

CHAPITRE 15

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

PARTIE 15.1 : FONCTIONS DE CLASSE C^1 ET C^2

REMARQUE 15.1 : Soit $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{2\}$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$ avec $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$. Pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on définit la fonction $\varphi_k :]-r; r[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall t \in]-r; r[, \varphi_k(t) = f(a + t e_k)$.

DÉFINITION 15.1 :

Avec ces notations, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et si $v \neq 0 \in \mathbb{R}^p$, on dit que f admet en a une dérivée selon le vecteur v si la fonction $\varphi_{a,v} :]-\alpha; \alpha[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{a,v}(t) = f(a + tv)$ admet une dérivée en 0 avec $\alpha = \frac{r}{\|v\|}$.

Dans ce cas, on note $D_v f(a)$ cette dérivée, qui vaut donc $D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$.

DÉFINITION 15.2 :

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$, avec les notations précédentes, on dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la k -ième variable si φ_k est dérivable en 0 et on définit alors cette dérivée partielle par, notée $\partial_k f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ par $\partial_k f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \varphi'_k(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t e_k) - f(a)}{t}$.

REMARQUE 15.2 : Si la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ et $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, on note plutôt $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}$.

DÉFINITION 15.3 :

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est de classe C^1 sur Ω si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur Ω . On note $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur Ω .

DÉFINITION 15.4 :

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ admet en $a \in \Omega$ un développement limité d'ordre 1 s'il existe a_1, \dots, a_p tels que :

$$f(a + h) = f(a) + a_1 h_1 + \dots + a_p h_p + o(\|h\|) \text{ si } h = (h_1, \dots, h_p)$$

ce qui signifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall h \in \mathbb{R}^p, \|h\| \leq \alpha \implies |f(a + h) - f(a) - a_1 h_1 - \dots - a_p h_p| \leq \varepsilon \|h\|$.

THÉORÈME ÉNORME 15.1 :

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , alors f admet en tout point $a \in \Omega$ un développement limité :

$$f(a + h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + h_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) + o(\|h\|) \text{ si } h = (h_1, \dots, h_p).$$

Une fonction de classe C^1 sur Ω est continue sur Ω .

THÉORÈME 15.2 :

Soit $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 sur Ω telles que g ne s'annule pas sur Ω . Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I intervalle ouvert avec $f(\Omega) \subset I$, alors $f + g, \lambda f, fg, f/g$ et $\varphi \circ f$ sont aussi de classe C^1 sur Ω et on a les relations :

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \frac{\partial(f + g)}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial g}{\partial x_k}, \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_k} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k} \text{ et}$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_k} = g \times \frac{\partial f}{\partial x_k} + f \times \frac{\partial g}{\partial x_k}, \frac{\partial(f/g)}{\partial x_k} = \frac{1}{g^2} \left(g \times \frac{\partial f}{\partial x_k} - f \times \frac{\partial g}{\partial x_k} \right), \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \times (\varphi' \circ f).$$

DÉFINITION 15.5 :

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et $a \in \Omega$, on définit la **différentielle de f en a** , c'est la forme linéaire $df(a) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$, $df(a)(h) = \sum_{k=1}^p h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ aussi noté $df(a).h$.

THÉORÈME ÉNORME 15.3 :

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $x = (x_1, \dots, x_p) : I \rightarrow \Omega$ de classe C^1 sur un intervalle I . Alors la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(x_1(t), \dots, x_p(t))$ est de classe C^1 sur I et :

$$\forall t \in I, g'(t) = x_1'(t) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t)) + \dots + x_p'(t) \frac{\partial f}{\partial x_p}(x(t)) \quad (\text{c'est la règle de la chaîne}).$$

THÉORÈME ÉNORME 15.4 :

Soit Ω et Γ des ouverts de \mathbb{R}^2 et $x, y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , le tout vérifiant $\forall (u, v) \in \Omega, (x(u, v), y(u, v)) \in \Gamma$. Alors $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ est de classe C^1 sur Ω avec les relations :

$$\forall (u, v) \in \Omega, \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \end{cases}.$$

REMARQUE 15.3 : Comme on écrit (même en mathématique) rarement les points en lesquels on calcule

les dérivées partielles, ces deux formules s'abrègent en :
$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}.$$

PROPOSITION 15.5 :

Soit C un ouvert convexe et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , alors f constante $\iff (\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0)$.

DÉFINITION 15.6 :

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , pour tout $a \in \Omega$ on définit le **gradient de f en a** , noté $\nabla f(a)$ ou $\overrightarrow{\text{grad}} f(a)$, par la relation $\forall h \in \mathbb{R}^p, \forall a \in \Omega, df(a).h = \overrightarrow{\text{grad}} f(a)|h = (\nabla f(a)|h)$.

PROPOSITION 15.6 :

Avec ces notations, $\forall a \in \Omega, \nabla f(a) = \overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k$.

REMARQUE 15.4 : La valeur de $df(a).v$ est la "vitesse de variation de f à partir de a dans la direction du vecteur v ", alors $df_a.v = D_v f(a) = (\overrightarrow{\text{grad}} f(a)|v)$ est maximal quand v et $\overrightarrow{\text{grad}} f(a)$ sont "positivement" colinéaires ce qui montre que la direction de $\overrightarrow{\text{grad}} f(a)$ est la "ligne de plus grande pente".

PROPOSITION 15.7 :

Soit $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur Ω , g ne s'annulant pas sur Ω , $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I intervalle ouvert avec $f(I) \subset I$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} f + \mu \overrightarrow{\text{grad}} g$, $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \times \overrightarrow{\text{grad}} g + g \times \overrightarrow{\text{grad}} f$, $\overrightarrow{\text{grad}}(f/g) = \frac{1}{g^2}(g \times \overrightarrow{\text{grad}} f - f \times \overrightarrow{\text{grad}} g)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f) \overrightarrow{\text{grad}} f$.

DÉFINITION 15.7 :

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ et $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$, on dit que f admet en a une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x_j puis x_i** si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existe sur un voisinage de a et $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x_i en a , on note alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ cette valeur. Si $i = j$, on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ à la place de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$.

DÉFINITION 15.8 :

On dit que f est de classe C^2 sur Ω si toutes les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur Ω . On note $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 de Ω dans \mathbb{R} .

THÉORÈME 15.8 :

Une fonction de classe C^2 est de classe C^1 . Soit $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^2 sur Ω telles que g ne s'annule pas sur Ω . Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur I intervalle ouvert avec $f(\Omega) \subset I$, alors $f + g, \lambda f, f/g$ et $\varphi \circ f$ sont de classe C^2 sur Ω et $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$, $\frac{\partial^2(f+g)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2(\lambda f)}{\partial x_i \partial x_j} = \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ mais aussi $\frac{\partial^2(fg)}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) + g \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$.

REMARQUE 15.5 : $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ est donc une algèbre qui contient les fonctions polynomiales et les fonctions rationnelles (là où elles sont définies).

THÉORÈME ÉNORME 15.9 :

Si $f : \Omega \rightarrow F$ de classe C^2 sur un ouvert Ω alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ (SCHWARZ).

REMARQUE FONDAMENTALE 15.6 : $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ désigne le passage en polaires (non injectif) ou, si on le veut bijectif, $\varphi : U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi; \pi[\rightarrow P$ avec $P = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ et toujours $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = 2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

- Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on pose $g = f \circ \varphi$ c'est-à-dire $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$: f et g représentent la même quantité physique (température, enthalpie, pression,...) mais pas avec les mêmes coordonnées.
- Si f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , alors g est aussi de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et $\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$.
- On pose $e_r = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$, la base (e_r, e_θ) est aussi une base orthonormale directe de \mathbb{R}^2 . Si $(x, y) \neq (0, 0) \iff r \neq 0$, $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \frac{\partial g}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} e_\theta$.

PARTIE 15.2 : EXTREMA**DÉFINITION 15.9 :**

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$, on dit que f admet en a :

- un **maximum local** (resp. **minimum**) si $\exists r > 0, \forall x \in B(a, r), f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).
- un **extremum local** si f possède en a un maximum local ou un minimum local.
- un **maximum global** (resp. **minimum**) (ou absolu) si $\forall x \in \Omega, f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).
- un **extremum global** (ou absolu) si f possède en a un maximum global ou un minimum global.

PROPOSITION 15.10 :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur Ω et $a \in \Omega$, si f admet un extremum local en a alors $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(a) = 0$, c'est-à-dire $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$.

DÉFINITION 15.10 :

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur Ω , on dit $a \in \Omega$ est un **point critique** de f si $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(a) = 0$.

REMARQUE 15.7 : • Cette propriété est fautive sur un ensemble non ouvert.

- Ainsi, avec ces conditions : (f admet un extremum local en a) \implies (a est un point critique de f).
- La réciproque de cette implication est fautive.

THÉORÈME 15.11 :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et a un point critique de f :

- (i) si $H_f(a) \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ (resp. $S_p^{--}(\mathbb{R})$), f admet en a un minimum (resp. maximum) local.
- (ii) si $H_f(a) \notin S_p^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_p^-(\mathbb{R})$), f n'a pas de minimum (resp. maximum) local en a .
- (iii) si $H_f(a) \in (S_p^+(\mathbb{R}) \setminus S_p^{++}(\mathbb{R})) \cup (S_p^-(\mathbb{R}) \setminus S_p^{--}(\mathbb{R}))$, alors on ne peut rien dire.

REMARQUE 15.8 : Supposons que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (avec Ω ouvert de \mathbb{R}^2) admette un point critique en $a \in \Omega$, avec les notations de MONGE : $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$:

- (i) Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (resp. $r < 0$), f admet en a un minimum (resp. maximum) local,
- (ii) Si $rt - s^2 < 0$, f admet en a un point selle (ou point col).
- (iii) Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

PARTIE 15.3 : COURBES ET SURFACES**DÉFINITION 15.11 :**

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , la courbe Γ définie par : $\Gamma = \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = 0\}$ (équation implicite), on dit qu'un point $M_0 = (x_0, y_0)$ de Γ est un **point régulier** si $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0) \neq 0$.

REMARQUE 15.9 : Avec les notations précédentes, on admet l'existence d'un paramétrage local de classe C^1 de la courbe Γ au voisinage d'un point régulier ; si $f(x_0, y_0) = 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) \neq 0$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(M_0, r) \subset \Omega$, un intervalle ouvert I contenant 0, $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $(x(0), y(0)) = M_0$ et $\forall (x, y) \in B(M_0, r)$, $(x, y) \in \Gamma \iff (\exists t \in I, x = x(t) \text{ et } y = y(t))$.

PROPOSITION 15.12 :

En un point où il est non nul, le gradient est orthogonal aux lignes de niveau $f(x, y) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .

REMARQUE 15.10 : Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0)$ est donc un vecteur normal à la tangente à Γ au point M_0 ce qui fait que la tangente à Γ en M_0 a pour équation : $(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

DÉFINITION 15.12 :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , la surface S telle que : $S = \{(x, y, z) \in \Omega \mid f(x, y, z) = 0\}$ (équation implicite), on dit qu'un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S est un **point régulier** si $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0) \neq 0$.

DÉFINITION 15.13 :

Soit une surface S d'équation $f(x, y, z) = 0$ avec $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 , I un intervalle, $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 telles que $\forall t \in I, (x(t), y(t), z(t)) \in S$. On dit que **la courbe** $\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in I\}$ est **tracée sur** S .

REMARQUE 15.11 : Soit une surface $S : f(x, y, z) = 0$ avec $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Les tangentes en un point M_0 régulier de S aux courbes de classe C^1 tracées sur S sont orthogonales à $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0)$.

DÉFINITION 15.14 :

Le plan tangent à la surface S en M_0 régulier est le plan orthogonal à $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0)$ passant par M_0 .

PROPOSITION 15.13 :

Ce plan tangent à S en M_0 point régulier a pour équation :

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$