Correction du DS5

Exercice 1 : (Extrait de CCINP PC 2022)
Partie I

1. $L_{1,k} = E_1 \cup E_2$ avec $E_1 = P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}$ et $E_2 = F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}$

2. Par incompatibilité de E_1 et E_2, on a $P(L_{1,k}) = P(E_1) + P(E_2)$ puis par indépendance des lancers, on obtient $P(L_{1,k}) = P(P_1)\dots P(P_k)P(F_{k+1}) + P(F_1)\dots P(F_k)P(P_{k+1}) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ donc $\boxed{P(L_{1,k}) = 2^{-k}}$

3. Comme $L_{1,0} = \overline{\bigcup_{k\geqslant 1} L_{1,k}}$, par incompatibilité 2 à 2 des $L_{1,k}$, on a $L_{1,0} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_{1,k}) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 1 - \frac{1/2}{1-1/2}$ donc $\boxed{P(L_{1,0}) = 0}$ *(la probabilité de ne faire que des piles ou que des faces est nulle)*

Partie II

1. a) Avec 1 lancer, on a obligatoirement une seule série donc $\boxed{P(N_{1,k}) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k \geqslant 2 \end{array}\right.}$

Avec 2 lancers, on a une ou deux séries donc $N_{2,1} = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$ et $N_{2,2} = (P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)$ donc $\boxed{P(N_{2,1}) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ et } P(N_{2,2}) = \frac{1}{2}}$ et $P(N_{n,k}) = 0$ si $k \geqslant 3$.

b) On ne peut pas avoir plus de séries que de lancers donc $\boxed{P(N_{n,k}) = 0 \text{ si } k \geqslant n+1}$

2. a) $N_{n+1,k} \cap P_n \cap P_{n+1}$ correspond à avoir k séries en $n+1$ lancers en terminant par deux piles donc il n'y a pas de nouvelle série qui apparaît lors du lancer $n+1$; les k séries étaient donc déjà présentes avant le n-ième lancer donc $N_{n+1,k} \cap P_n \cap P_{n+1} = N_{n,k} \cap P_n \cap P_{n+1}$. Comme $N_{n,k} \cap P_n$ ne dépend que des n premiers lancers et que le $(n+1)$-ième lancer est indépendant des n premiers, P_{n+1} est indépendant de $N_{n,k} \cap P_n$ donc $P(N_{n,k} \cap P_n \cap P_{n+1}) = P(N_{n,k} \cap P_n) \times P(P_{n+1})$ donc $\boxed{P(N_{n+1,k} \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} P(N_{n,k} \cap P_n)}$

b) Par la formule des probabilités totales, avec le SCE $(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$, on a

$$\begin{aligned} P(N_{n+1,k}) &= P(N_{n+1,k} \cap P_n \cap P_{n+1}) + P(N_{n+1,k} \cap P_n \cap F_{n+1}) + P(N_{n+1,k} \cap F_n \cap P_{n+1}) + P(N_{n+1,k} \cap F_n \cap F_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}\big[P(N_{n,k} \cap P_n) + P(N_{n,k} \cap F_n)\big] + \frac{1}{2}\big[P(N_{n,k-1} \cap P_n) + P(N_{n,k-1} \cap F_n)\big] \end{aligned}$$

donc $P(N_{n+1,k}) = \frac{1}{2}P(N_{n,k}) + \frac{1}{2}P(N_{n,k-1})$ par la formule des probabilités totales associée au SCE (P_n, F_n)
Cette formule reste valable pour $k = 1$ avec $N_{n,0} = 0$ (car il y a au moins une série en n lancers si $n \geqslant 1$)

3. a) $G_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} P(N_{n,k})x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} P(N_{n,k-1})x^k$ or $P(N_{n,n+1}) = 0$ et $P(N_{n,0}) = 0$ donc

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_{n,k})x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} P(N_{n,k-1})x^k = \frac{1}{2}G_n(x) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n} P(N_{n,h})x^{h+1} = \boxed{\frac{1+x}{2}G_n(x)}$$

b) $(G_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1+x}{2}$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G_n(x) = x\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}}$ car $G_1(x) = x$.

c) On développe $G_n(x)$ par le binôme de Newton : $G_n(x) = \frac{x}{2^{n-1}}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j$ et, par unicité des coefficients d'un polynôme (et $k = j+1$), $\boxed{P(N_{n,k}) = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1} \text{ pour } k \in [\![1,n]\!]}$ et $P(N_{n,k}) = 0$ si $k \geqslant n+1$ ou $k = 0$.

Exercice 2 : (Extrait de E3A PC 2016 maths A)
Partie I : Cours !
Partie II :

1. On a $a = \|u_1\|^2$ et $d = \|u_2\|^2$ donc $\boxed{a \geqslant 0 \text{ et } d \geqslant 0}$. De plus $< u_1, u_2 > = < u_2, u_1 >$ donc $\boxed{b = c}$ et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $ad - bc = \|u_1\|^2 \times \|u_2\|^2 - < u_1, u_2 >^2 \geqslant 0$, ie $\boxed{\det(B) \geqslant 0}$

2. Si $a > 0$ et posons $u_1 = xe_1$ et $u_2 = ye_1 + ze_2$, comme (e_1, e_2) est orthonormale, on a $\|u_1\|^2 = x^2$, $< u_1, u_2 > = xy$ et $\|u_2\|^2 = y^2 + z^2$. Pour que $B = G(u_1, u_2)$, il suffit donc que $\left\{\begin{array}{l} x^2 = a \\ xy = b \\ y^2 + z^2 = d \end{array}\right.$. On choisit donc $x = \sqrt{a}$ et $y = \frac{b}{\sqrt{a}}$;

reste à trouver z tel que $z^2 = d - \frac{b^2}{a} = \frac{\det(B)}{a}$. On prend donc $z = \sqrt{\frac{\det(B)}{a}}$.

Si $a = 0$, on a $\det(B) = ad - b^2 = -b^2$ donc $\det(B) \geqslant 0$ impose aussi $b = 0$. On a donc $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$; il suffit donc de choisir $u_1 = 0$ et $u_2 = \sqrt{d}e_2$ pour que $B = G(u_1, u_2)$.

En résumé, on a bien $\boxed{B \text{ vérifie } \mathtt{G} \text{ si et seulement si } a \geqslant 0,\ d \geqslant 0,\ b = c \text{ et } \det(B) \geqslant 0}$

3. On a $B^{\otimes p} = \begin{pmatrix} a^p & b^p \\ c^p & d^p \end{pmatrix}$. On raisonne alors par double implication :

Si B vérifie G : on a alors $a \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, $b = c$ et $\det(B) \geqslant 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on a $a^p \geqslant 0$, $d^p \geqslant 0$ et $b^p = c^p$; reste la condition sur $\det(B^{\otimes p})$: comme $\det(B) \geqslant 0$ et $b = c$, on a $0 \leqslant b^2 \leqslant ad$ donc $b^{2p} \leqslant (ad)^p$, ce qui signifie que $\det(B^{\otimes p}) \geqslant 0$. Ainsi $B^{\otimes p}$ vérifie G aussi.

Réciproquement : si $B^{\otimes p}$ vérifie G pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ alors B vérifie G (il suffit de prendre $p = 1$).

Partie III :

1. a) Si $C = G(u_1, u_2, u_3)$, on a$\|u_1\|^2 = 1$, $\|u_2\|^2 = a$ et $< u_1, u_2 >= 1$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|1| \leqslant 1 \times a$, ie $\boxed{a \geqslant 1}$. De même $b =< u_2, u_3 >$ et $\|u_3\|^2 = 1$ donc (Cauchy-Schwarz), $|b| \leqslant \sqrt{a} \times 1$ puis $\boxed{b^2 \leqslant a}$

b) Comme $c_{1,3} = 0$, on a $< u_1, u_3 >= 0$; on a déjà vu $\|u_1\| = \|u_3\| = 1$ donc $\boxed{(u_1, u_3) \text{ est orthonormale}}$

c) (u_1, u_3) est une bon de $P = \mathrm{Vect}\{u_1, u_3\}$ donc $v_2 =< u_1, u_2 > u_1+ < u_3, u_2 > u_3$ et $\boxed{v_2 = u_1 + bu_3}$

d) $v_2 = \pi_P(u_2)$ donc $u_2 = v_2 + (u_2 - v_2)$ avec $u_2 - v_2 \in P^\perp$ donc $\|u_2\|^2 = \|v_2\|^2 + \|u_2 - v_2\|^2 \geqslant \|u_2\|^2$, avec le théorème de Pythagore. Comme $\|u_2\|^2 = a$ et $\|v_2\|^2 = 1 + b^2$ (car (u_1, u_3) orthonormale), $\boxed{1 + b^2 \leqslant a}$

e) Si (u_1, u_2, u_3) est libre alors $u_2 \notin \mathrm{Vect}\{u_1, u_3\}$ donc $u_2 \neq v_2$; on a $\|u_2 - v_2\|^2 = \|u_2\|^2 - \|v_2\|^2 = a - (1 + b^2)$, par le théorème de Pythagore. On a donc $a - (1 + b^2) > 0$.

Supposons cette fois que $a > 1+b^2$, on a alors $\|u_2 - v_2\| > 0$ donc $u_2 \neq v_2$, ce qui signifie que $u_2 \notin \mathrm{Vect}\{u_1, u_3\}$. Comme (u_1, u_3) est une famille libre car orthonormée, on en déduit (u_1, u_2, u_3) libre.

En résumé, $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est libre si et seulement si } a > 1 + b^2}$

2. a) (e_1, e_2, e_3) est orthonormale, $< u, e_1 >= x$ et $< u, e_3 >= z$: l'ensemble cherché est $\boxed{\{u = e_1 + ye_2 + be_3, y \in \mathbb{R}\}}$

b) On choisit $u_1 = e_1$, $u_3 = e_3$ et $u_2 = u$ avec un des vecteurs u de l'ensemble précédent (il reste donc à choisir y). On a alors $\|u_1\|^2 = \|u_3\|^2 = 1$, $< u_1, u_2 >=< u_2, u_1 >= 1$, $< u_1, u_3 >=< u_3, u_1 >= 0$ et $< u_2, u_3 >=< u_3, u_2 >= b$. Pour que $C = G(u_1, u_2, u_3)$ il suffit donc que $a = \|u_2\|^2$: pour un tel vecteur u_2, on a $\|u_2\|^2 = 1 + y^2 + b^2$; il suffit donc de prendre $y = \sqrt{a - (1 + b^2)}$. Ainsi $\boxed{\text{si } a \geqslant 1 + b^2,\ C \text{ vérifie } \mathtt{G}}$

c) On vient de voir que pour une matrice de cette forme, C vérifie G si et seulement si $a \geqslant 1 + b^2$. Supposons que la matrice C vérifie cette condition et soit $p \geqslant 2$ (si $p = 1$, C vérifie G) ; on a $C^{\otimes p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a^p & b^p \\ 0 & b^p & 1 \end{pmatrix}$ qui est donc de la même forme que C. Pour que $C^{\otimes p}$ vérifie G, il suffit (et il faut) que $a^p \geqslant 1 + b^{2p}$. Comme $a \geqslant 1 + b^2$, on a $a^p \geqslant (1 + b^2)^p = 1 + b^{2p} + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} b^{2k} \geqslant 1 + b^{2p}$ car $b^{2k} \geqslant 0$. On en déduit que $\boxed{C^{\otimes p} \text{ vérifie } \mathtt{G} \text{ si } p \in \mathbb{N}^*}$

Problème : (Extrait de Mines-Ponts MP MPI 2024 maths 1)

Partie I

1. $\theta \in]-\pi, \pi[$ donc $e^{i\theta} \neq -1$ donc $1+te^{i\theta} \neq 0$ pour $t \geqslant 0$ et f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ et $1-x < 1$ donc f est intégrable au voisinage de 0. Enfin, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-i\theta}}{t^{2-x}}$ et $2 - x > 1$ donc $\boxed{f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}}$

2. On pose $h : (\theta, t) \mapsto \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}}$ et on applique le théorème de dérivation :

H1 : si $t > 0$, $\theta \mapsto h(\theta, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $] - \pi, \pi[$.

H2 : si $\theta \in] - \pi, \pi[$, $t \mapsto h(\theta, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ d'après la question précédente.

H3 : si $\theta \in] - \pi, \pi[$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta, t) = \frac{-ie^{i\theta}t^x}{(1 + te^{i\theta})^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

H4 : $\left|\frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta, t)\right| = \frac{t^x}{|1 + te^{i\theta}|^2} = \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})(1 + te^{-i\theta})} = \frac{t^x}{1 + 2t\cos\theta + t^2} \leqslant \frac{t^x}{1 + 2t\cos\beta + t^2} = \varphi(t)$ (indépendante de θ) si $\theta \in [-\beta, \beta]$ car cos est paire et décroissante sur $[0, \beta] \subset [0, \pi[$, donc $\cos\theta \geqslant \cos\beta$ puis $t \geqslant 0$ donc $t\cos\theta \geqslant t\cos\beta$ et $1 + 2\cos\theta + t^2 \geqslant 1 + 2t\cos\beta + t^2 = |1 + te^{i\beta}|^2 > 0$. La fonction φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^x$ (et $x > 0$) et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-x}}$ (et $2 - x > 1$).

On en déduit que $\boxed{r \in \mathcal{C}^1(] - \pi, \pi[) \text{ et } r'(\theta) = -ie^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2}\,\mathrm{d}t \text{ si } |\theta| < \pi}$

3. Par produit avec $\theta \mapsto e^{ix\theta}$, on en déduit que g est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et $g'(\theta) = ixe^{ix\theta}r(\theta) + e^{ix\theta}r'(\theta)$ puis, avec la question précédente, $g'(\theta) = ie^{ix\theta}\int_0^{+\infty}\left(\frac{xt^{x-1}}{1+te^{i\theta}} - \frac{t^x e^{i\theta}}{(1+te^{i\theta})^2}\right)\mathrm{d}t = \boxed{ie^{ix\theta}\int_0^{+\infty} h'(t)\,\mathrm{d}t}$

On a ensuite $\boxed{\lim_{t\to 0^+} h(t) = h(0) = 0}$ car $x>0$ et $h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{i\theta}}{t^{1-x}}$ donc $\boxed{\lim_{t\to+\infty} h(t) = 0}$ car $1-x>0$.

On en déduit $g'(\theta) = ie^{ix\theta}\Big[h(t)\Big]_0^{+\infty} = 0$ donc ($]-\pi,\pi[$ est un intervalle) $\boxed{g \text{ est constante sur }]-\pi,\pi[}$

4. Comme g est constante sur $]-\pi,\pi[$, on a $g(\theta) = g(-\theta)$ et $g(\theta)\sin(x\theta) = g(\theta)\frac{e^{ix\theta}-e^{-ix\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}\right)$

Par linéarité de l'intégrale, $g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^{x-1}}{1+te^{-i\theta}} - \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\frac{1+te^{i\theta}-(1+te^{-i\theta})}{|1+te^{i\theta}|^2}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$

donc $g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{1+2t\cos\theta+t^2}t^x\,\mathrm{d}t$. On en déduit que $\boxed{g(\theta)\sin(x\theta) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(\theta)t^x}{1+2t\cos\theta+t^2}\,\mathrm{d}t}$

5. On a, avec les relations rappelées, $\sin(\theta_n) = \cos(\arctan n) = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ et $\cos(\theta_n) = -\sin(\arctan n) = \frac{-n}{\sqrt{1+n^2}}$ donc $\frac{\sin(\theta_n)t^x}{1+2t\cos(\theta_n)+t^2} = \frac{t^x}{\sqrt{1+n^2}(1+t^2)-2nt}$. On pose ensuite $t = \frac{u+n}{\sqrt{1+n^2}}$: la fonction $u \mapsto \frac{u+n}{\sqrt{1+n^2}}$ est $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante de $]-n,+\infty[$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\mathrm{d}u$. On a $\theta_n \in]-\pi;\pi[$ et on vérifie $\sqrt{1+n^2}\left(1+\frac{(u+n)^2}{1+n^2}\right) - 2n\frac{u+n}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\left((1+n^2)+(u^2+2nu+n^2)-2n(u+n)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}(1+u^2)$.

On en déduit $g(\theta_n)\sin(x\theta_n) = \int_{-n}^{+\infty}\left(\frac{u+n}{\sqrt{1+n^2}}\right)^x\frac{\sqrt{1+n^2}}{(1+u^2)}\times\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+n^2}} = \int_{-n}^{+\infty}\left(\frac{u+n}{\sqrt{1+n^2}}\right)^x\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)}$.

6. On pose $f_n(u) = \begin{cases}\left(\frac{u+n}{\sqrt{1+n^2}}\right)^x\frac{1}{1+u^2} & \text{si } u\in]-n,+\infty[\\ 0 & \text{si } u \leqslant -n\end{cases}$ de sorte que $g(\theta_n)\sin(x\theta_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$

H1 : si $u\in\mathbb{R}$ et n grand, $f_n(u) = \left(\frac{u+n}{\sqrt{1+n^2}}\right)^x\frac{1}{1+u^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1+u^2}$ donc (f_n) CVS sur $\mathbb{R}$ vers $u\mapsto\frac{1}{1+u^2}$

H2 : les fonctions f_n et $u\mapsto\frac{1}{1+u^2}$ sont $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}$.

H3 : si $u\in]-n,+\infty[$, $|f_n(u)| = \left|\frac{u+n}{\sqrt{1+n^2}}\right|^x\frac{1}{1+u^2} \leqslant \frac{(1+|u|)^x}{1+u^2} = \psi(u)$ car $\frac{|u+n|}{\sqrt{1+n^2}} \leqslant \frac{|u|+n}{n} \leqslant \frac{|u|}{n}+1 \leqslant |u|+1$.
Comme $f_n(u) = 0$ pour $u\leqslant -n$, on a $|f_n(u)| \leqslant \psi(u)$ pour tout $u\in\mathbb{R}$. On vérifie ensuite que ψ est continue sur $\mathbb{R}$ et $|\psi(u)| \underset{u\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{|u|^{2-x}}$ et $2-x>1$ donc ψ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit $\lim_{n\to+\infty} g(\theta_n)\sin(x\theta_n) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \Big[\arctan(u)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$.

7. Comme g est constante sur $]-\pi,\pi[$ et $\theta_n\in]-\pi,\pi[$, on a aussi $g(\theta_n)\sin(x\theta_n) = g(0)\sin(x\theta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(0)\sin(\pi x)$ car $\lim_{n\to+\infty}\theta_n = \pi$. Par unicité de la limite, on en déduit, car $\sin(\pi x)\neq 0$, $\boxed{g(0) = \int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}\,\mathrm{d}t}{1+t} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}}$

Partie II

8. On pose $t = \frac{1}{u}$: l'application $u\mapsto\frac{1}{u}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement décroissante de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$ et $\mathrm{d}t = \frac{-1}{u^2}\mathrm{d}u$ donc $\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_1^0\frac{u^{1-x}}{1+u^{-1}}\times\frac{-1}{u^2}\mathrm{d}u = \int_0^1\frac{u^{-x}}{u+1}\mathrm{d}u$ ce qui donne la première égalité demandée par relation de Chasles (et linéarité de l'intégrale).

La seconde égalité découle de $\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1\left(t^{x-1}-\frac{t^x}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \int_0^1\frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t$

9. Pour $t\in[0,1[$, on a $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n$ donc, pour $t\in]0,1[$, $\frac{t^x}{1+t} - \frac{t^{-x}}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(t^{x+n}-t^{n-x}\right)$. On pose alors $u_n(t) = (-1)^n(t^{x+n}-t^{n-x})$ et on applique le TITT :

H1 : $\sum u_n$ CVS sur $]0,1[$ vers $S : t\mapsto\frac{t^x-t^{-x}}{1+t}$

H2 : les fonctions u_n et S sont continues sur $]0,1[$.

H3 : u_n est continue sur $]0,1]$; $|u_n(t)| \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{x-n}}$ (car $-x<x$) et $x-n<1$ donc u_n est intégrable sur $]0,1[$

H4 : $t\leqslant 1$ donc $|u_n(t)| = -t^{x+n}+t^{n-x}$ donc $\int_0^1|u_n(t)|\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{x+n+1}+\frac{1}{n-x+1} = \frac{2x}{(n+1)^2-x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{n^2}$ (SATP) donc $\sum\int_0^1|u_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge

On en déduit $\displaystyle\int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2x}{(n+1)^2-x^2}$. Avec la seconde égalité de la question précédente et avec un changement d'indice ($p=n+1$), on obtient $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}\,\mathrm{d}t}{1+t^x} = \frac{1}{x} - \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\frac{2x}{p^2-x^2}}$

10. Si $y\in]0,\pi[$, on pose $y=\pi x$ avec $x\in]0,1[$ et **II.9** donne $\displaystyle\frac{\pi}{\sin(y)} = \frac{\pi}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n y/\pi}{n^2-y^2/\pi^2} = \frac{\pi}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n\pi y}{n^2\pi^2-y^2}$ d'où l'égalité demandée.

Partie III

11. $t\mapsto\dfrac{1-\cos^{2p+1}t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\displaystyle\frac{1-\cos^{2p+1}t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\displaystyle\frac{1-\cos^{2p+1}t}{t^2} \underset{t\to 0}{=} \frac{1-(1-t^2/2+o(t^2))^{2p+1}}{t^2}$

$\displaystyle\frac{1-\cos^{2p+1}t}{t^2} = \frac{1-[1-(2p+1)t^2/2+o(t^2)]}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{2p+1}{2}$ donc $\boxed{t\mapsto\dfrac{1-\cos^{2p+1}t}{t^2}\text{ est intégrable sur }\mathbb{R}^{+*}}$

On effectue une IPP avec $u: t\mapsto\dfrac{-1}{t}$ et $v: t\mapsto 1-\cos^{2p+1}t$: u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\lim\limits_0 uv = 0$ (même DL) et $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos^{2p+1}t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1}{t}\times(2p+1)\sin(t)\cos^{2p}t\,\mathrm{d}t$ (et cette deuxième intégrale converge). On a donc bien $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos^{2p+1}t}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\cos^{2p}t\,\mathrm{d}t}$

12. On commence par poser $t=n\pi+u$: $u\mapsto n\pi+u$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement croissante de $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}-n\pi,\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right]$ et $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$ donc $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-n\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\frac{\sin t}{t}\cos^{2p}t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(-1)^n\sin u}{u+n\pi}((-1)^n\cos u)^{2p}\,\mathrm{d}u$ puis (Chasles), $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-n\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\frac{\sin t}{t}\cos^{2p}t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(-1)^n\sin u}{u+n\pi}\cos^{2p}u\,\mathrm{d}u + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0\frac{(-1)^n\sin u}{u+n\pi}\cos^{2p}u\,\mathrm{d}u$. On pose alors $v=-u$ (même type de justification) et on obtient $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-n\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\frac{\sin t}{t}\cos^{2p}t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(-1)^n\sin u}{u+n\pi}\cos^{2p}u\,\mathrm{d}u - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(-1)^n\sin v}{-v+n\pi}\cos^{2p}v\,\mathrm{d}v$ d'où le résultat final par linéarité de l'intégrale.

13. Par la relation de Chasles, on a $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\cos^{2p}t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(-1)^n t\sin t}{t^2-2^2\pi^2}\cos^{2p}t\,\mathrm{d}t$ (car l'intégrale de gauche est convergente) et il reste à intervertir la somme et l'intégrale : on pose $u_n(t) = \dfrac{2(-1)^n t\sin t}{t^2-n^2\pi^2}\cos^{2p}t$ et on a

H1 : les u_n sont continues sur le segment $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

H2 : $|u_n(t)| \overset{n\geqslant 1}{=} \dfrac{2t\sin t}{n^2\pi^2-t^2}\cos^{2p}t \leqslant \dfrac{\pi}{n^2\pi^2-\pi^2/4}$ donc $\|u_n\|_\infty \leqslant \dfrac{4}{\pi(4n^2-1)}$ et $\sum u_n$ CVN sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

On en déduit l'interversion demandée.

On peut aussi le faire par TITT avec (H4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|u_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\|u_n\|_\infty \leqslant \frac{2}{4n^2-1}$.

14. On rajoute $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\cos^{2p}t\,\mathrm{d}t$ et par Chasles (côté gauche) et linéarité de l'intégrale (côté droit), on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\cos^{2p}t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin t}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t\sin t}{t^2-n^2\pi^2}\right]\cos^{2p}t\,\mathrm{d}t$ donc (**II.10**), $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\cos^{2p}t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p}t\,\mathrm{d}t}$

15. (*Calcul des intégrales de Wallis*) Par la formule du binôme de Newton,

$$2^{2p}\cos^{2p}t = \sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}e^{i(2k-2p)t} = \sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}e^{i(2k-2p)t} + \binom{2p}{p} + \sum_{k=p+1}^{2p}\binom{2p}{k}e^{i(2k-2p)t}$$

$$\overset{h=2p-k}{=} \sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}e^{i(2k-2p)t} + \binom{2p}{p} + \sum_{h=0}^{p-1}\binom{2p}{2p-h}e^{i(2p-2h)t} \overset{\binom{2p}{2p-h}=\binom{2p}{h}}{=} \binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos[(2p-2k)t]$$

16. Comme, pour $k\in[\![0,p-1]\!]$, $2p-2k\neq 0$, on a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos[(2p-2k)t]\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin[(2p-2k)t]}{2p-2k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$, en intégrant sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2}$ et donc, avec **III.11** et **III.14**, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos^{2p+1}t}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\frac{\pi}{2^{2p+1}}\binom{2p}{p}}$