CHAPITRE 16
FONCTIONS VECTORIELLES

DÉFINITION 16.1 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ *et* $t_0 \in I$*, si la fonction* $h \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ *admet une limite en* 0*, on dit que* f *est* **dérivable en** t_0*. Alors, on note* $f'(t_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} \in \mathbb{R}^n$ *le* **vecteur dérivé** *de* f *en* t_0*.*

REMARQUE 16.1 : f *est dérivable en* t_0 *si et seulement si* f *admet un* $DL_1(t_0)$*, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un vecteur* $v \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $f(t_0+h) \underset{0}{=} f(t_0) + hv + o(h)$ *; dans ce cas on a* $f'(t_0) = v$*.*

PROPOSITION 16.1 :
Soit $t_0 \in I$**,** $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ **une base de** $\mathbb{R}^n$**,** $f : I \to \mathbb{R}^n$ **une fonction et** $f_1, \cdots, f_n$ **les fonctions de** I **dans** $\mathbb{R}$ **telles que** $\forall t \in I,\ f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(t)e_k$**. Alors** f **est dérivable en** t_0 **si et seulement si** $f_1, \cdots, f_n$ **sont dérivables en** t_0**. Dans ce cas, on a** $f'(t_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} f'_k(t_0)e_k$**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ **et** $t_0 \in I$**, si** f **est dérivable en** t_0 **alors** f **est continue en** t_0**.**

REMARQUE 16.2 :

- *Une fonction vectorielle* $f : I \to \mathbb{R}^n$ *est dérivable en un point* t_0 *si et seulement si toutes les* **fonctions coordonnées** *le sont (et ceci dans n'importe quelle base).*
- *Soit* $f : I \to \mathbb{C}$ *et* $t_0 \in I$*, alors* f *est dérivable en* t_0 *si et seulement si* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *le sont.*

  Dans ce cas, $f'(t_0) = \mathrm{Re}(f)'(t_0) + i\,\mathrm{Im}(f)'(t_0)$*. De plus* $\overline{f}$ *est dérivable en* t_0 *et* $(\overline{f})'(t_0) = \overline{f'(t_0)}$*.*

DÉFINITION 16.2 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$*.*

- *On dit que* f *est* **dérivable sur** I *si* f *est dérivable en tout point* t_0 *de* I*.*

  Dans ce cas, on note $f' : I \to \mathbb{R}^n$ *la* **fonction dérivée de** f *qui à* $t_0 \in I$ *associe* $f'(t_0)$*.*
- *On dit que* f *est* **de classe** C^1 **sur** I *si* f *est dérivable sur* I *et si* f' *est continue sur* I*.*

  On note $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *l'ensemble des fonctions de classe* C^1 *sur* I *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*.*

PROPOSITION 16.2 :
$C^1(I, \mathbb{R}^n)$ **est un sous-espace de** $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ **et :** $\forall (f,g) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)^2,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$**.**

PROPOSITION 16.3 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$**,** $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ **une base de** $\mathbb{R}^n$ **et** $f_1, \cdots, f_n$ **les fonctions coordonnées de** f **dans** $\mathcal{B}$ **:** $f = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k e_k$**. Alors** $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \iff (f_1, \cdots, f_n) \in C^1(I, \mathbb{R})^n$**. Dans ce cas,** $f' = \sum\limits_{k=1}^{n} f'_k e_k$**.**

En particulier : $f \in C^1(I, \mathbb{C}) \iff \big(\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)\big) \in C^1(I, \mathbb{R})^2$**.**

Dans ce cas $f' = \mathrm{Re}(f)' + i\,\mathrm{Im}(f)'$ **et, de plus,** $\overline{f} \in C^1(I, \mathbb{C})$ **et** $(\overline{f})' = \overline{f'}$**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ **et** $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$**. Si** $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ **alors** $L \circ f \in C^1(I, \mathbb{R}^p)$ **et** $(L \circ f)' = L \circ f'$**.**

PROPOSITION 16.4 :
Soit $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $g \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ **et** $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ **bilinéaire, alors la fonction** $B(f,g) : I \to \mathbb{R}^p$ **définie par** $B(f,g)(t) = B\big(f(t), g(t)\big)$ **est de classe** C^1 **sur** I **et** $B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g')$.
Soit $(m,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$ **et, pour tout** $k \in [\![1;p]\!]$, **des** $f_k : I \to \mathbb{R}^n$ **de classe** C^1 **sur un intervalle** I. **Si** $M : (\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}^m$ **est multilinéaire, alors** $g : I \to \mathbb{R}^m$ **définie par** $g(t) = M(f_1(t), \cdots, f_p(t))$ **est** C^1 **et** $\forall t \in I,\ g'(t) = M(f_1'(t), f_2(t), \cdots, f_p(t)) + M(f_1(t), f_2'(t), f_3(t), \cdots, f_p(t)) + \cdots + M(f_1(t), \cdots, f_{p-1}(t), f_p'(t))$.

PROPOSITION 16.5 :
Pour le produit scalaire, la norme euclidienne canonique dans $\mathbb{R}^n$ **et le déterminant :**

(i) Si $(f,g) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)^2$ **alors** $(f|g) \in C^1(I, \mathbb{R})$ **et** $(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$.

(ii) Si $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ **est telle que** $\forall t \in I,\ f(t) \neq 0$ **alors** $||f|| \in C^1(I, \mathbb{R})$ **et** $||f||' = \dfrac{(f|f')}{||f||}$.

Soit $M : I \mapsto \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **de classe** C^1 **avec** $M(t) = (C_j(t))_{1 \leqslant j \leqslant p}$ **(**C_j **est la fonction de** t **qui renvoie la** j**-ième colonne de la matrice** $M(t)$**. Alors** $\det(M) : I \to \mathbb{K}$ **est** C^1 **et, sur** I, **on a la relation**

(iii) $\big(\det(M)\big)' = \sum_{j=1}^{p} \det\big(C_1(t), \cdots, C_{j-1}(t), C_j'(t), C_{j+1}(t), \cdots, C_p(t)\big)$.

PROPOSITION 16.6 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ **de classe** C^1 **et** $\varphi : J \to I$ **de classe** C^1.
Alors $f \circ \varphi$ **est de classe** C^1 **et on a :** $\forall u \in I,\ \big(f \circ \varphi\big)'(u) = \varphi'(u) f'\big(\varphi(u)\big)$.

DÉFINITION 16.3 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$, *on note* $f^{(0)} = f$ *et pour* $p \in \mathbb{N}$ *et si* $f^{(p)}$ *est dérivable sur* I, *la fonction* $f^{(p+1)} = \big(f^{(p)}\big)'$ *: cette fonction* $f^{(p)}$ *est alors la* **dérivée** p**-ième de** f **sur** I.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, *on dit que* f *est de* **classe** C^p **sur** I *si* f' *est de classe* C^{p-1} *sur* I.

On note $C^p(I, \mathbb{R}^n)$ *l'ensemble des fonctions de classe* C^p *sur* I *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$.

On dit que f *est de* **classe** C^∞ **sur** I *si* f *est de classe* C^p *sur* I *pour tout entier* $p \in \mathbb{N}$.

On note $C^\infty(I, \mathbb{R}^n) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} C^p(I, \mathbb{R}^n)$ *l'ensemble des fonctions de classe* C^∞ *sur* I *et à valeurs dans* F.

REMARQUE 16.3 : • f *de classe* C^2 *si* f' *existe et est de classe* C^1 *donc si* f'' *existe et est continue.*
• *Par récurrence, pour* $p \in \mathbb{N}^*$ *:* $\big(f$ *de classe* C^p *sur* $I\big) \iff \big(f^{(p)}$ *existe et est continue sur* $I\big)$.

PROPOSITION 16.7 :
Pour tout $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C^p(I, \mathbb{R}^n)$ **est un sous-espace vectoriel de** $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ **et :**

$$\forall (f,g) \in C^p(I, \mathbb{R}^n)^2,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ (\alpha f + \beta g)^{(p)} = \alpha f^{(p)} + \beta g^{(p)}.$$

Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\lambda : I \to \mathbb{R}$ **de classe** C^p **sur** I **et** $f : I \to \mathbb{R}^n$ **de classe** C^p.

Alors $\lambda f : I \to \mathbb{R}^n$ **est de classe** C^p **et si** $p \in \mathbb{N}$ **:** $(\lambda f)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \lambda^{(k)} f^{(p-k)}$ **(formule de** Leibniz**).**

Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ **de classe** C^p, $\varphi : J \to I$ **de classe** C^p. **Alors** $f \circ \varphi$ **est de classe** C^p.