TD 20 : ESPACES EUCLIDIENS

PSI 1 2024-2025 **vendredi 21 février 2025**

20.1 *ENS Cachan PSI 2016* Marie Rebière Soit A et B des matrices symétriques réelles. On suppose B positive.

a. Montrer que : $\exists k > 0,\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T BX \geqslant k||BX||^2$.
b. Soit $\rho > 0$ tel que $A + \rho B$ soit définie positive.
Montrer que : $\exists \lambda > 0,\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ BX = 0 \Longrightarrow X^T AX \geqslant \lambda||X||^2 \quad (1)$.
c. Montrer que si (1) est vérifiée, alors il existe $\rho_0 > 0$ tel que $A + \rho_0 B$ soit définie positive.

20.2 *Mines PSI 2016* Adrien Boudy II Soit E un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux de E.

a. Rappeler la définition d'un projecteur orthogonal.
Donner un exemple de problème où les projecteurs orthogonaux sont utiles.
b. Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
c. Montrer que les valeurs propres de u sont dans $[0; 2]$.
d. À quoi sont égaux $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{id}_E)$?

20.3 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 217II*

a. Déterminer un polynôme annulateur de A réelle, non nulle, carrée de taille 2 et telle que $A^2 = A^T$.
b. Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ s'il contient 0. Montrer que A est alors orthogonalement semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
c. Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ si A n'a pas de valeur propre réelle. Que peut alors valoir A ?

20.4 *CCP PSI 2017 et CCP PSI 2018* Samuel Sanchez I et Gauthier Crosio II

On définit les conditions : $M^2 + 4I_n = 0$ et $M^T M = MM^T \quad (*)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ respecte $(*)$, trouver un polynôme annulateur de $S = MM^T$. En déduire que $M/2 \in O(n)$.
b. Quel est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui respectent $(*)$?
c. Quel est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui respectent $(*)$?

20.5 *Centrale Maths1 PSI 2021* Adrien Guyot

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$.
a. Montrer qu'il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = R^T R$.
b. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = P^T P$ et $B = P^T DP$.
c. Montrer que $\det(A + B) \geqslant \det(A) + \det(B)$.

20.6 *Centrale Maths1 PSI 2021* Raffi Sarkissian Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que :

- M est orthodiagonalisable (ODZ) s'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in O(n)$ telles que $M = PDP^T$.
- M est orthotrigonalisable (OTZ) s'il existe $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire et $P \in O(n)$ telles que $M = PTP^T$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit ODZ.
b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que $N(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ soit OTZ.
c. Montrer que M est OTZ si et seulement si χ_M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

20.7 *Mines PSI 2021* Antoine Faivre-Duboz II Soit deux entiers n et p tels que $n \geqslant 3$ et $2 \leqslant p < n$. Soit aussi une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rang}\,(A) = p$. On pose alors $B = A^T A$.
a. Montrer que B est une matrice inversible.
b. Montrer que $P = AB^{-1}A^T$ est la matrice d'une projection de rang p.

20.8 *CCINP PSI 2021* Maxime Brachet I Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(M^T M)^2 = I_n$.

a. À l'aide du déterminant, montrer que la matrice M est inversible.
b. Montrer que M est symétrique.
c. En déduire que $M = I_n$.

20.9 *CCINP PSI 2021* Pierre-Issa Lacourte II Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

a. Calculer M^TM. En déduire que M est inversible.
b. Montrer que $N = M^{-1}M^T$ est une matrice orthogonale.

20.10 *Centrale Maths1 PSI 2021 et 2023* Esteban Poupinet et Bader Ben Amira

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique avec sa base canonique $\mathcal{B}_0$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$. On définit $(p, q) \in (\mathcal{L}(E))^2$ par $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p)$ et $A^T = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q)$.
a. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ \big(p(x)|y\big) = \big(x|q(y)\big)$.
b. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que $\text{Tr}\ (q \circ p) = \sum\limits_{k=1}^{n} ||p(v_k)||^2$.
c. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, $\text{Tr}\ (q \circ p) = \text{Tr}\ (p)$.
d. Dans le cas général, montrer que $\text{Tr}\ (q \circ p) \geqslant \text{Tr}\ (p)$. Montrer que $\text{Tr}\ (q \circ p) = \text{Tr}\ (p) \iff p$ est orthogonal.

20.11 *Mines PSI 2023* Paul Bats II Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $(A, B) \mapsto (A|B) = \int_0^1 A(t)B(t)dt$.

Pour $P \in E$, on définit le polynôme $u(P)$ par $u(P)(x) = \int_0^1 (x + t)^n P(t)dt$.
a. Montrer que u est linéaire et à valeurs dans E.
b. Montrer que u est autoadjoint. Montrer que u est bijectif.

20.12 *Mines PSI 2023* Antoine Campos II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. on suppose que les valeurs propres de S comptées avec leur ordre de multiplicité se trouvent sur la diagonale de S. Montrer que S est diagonale.

20.13 *Mines PSI 2017 et 2023* Roland Tournade I et Juan Dupierris II Soit E euclidien.

a. Montrer que si p est une projection orthogonale de E, alors p est symétrique.
Soit p, q deux projecteurs orthogonaux de E.
b. Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique. Montrer que $(\text{Im}\,(p) + \text{Ker}(q))^{\perp} = \text{Im}\,(q) \cap \text{Ker}(p)$.
c. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable à valeurs propres dans $[0; 1]$.

20.14 *Mines PSI 2023* Fares Kerautret I On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.
b. Quelle est la structure de $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$? Déterminer sa dimension.
c. Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$) telles que $M^2 = A$?

20.15 *Mines PSI 2023* Elae Terrien II Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$, on dit que $A \sim B$ s'il existe une matrice $Q \in O(n)$ telle que $A = QB$. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.
a. Montrer qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $M \sim S$.
b. La matrice S est-elle unique ?

20.16 *Centrale Maths1 PSI 2018, CCINP PSI 2021, 2023* Julien Langlais, Mehdi Hamdaoui II, Hugo Delval I

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{Sp}(M) = \{m_{1,1}, \cdots, m_{n,n}\}$ (comptées avec leur ordre de multiplicité). On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
On note S_n (resp. A_n) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a. Les matrices A et B sont-elles dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$? L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
b. Montrer que si $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap S_n$, alors M est diagonale en considérant $\text{Tr}\ (M^2)$.
c. Déterminer $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$.