TD 19 : ESPACES EUCLIDIENS

PSI 1 2024-2025 **vendredi 14 février 2025**

19.1 *OdlT 2013/2014 E3A PSI planche 286 II* Soit (a, b) une famille libre d'un espace euclidien E.

a. Montrer que $f(x) = (a|x)b - (b|x)a$ définit un endomorphisme de E.

b. Est-ce un automorphisme ? Est-il diagonalisable ?

19.2 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 242 II* Soit E euclidien et $f \in O(E)$.

a. Montrer que $\det(f) = \pm 1$.

b. Que dire de f de déterminant -1 en dimension 2 ?

c. Que dire de f de déterminant 1 en dimension 3 ?

d. Quel est le centre de $O(E)$ (l'ensemble des $u \in O(E)$ tels que $\forall v \in O(E),\ u \circ v = v \circ u$) ? De $SO(E)$?

19.3 *CCP PSI 2015* Marin de Bonnières

Soit E euclidien de dimension $n \geqslant 2$, $f \in GL(E)$ tel que $\forall (x, y) \in E^2,\ (x|y) = 0 \Longrightarrow (f(x)|f(y)) = 0$.

a. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E, que dire de $\mathcal{B}' = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$?

b. Calculer $\big(f(e_i)+f(e_j)|f(e_i)-f(e_j)\big)$ de 2 manières différentes. Montrer : $\exists \alpha > 0,\ \forall i \in [\![1; n]\!],\ ||f(e_i)||^2 = \alpha^2$.

c. Que dire de $\dfrac{1}{\alpha}f$? Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2,\ \big(f(x)|f(y)\big) = \alpha^2(x|y)$.

19.4 *E3A PSI 2015* Marie Trarieux et Patxi Teillagorry Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in O(n)$.

a. Montrer que $\left| \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} \right| \leqslant n$.

b. Montrer que $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left| m_{i,j} \right| \geqslant n$.

c. Montrer que $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left| m_{i,j} \right| \leqslant n\sqrt{n}$.

19.5 *CCP PSI 2016* Léo Fusil I Caractériser $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

19.6 *E3A PSI 2016* Léo Fusil II Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x) = u \wedge x$.

a. Calculer $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

b. Écrire les matrices A et A^2 de f et f^2.

c. Exprimer f^n en fonction de f et f^2.

d. Reconnaître $\exp(f)$.

19.7 *OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 208I, abordable dès la première année*

a. Calculer $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(k\theta)$ et $T_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(k\theta)$ pour $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, puis donner leur limite en $+\infty$.

b. On note r une rotation d'angle θ en dimension 2 ou 3. Calculer, pour $x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} r^k(x)$.

c. Montrer que si u est une isométrie de E euclidien, $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires et orthogonaux. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u^k(x)$.

19.8 *Mines PSI 2018* Martin Monsel I

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que parmi les trois assertions suivantes, deux quelconques d'entre elles impliquent la troisième :

(i) f est une isométrie.

(ii) $f^2 = -\mathrm{id}_E$.

(iii) $\forall x \in E,\ (f(x)|x) = 0$.

On suppose E de dimension 2, combien existe-t-il de telles f ?

On suppose E de dimension 3, combien existe-t-il de telles f ?

19.9 *X PSI 2020* Victor Barberteguy II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer toutes les matrices de $O(n)$ de trace n.

19.10 *Mines PSI 2021* Antonio Treilhou I Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, soit D une droite vectorielle et P un plan vectoriel. On note r une rotation d'angle $\theta \in]0; 2\pi[$ autour de la droite D et s la réflexion de plan P.

a. On suppose dans cette question que $D \perp P$, montrer que $s \circ r = r \circ s$.

b. Que peut-on dire si $s \circ r = r \circ s$?

19.11 *Mines PSI 2021* Sylvain Vigouroux II Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un vecteur unitaire de E. On définit l'application $f : E \to E$ par $f(x) = (x|u)u + x \wedge u$.

a. Montrer que f est une isométrie et la caractériser.

b. Déterminer les endomorphismes g de E qui vérifient $g^2 = f$.

19.12 *CCINP PSI 2021* Laurine Texier I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

a. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ (x|f(y)) = -(f(x)|y)$.

b. Montrer que $\det(f) = (-1)^n \det(f)$. Qu'en déduit-on ?

c. Montrer que f induit sur $\mathrm{Im}\,(f)$ un endomorphisme injectif. Qu'en déduit-on sur la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$?

d. On suppose dans cette question que $n = 3$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

19.13 *Mines PSI 2023* Antoine Vallade II

Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ telle que $\forall (x, y) \in E^2,\ ||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$.

On veut établir qu'il existe un unique couple $(u, g) \in E \times O(E)$ tel que $(P)\ :\ \forall x \in E,\ f(x) = u + g(x)$.

a. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = (1 - y, 3 + x)$. Trouver l'unique couple $(u, g) \in E \times O(E)$ tel que $(P)\ :\ \forall v \in E,\ f(v) = u + g(v)$. Caractériser g.

b. Si $(u, g) \in E \times O(E)$ vérifie (P), donner des expressions de u et g en fonction de f.

c. Si $u \in E$ et $g : E \to E$ ont les expressions trouvées à la question précédente, montrer que :

(i) $\forall x \in E,\ f(x) = u + g(x)$.

(ii) $\forall (x, y) \in E^2,\ (g(x)|g(y)) = (x|y)$.

(iii) $g \in O(E)$.