_a f = b \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1;p]\!],\ \lim_a f_k = b_k$.

REMARQUE 14.12 : • $\dim F = p$ *: l'étude de* f *sur* A *équivaut à l'étude de* p *applications de* A *dans* $\mathbb{K}$.
• *Par contre, si* E *de dimension finie et si* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *une base de* E, *l'étude de* $f : E \to F$ *au voisinage de* $a = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ *n'est pas équivalente à l'étude des* n *applications partielles* $\overline{f}_k : \mathbb{K} \to F$ *(pour* $k \in [\![1;n]\!]$*) définies par* $\overline{f}_k(x_k) = f(a_1e_1 + \cdots + x_ke_k + \cdots + a_ne_n)$ *au voisinage de* a_k.

EXEMPLE 14.11 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Alors f n'est pas continue en $(0,0)$ malgré l'étude des applications partielles au voisinage de $(0,0)$.

PROPOSITION 14.8 :
Si $f : A \to F$ **admet une limite en** a **adhérent à** A **alors** f **est bornée au voisinage de** a**, ce qui se traduit par :** $\exists r > 0,\ \exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in A,\ ||x-a||_E < r \Longrightarrow ||f(x)||_F \leqslant K$.
Soit $f : A \to F$, a **adhérent à** A, $b \in F$ **et** $\varphi : A \to \mathbb{R}_+$ **telle que** $||f(x)-b||_F \leqslant \varphi(x)$ **au voisinage de** a.
On a alors l'implication : $\lim\limits_a \varphi = 0 \Longrightarrow \lim\limits_a f = b$.

REMARQUE 14.13 : • *Cela permet de se ramener à des fonctions de référence grâce aux majorations.*
• *On a même (et grâce à ce qui précède), si* $\lim\limits_a f = b$, *alors* $\lim\limits_a ||f||_F = ||b||_F$.

PROPOSITION OPÉRATOIRE SUR LES LIMITES ET LA CONTINUITÉ 14.9 :
Soit f **et** g **définies de** A **dans** F **et** a **adhérent à** A **:**
- **si** f **et** g **admettent des limites (finies) en** a **alors :** $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$**, l'application** $\alpha f + \beta g$ **admet aussi une limite (finie) en** a **et on a :** $\lim\limits_a(\alpha f + \beta g) = \alpha \lim\limits_a f + \beta \lim\limits_a g$ **;**
- **si** f **et** g **sont continues en** a **alors :** $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha f + \beta g$ **est aussi continue en** a**.**

Soit E, F **et** G **des espaces vectoriels normés,** A **une partie de** E **et** B **une partie de** F, $f : A \to F$ **et** $g : B \to G$ **telles que** $f(A) \subset B$ **:**
- **si** a **est adhérent à** A, $b = \lim\limits_a f$ **existe (finie ou non),** b **est adhérent à** B **et** $\lim\limits_b g$ **existe (finie ou non), alors** $g \circ f$ **admet une limite en** a **et** $\lim\limits_a g \circ f = \lim\limits_b g$ **;**
- **si** f **est continue en** a **et si** g **continue en** $f(a)$ **alors** $g \circ f$ **est continue en** a**.**

Soit $\lambda : A \to \mathbb{K}$, $f : A \to F$ **et** a **adhérent à** A **:**
- **si** λ **et** f **admettent des limites (finies) en** a **alors** λf **aussi et** $\lim\limits_a(\lambda f) = \lim\limits_a \lambda \times \lim\limits_a f$ **;**
- **si** λ **et** f **sont continues en** a **alors** λf **est continue en** a**.**

Soit $f : A \to \mathbb{K}$ **et** a **adhérent à** A **:**
- **si** f **admet une limite (finie) non nulle en** a **alors** f **ne s'annule pas au voisinage de** a, $\dfrac{1}{f}$ **admet une limite en** a **et** $\lim\limits_a \dfrac{1}{f} = \left(\lim\limits_a f\right)^{-1}$**.**
- **si** f **est continue en** a **et si** $f(a) \neq 0$ **alors** $\dfrac{1}{f}$ **est continue en** a**.**

REMARQUE 14.14 : Si $f : A \to F$, $a \in A$, *si* f *est continue en* a *alors* $||f||_F$ *est continue en* a.

EN PRATIQUE : Soit A *une partie de* E, $f : A \to F$ *et* a *adhérent à* A *et* $b \in F$, *pour montrer que :*
- $\lim\limits_a f = b$, *on vérifie que* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A, ||x-a|| < \alpha \Longrightarrow ||f(x)-b|| < \varepsilon$.
- $\lim\limits_a f = b$, *on établit que si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *tend vers* a, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$.
- $\lim\limits_a f = b$, *si* $\dim(F) < +\infty$, $f = (f_1, \cdots, f_p)$, $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_p)$, *on prouve* $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $\lim\limits_a f_k = \ell_k$.
- $\lim\limits_a f = b$, *on utilise les propriétés algébriques des limites en exprimant* f *différemment ou* f *est carrément continue en* $a \in A$ *par opérations algébriques et* $b = f(a)$.
- f *ne tend pas vers* b *en* a, *on trouve une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *qui tend vers* a *alors que pourtant* $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tend pas vers* b.

PARTIE 14.3 : CONTINUITÉ SUR UNE PARTIE

14.3.1 : Applications continues

DÉFINITION 14.9 :
Soit E *et* F *deux espaces vectoriels normés,* A *une partie de* E *et* $f : A \to F$.
On dit que f *est* **continue sur** A *si* f *est continue en tout point (ou vecteur)* a *de* A.
On note $C^0(A, F)$ *l'ensemble des fonctions continues sur* A *et à valeurs dans* F.

REMARQUE 14.15 : Le caractère continu ou non des applications dépend des normes employées, mais ne change pas si on prend des normes équivalentes. En dimension finie, cela ne dépend pas des normes.

THÉORÈME DE CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA CONTINUITÉ 14.10 :
Soit $f : A \to F$**, la fonction** f **est continue sur** A **si et seulement si pour toute suite** $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ **qui converge vers un vecteur** $a \in A$**, on a** $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = f(a)$**.**

REMARQUE 14.16 : Soit E *un espace vectoriel normé,* $f : E \to E$*, et* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 \in E$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. *Si* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *où* f *est continue alors* $f(\ell) = \ell$ *(vecteur fixe de* f*).*

PROPOSITION OPÉRATOIRE SUR LA CONTINUITÉ 1 14.11 :
Si $(f, g) \in C^0(A, F)^2$ **et** $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ **alors** $\alpha f + \beta g \in C^0(A, F)$ **(combinaison linéaire).**
Ainsi $C^0(A, F)$ **est un sous-espace vectoriel de** $\mathcal{F}(A, F)$**.**
Si $f \in C^0(A, F)$**, si** $g \in C^0(B, G)$ **et si** $f(A) \subset B$ **alors** $g \circ f \in C^0(A, G)$ **(composition).**
Si $f \in C^0(A, F)$ **et** $B \subset A$ **alors** $f|_B \in C^0(B, F)$ **(restriction).**
Si $f \in C^0(A, F)$ **alors** $||f|| \in C^0(A, \mathbb{R})$ **(norme).**

PROPOSITION DE CONTINUITÉ PAR LES FONCTIONS COORDONNÉES 14.12 :
Soit A **une partie d'un espace vectoriel normé,** F **un espace vectoriel normé de dimension finie** p **et** $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ **une base de** F**. Si** $f : A \to F$**, on note** $f_1, \cdots, f_p$ **les applications de** A **dans** $\mathbb{K}$ **définies par** $\forall x \in A,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} f_k(x) e_k$**. Alors on dispose de l'équivalence suivante :**

$$\big(f \text{ est continue sur } A\big) \iff \big(f_1, \cdots, f_p \text{ sont continues sur } A\big).$$

PROPOSITION OPÉRATOIRE SUR LA CONTINUITÉ 2 14.13 :
Si $\lambda \in C^0(A, \mathbb{K})$ **et** $f \in C^0(A, F)$ **alors** $\lambda f \in C^0(A, F)$ **(multiplication par un scalaire).**
Si $\lambda \in C^0(A, \mathbb{K})$ **et** $\mu \in C^0(A, \mathbb{K})$ **alors** $\lambda\mu \in C^0(A, \mathbb{K})$ **(produit de fonctions scalaires).**
Par conséquent : $C^0(A, \mathbb{K})$ **est une sous-algèbre de** $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$**.**
Si $f \in C^0(A, \mathbb{K})$ **vérifie** $\forall x \in A,\ f(x) \neq 0$ **alors** $\dfrac{1}{f} \in C^0(A, \mathbb{K})$ **(inverse d'une fonction scalaire).**

EXEMPLE 14.12 : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \dfrac{\ln(1 + y^2x^2)\sqrt{z^2y^4 + 1}}{\cos(xy^2) + e^z + 1}$ est continue.

REMARQUE HP 14.17 : Soit E, F deux espaces normés et $f : E \to F$ une application continue sur E :

- *Si U est un ouvert de F alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E.*
- *Si V est un fermé de F alors $f^{-1}(V)$ est un fermé de E.*

Ce théorème est hors programme, on utilisera seulement sa conséquence essentielle au programme.

THÉORÈME SUR LES IMAGES RÉCIPROQUES PAR UNE APPLICATION RÉELLE CONTINUE D'OUVERTS OU DE FERMÉS 14.14 :

Soit E un espace vectoriel normé, $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue sur E et $a \in \mathbb{R}$:

- $f^{-1}(]a;+\infty[)$ **et** $f^{-1}(]-\infty;a[)$ **sont des ouverts de E.**
- $f^{-1}(\{a\})$, $f^{-1}([a;+\infty[)$ **et** $f^{-1}(]-\infty;a])$ **sont des fermés de E.**

REMARQUE 14.18 : Cette propriété est fausse pour les images directes :

- *$\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\cos\big(]-\pi;\pi[\big) =]-1;1]$ n'est pas ouvert.*
- *La fonction th est continue sur $\mathbb{R}$ et $\text{th}(\mathbb{R}) =]-1;1[$ n'est pas fermé.*

EXERCICE 14.13 : L'ensemble S des **matrices stochastiques** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (tous ses coefficients sont entre 0 et 1 et la somme de toutes les colonnes vaut 1) est un compact.

THÉORÈME DES BORNES ATTEINTES POUR UNE FONCTION RÉELLE SUR UN COMPACT (ÉNORME) 14.15 :

Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, $A \subset E$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue sur A et $K \subset A$ une partie fermée bornée non vide de E, alors "f est bornée sur K et elle y atteint ses bornes" : $\underset{K}{\text{Min}}\, f$ et $\underset{K}{\text{Max}}\, f$ existent.

DÉMONSTRATION : hors programme.

REMARQUE 14.19 :

- *Un corollaire : si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, $A \subset E$ et $f : A \to F$ et $K \subset A$ une partie fermée bornée de E ($K \neq \emptyset$) : $\underset{K}{\text{Min}}\, ||f||_F$ et $\underset{K}{\text{Max}}\, ||f||_F$ existent.*
- *Une autre application classique : si K est une partie fermée bornée de E (espace vectoriel normé de dimension finie) et $f : K \to \mathbb{R}_+^*$ est continue sur K alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in K,\ f(x) \geqslant \alpha$.*

14.3.2 : Applications lipschitziennes

DÉFINITION 14.10 :

Soit $f : A \to F$, où A est une partie d'un espace vectoriel normé E, F un espace normé et $k \in \mathbb{R}_+$.

On dit que f est **k-lipschitzienne** *si $\forall (x,y) \in A^2,\ ||f(x) - f(y)||_F \leqslant k||x-y||_E$.*

On dit que f est **lipschitzienne** *s'il existe $k \geqslant 0$ tel que f soit k-lipschitzienne.*

REMARQUE 14.20 : • Bien sûr, la constante de LIPSCHITZ dépend des normes employées.

- *Par contre, le caractère lipschitzien ne dépend pas des normes équivalentes choisies.*

EXEMPLE 14.14 : • L'application $x \mapsto ||x||$ de E dans $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne.

- Les applications $c_k : (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto x_k$ sont 1-lipschitziennes pour $||\,.\,||_\infty$.

EXERCICE CLASSIQUE 14.15 : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, A est une partie non vide de E et $x \in E$, on pose $d(x, A) = \mathrm{Inf}\big(\{||x - a|| \mid a \in A\}\big)$.

a. Montrer l'application $d : x \in E \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

b. Établir que : $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$.

c. Justifier que si A est fermée, il existe un vecteur $a_0 \in A$ tel que $d(x, A) = ||x - a_0||$.

PROPOSITION SUR LES APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES 14.16 :
Si f, g sont lipschitziennes sur A : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha f + \beta g)$ est lipschitzienne sur A.
Si f est lipschitzienne sur A, g lipschitzienne sur B, $f(A) \subset B$: $g \circ f$ est lipschitzienne sur A.

REMARQUE 14.21 : Le produit d'applications lipschitziennes n'est pas toujours lipschitzien.

EXEMPLE 14.16 : $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est 1-lipschitzienne mais $x \mapsto x^2$ ne l'est pas (mais pourtant continue).

THÉORÈME DE CONTINUITÉ D'UNE APPLICATION LIPSCHITZIENNE 14.17 :
Si f est lipschitzienne sur A alors f est continue sur A.

EXEMPLE 14.17 : La fonction $f : x \to e^x$ est continue mais pas lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

14.3.3 : Applications linéaires, multilinéaires et polynomiales

REMARQUE HP 14.22 : Seule la continuité en dimension finie est au programme, mais pour information soit $\big(E, ||\,.\,||_E\big)$, $\big(F, ||\,.\,||_F\big)$ deux espaces vectoriels normés avec $E \neq \{0_E\}$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, il y a équivalence de :

(i) f est continue sur E.

(ii) f est continue en 0_E.

(iii) Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E$, $||f(x)||_F \leqslant k||x||_E$.

(iv) f est lipschitzienne sur E.

Si f est continue, on définit sa **norme subordonnée** *à $||\,.\,||_E$ et $||\,.\,||_F$ par $|||f||| = \underset{x \in E \setminus \{0_E\}}{\mathrm{Sup}} \dfrac{||f(x)||_F}{||x||_E}$.*
Ceci signifie que $\forall x \in E$, $||f(x)||_F \leqslant |||f|||\,||x||_E$ et que si $k \in \mathbb{R}_+$ vérifie $\forall x \in E$, $||f(x)||_F \leqslant k\,||x||_E$, alors $k \geqslant |||f|||$. Ainsi, $|||f|||$ est la plus petite des constantes de lipschitzianité de f.

ORAL BLANC 14.18 : On pose ici $E = C^0\big([0; 1], \mathbb{R}\big)$ qu'on munit de la norme $||\,.\,||_1$:

- Soit $\varphi \in E$, montrer que $F : E \to \mathbb{R}$ définie par $\forall f \in E$, $F(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\varphi(t)dt$ est continue.
- Justifier que $G \in \mathcal{L}(E)$ n'est pas continue si $G(f) = g$ avec $g(x) = f(x) - f(0)$.

THÉORÈME DE CONTINUITÉ DES APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE (ÉNORME) 14.18 :
Soit $\big(E, ||\,.\,||_E\big)$ un espace normé de dimension finie, $\big(F, ||\,.\,||_F\big)$ un espace normé de dimension quelconque. Toute application linéaire de E vers F est lipschitzienne donc continue.

REMARQUE FONDAMENTALE 14.23 : En dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé.

REMARQUE HP 14.24 : Avec les hypothèses du théorème ci-dessus, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a même mieux : $|||f||| = \underset{||x||_E = 1}{\mathrm{Max}} ||f(x)||_F$. C'est-à-dire : $\exists x \neq 0_E \in E$, $||f(x)||_F = |||f||| \times ||x||_E$.

EXEMPLE 14.19 : $P \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $f \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)$ définie par $f(M) = P^{-1}MP$ est continue.

EXERCICE 14.20 : Soit $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ et $A = (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base canonique, ce qui signifie que $f(x_1, \cdots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$, alors f est continue sur $\mathbb{R}^n$ et :

- si $\mathbb{R}^n$ est muni de $||\,.\,||_\infty$, alors $|||f|||_\infty = \sum_{i=1}^{n} |a_i| = ||a||_1$.
- si $\mathbb{R}^n$ est muni de $||\,.\,||_1$, alors $|||f|||_1 = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} |a_i| = ||a||_\infty$.
- si $\mathbb{R}^n$ est muni de $||\,.\,||_2$, alors $|||f|||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{1/2} = ||a||_2$.

REMARQUE HP 14.25 :

- *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un espace vectoriel normé quelconque, alors l'application $f \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto |||f|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.*
- *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, G un espace vectoriel normé (de dimension quelconque), $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors on a : $|||g \circ f||| \leqslant |||g||| \times |||f|||$.*
- *Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie alors, d'après ce qui précède, l'application $f \mapsto |||f|||$ est une* **norme d'algèbre** *sur $\mathcal{L}(E)$.*

PROPOSITION 14.19 :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies, G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire :

- **Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x, y) \in E \times F,\ ||B(x, y)||_G \leqslant k \times ||x||_E \times ||y||_F$.**
- **B est continue sur $E \times F$.**

REMARQUE 14.26 : • *L'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(A, B) = AB$ est continue.*

- *L'application $\theta : \mathcal{L}(E)^2 \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\theta(u, v) = u \circ v$ est continue si E de dimension finie.*
- *L'application $\psi : K \times E \to E$ telle que $\psi(\lambda, x) = \lambda x$ est continue si E est de dimension finie.*
- *Tout produit scalaire sur un espace euclidien est continu.*

DÉFINITION 14.11 :
Soit $p \geqslant 1$, $F, E_1, \cdots, E_p$ des espaces vectoriels normés. Alors $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est dite **p-linéaire** *si pour tout $k \in [\![1; p]\!]$ et tout $p-1$-uplets $(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \cdots \times E_p$, l'application $\varphi_k : E_k \to F$ définie par $f_k(x) = f(x_1, \cdots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \cdots, x_p)$ est linéaire.*

REMARQUE 14.27 : La plus simple est le produit $P_p : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ défini par $P_p(x_1, \cdots, x_p) = \prod_{k=1}^{p} x_k$.

PROPOSITION 14.20 :
Toute application multilinéaire en dimension finie est continue.

EXEMPLE 14.21 : Si $p \in \mathbb{N}^*$ alors $P_p : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P_p(A) = A^p$ est continue.

DÉFINITION 14.12 :
Soit $p \geqslant 1$, on dit que $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ est une application polynomiale si elle est combinaison linéaire d'applications du type $(x_1, \cdots, x_p) \mapsto x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$ avec $(k_1, \cdots, k_p) \in \mathbb{N}^p$.

EXEMPLE 14.22 : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^4 y^2 z + 5xy^3 z^3$ est polynomiale de degré 7.

PROPOSITION 14.21 :
Toute application polynomiale est continue sur $\mathbb{K}^p$.

REMARQUE 14.28 : L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *(par extension) est polynomiale en ses coefficients, multilinéaire en ses colonnes donc continue.*

EXERCICE CLASSIQUE 14.23 : Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

EN PRATIQUE : Soit E *et* F *deux espaces normés,* $A \subset E$ *et* $f : A \to F$*, pour montrer que :*

- f *est continue, on établit qu'elle est linéaire ou multilinéaire si* $\dim(E) < +\infty$.
- f *est continue, on vérifie qu'elle est polynomiale si* $E = \mathbb{K}^p$.
- f *est continue, on vérifie qu'elle est lipschitzienne.*
- f *est continue, on la décompose et on utilise la stabilité de la continuité par opérations.*
- f *est continue, on vérifie la continuité de chaque* f_k *si* $f = (f_1, \cdots, f_p)$ *et* $\dim(F) = p < +\infty$.
- f *n'est pas continue, on trouve* $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ *qui tend vers* $a \in A$ *et* $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui diverge.*
- f *n'est pas continue, on trouve* $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ *qui tend vers* $a \in A$ *avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell \neq f(a)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 14.29 : On pose, pour $p \geqslant 1$ *et* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A^n}{n!}$. *On a déjà vu la convergence nécessaire à la bonne définition de* $\exp(A)$. $\exp(A)$ *est un polynôme en* A *car* $\mathbb{K}[A]$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

COMPÉTENCES

- Maîtriser les opérations entre parties ouvertes et fermées et savoir les caractériser.
- Penser prioritairement aux suites pour montrer qu'une partie est fermée.
- Comprendre les généralisations des propriétés des limites aux fonctions entre vecteurs.
- Utiliser la caractérisation séquentielle pour montrer une continuité ou l'utiliser pour une limite.
- Connaître les différentes structures d'ensembles de fonctions continues.
- Montrer qu'une partie est ouverte ou fermée avec les images réciproques d'intervalles.
- Penser sans modération au théorème des bornes atteintes pour établir l'aspect borné.
- Savoir montrer qu'une fonction est lipschitzienne pour établir sa continuité.
- Maîtriser l'équivalence entre lipschitzianité et continuité pour des applications linéaires.
- Trouver la constante optimale de lipschitzianité pour une application linéaire en dimension finie.
- Reconnaître le cadre des applications bilinéaires ou polynomiales pour montrer la continuité.