PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 19

PSI 1 2024-2025 **du lundi 17/02 au vendredi 21/02**

1 Variables aléatoires : voir programme précédent

2 Espérance et variance : voir programme précédent

3 Fonctions génératrices : voir programme précédent

4 Groupes orthogonaux : soit E un espace euclidien

- $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle ou un automorphisme orthogonal s'il conserve le produit scalaire, mais aussi les normes, les bases orthonormées ; notation $O(E)$;
- $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$; symétries orthogonales ; réflexions ;
- un sous-espace F est stable par $u \in O(E)$ si et seulement si $F^\perp$ l'est aussi ;
- $O_n(\mathbb{R})$ (ou $O(n)$) sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales, caractérisation pratique, sous-groupe des matrices orthogonales de déterminant 1 noté $SO_n(\mathbb{R})$;
- si $\mathcal{B}$ est une B.O.N. de E, $u \in O(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$;
- décomposition QR d'une matrice inversible avec l'orthonormalisation de Gram-Schmidt ;
- si $u \in O(E)$, on a $\det(u) = \pm 1$; $SO(E)$ sous-groupe des isométries directes (rotations) ;

5 Isométries du plan et de l'espace :

- orientation d'un espace euclidien ; produit mixte en dimension quelconque ;
- en dimension 2 ou 3, interprétation comme aire du parallélogramme ou volume du parallélépipède ;
- produit vectoriel dans un espace euclidien orienté ; propriétés et relations dans une B.O.N.D. ;
- matrices de $O_2(\mathbb{R})$; $SO_2(\mathbb{R})$ contient les matrices de rotation et est commutatif ;
- rotations du plan, réflexions, groupe $O(E)$ si $\dim(E) = 2$; classification complète des isométries du plan : dimension des sous-espaces propres associés à 1 et -1 et nombre de réflexions pour l'engendrer ;
- rotation de l'espace sauf id_E : matrice classique dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = D \oplus D^\perp$ si D est l'axe de la rotation et angle si on oriente cette droite ;
- détermination pratique de la rotation si on se donne sa matrice dans une base orthonormée ;
- expression vectorielle d'une rotation, autre détermination pratique ;
- reconnaissance des symétries orthogonales de l'espace par la trace ;
- étude d'une "rotation-miroir" : axe, angle, matrice dans une B.O.N.D. adaptée, expression vectorielle d'une telle isométrie, reconnaissance des symétries orthogonales de l'espace par la trace ;
- classification complète des isométries directes ou indirectes de l'espace ;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir une isométrie vectorielle (déf. 12.1)
2 énoncer le théorème de caractérisation des isométries (th. 12.1)
3 énoncer le théorème de caractérisation des matrices orthogonales (prop. 12.5)
4 énoncer la propriété et la définition du produit mixte (prop. 12.11 et déf. 12.7)
5 énoncer les propriétés du produit vectoriel en dimension 3 (prop. 12.12 et 12.13)
6 énoncer la forme des matrices de $O(2)$ et la structure de $O(2)$ et $SO(2)$ (prop. 12.14 et 12.15)
7 énoncer la description des isométries directes en dimension 3 (th. 12.21)
8 prouver la propriété de stabilité de l'orthogonal par une isométrie (prop. 12.3)
9 prouver que $u \in O(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O(n)$ si $\mathcal{B}$ bon (th. 12.6)
10 prouver que si $A \in O(n)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $|\lambda| = 1$ (rem. 12.11)
11 prouver que si $A \in SO(n)$ et si n impair, alors 1 est valeur propre de A (rem. 12.11)

Prévision pour la prochaine semaine : endomorphismes des espaces euclidiens (isométries et symétriques) et fin des khôlles pour cette année