L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet comporte deux exercices et un problème indépendants. Il est conseillé de consacrer au moins 2 heures à la résolution du problème.

Exercice 1 : Étude de séries de pile ou de face

(Extrait de CCINP PC 2022)

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face avec la probabilité $1/2$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement « le k-ième lancer de la pièce donne pile » et par F_k l'évènement « le k-ième lancer de la pièce donne face ».

On appelle série une succession, non prolongeable, de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

Exemple 1 :
$$\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n}^\circ 1} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n}^\circ 2} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n}^\circ 3} \cap F_8 \cap \cdots .$$

Exemple 2 :
$$\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n}^\circ 1} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n}^\circ 2} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k \right)}_{\text{Série n}^\circ 3} .$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la suite d' événements $(L_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ par

— $L_{1,0}$: « la série n° 1 ne se termine pas » (ce n'arrive que si on n'obtient que des piles ou que des faces) ;
— pour $k \in \mathbb{N}^*$, $L_{1,k}$ désigne « la série n° 1 est de longueur k ».

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_{1,2}$ est réalisé tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors $L_{1,3}$ est réalisé.

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimer l'évènement $L_{1,k}$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in [\![1, k+1]\!]$.
2. Montrer que $P(L_{1,k}) = 2^{-k}$.
3. En déduire la valeur de $P(L_{1,0})$.

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note $N_{n,k}$ l'événement « le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers est k ». Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors les événements suivants sont réalisés :

$$N_{1,1},\ N_{2,1},\ N_{3,2},\ N_{4,3},\ N_{5,3},\ N_{6,3},\ N_{7,3} \text{ et } N_{8,4}.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **Généralités**

   a) Déterminer les probabilités de $N_{1,k}$ et $N_{2,k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

   b) Que vaut $P(N_{n,k})$ si $k \geqslant n+1$?

2. **Relation de récurrence** $P(N_{n,k})$

   Dans cette sous-partie, on détermine une relation entre $P(N_{n+1,k})$ et des termes de la suite $(P(N_{n,h}))_{h\in\mathbb{N}^*}$.

   a) Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

   $$N_{n+1,k} \cap P_n \cap P_{n+1} = N_{n,k} \cap P_n \cap P_{n+1} ,$$

   puis en déduire que :

   $$P\left(N_{n+1,k} \cap P_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left(N_{n,k} \cap P_n\right) .$$

Dans la suite, on admet que l'on a, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, les relations :

$$P(N_{n+1,k} \cap F_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} P(N_{n,k} \cap F_n) \quad , \quad P(N_{n+1,k} \cap P_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} P(N_{n,k-1} \cap P_n) \quad ,$$

$$\text{et } P(N_{n+1,k} \cap F_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} P(N_{n,k-1} \cap F_n) \, .$$

b) En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ la relation :

$$P(N_{n+1,k}) = \frac{1}{2} P(N_{n,k}) + \frac{1}{2} P(N_{n,k-1}) \, .$$

3. Probabilité de $N_{n,k}$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^{m} P(N_{m,k}) x^k \, .$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que $\forall x \in \mathbb{R},\ G_1(x) = x$.

a) Déduire de **II.2.b** que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x) \, .$$

b) Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Déterminer la probabilité de $N_{n,k}$, à partir de l'expression de G_n.

Fin de l'exercice 1

Exercice 2 : Matrices de Gram

(Extrait de E3A PC 2016 maths A)

Soit E un espace euclidien tel que $\dim(E) \geqslant 2$. Le produit scalaire sur E est noté $< \, , \, >$ et la norme associée $\| \; \|$.
Soit n un entier naturel non nul. Pour toute famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E, on note $G(u_1, \dots, u_n)$ la matrice (n, n) dont le (i, j)-ème coefficient est $< u_i, u_j >$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.
Soit M une matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbb{R}$, dont le (i, j)-ème coefficient est noté $m_{i,j}$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.
Si $p \in \mathbb{N}^*$, $M^{\otimes p}$ désigne la matrice (n, n) dont le (i, j)-ème coefficient est $m_{i,j}^p$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.
On dit que la matrice M vérifie la propriété `G` s'il existe des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dans E tels que :

$$M = G(u_1, \dots, u_n).$$

Partie I - Question de cours

Rappeler, sans démonstration, l'inégalité de Cauchy-Schwarz (avec le cas d'égalité)

Partie II - Le cas $n = 2$

Dans cette partie, on suppose $n = 2$. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice $(2, 2)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que la matrice B vérifie la propriété `G`. Soit (u_1, u_2) dans E^2 tels que $B = G(u_1, u_2)$. Justifier que $a \geqslant 0$, $b = c$, $d \geqslant 0$ et $\det(B) \geqslant 0$.

2. Réciproquement, on suppose que $a \geqslant 0$, $b = c$, $d \geqslant 0$ et $\det(B) \geqslant 0$. Justifier que B vérifie la propriété `G`.
Indications : en considérant (e_1, e_2) une famille orthonormale de E, on pourra construire une famille de vecteurs (u_1, u_2) telles que $B = G(u_1, u_2)$ en choisissant u_1 sous la forme xe_1 et u_2 sous la forme $ye_1 + ze_2$ pour des nombres réels x, y, z qu'on précisera. On pourra commencer par étudier le cas $a > 0$.

3. Justifier que la matrice B vérifie la propriété `G` si et seulement si, pour tout entier p dans $\mathbb{N}^*$, $B^{\otimes p}$ vérifie la propriété `G`.

Partie III - Le cas $n = 3$

Dans cette partie, on suppose $n = 3$ et $\dim(E) \geqslant 3$. Soient a, b deux nombres réels. On pose : $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$.

1. On suppose que la matrice C vérifie la propriété `G`. Soient u_1, u_2, u_3 des vecteurs de E tels que $C = G(u_1, u_2, u_3)$.

a) Démontrer que $a \geqslant 1$ et $a \geqslant b^2$.

b) Justifier que la famille (u_1, u_3) est orthonormale.

c) Déterminer le vecteur v_2, projeté orthogonal du vecteur u_2 sur le plan engendré par les vecteurs u_1 et u_3.

d) En déduire que $a \geqslant b^2 + 1$.

e) Démontrer que les vecteurs u_1, u_2, u_3 sont linéairement indépendants si et seulement si $a > b^2 + 1$.

2. On suppose $a \geqslant b^2 + 1$. Soit (e_1, e_2, e_3) une famille orthonormée de E.

a) Déterminer l'ensemble des vecteurs $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tels que $< u, e_1 >= 1$ et $< u, e_3 >= b$.

b) Justifier que la matrice C vérifie la propriété $\mathtt{G}$.

c) Est-il vrai que, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, la matrice $C^{\otimes p}$ vérifie la propriété $\mathtt{G}$? On argumentera précisément la réponse.

Fin de l'exercice 2

Problème : intégrale de Dirichlet généralisée

(Extrait de Mines-Ponts MP MPI 2024 maths 1)

Le but de ce sujet est de calculer, pour u entier $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0, 1[$ fixé.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \,]-\pi, \pi[$, la fonction f définie par

$$f : \begin{cases}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} \end{cases}$$

est définie et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$r : \begin{cases}]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} \, \mathrm{d}t \end{cases}$$

2. Montrer que la fonction r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$ et que :

$$\forall \theta \in \,]-\pi, \pi[\,, \quad r'(\theta) = -ie^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2} \, \mathrm{d}t$$

Indication : soit $\beta \in \,]0, \pi[$, montrer que pour $\theta \in [-\beta, \beta]$ et $t \in [0, +\infty[$, $\left|1 + te^{i\theta}\right|^2 \geqslant 1 + 2t\cos(\beta) + t^2$.

Soit g la fonction définie par

$$g : \begin{cases}]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{ix\theta} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} \, \mathrm{d}t \end{cases}$$

3. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$ et que pour tout $\theta \in \,]-\pi, \pi[$,

$$g'(\theta) = ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} h'(t) \, \mathrm{d}t,$$

où h est la fonction définie par

$$h : \begin{cases}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^x}{1 + te^{i\theta}} \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{t \to 0^+} h(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t)$ et en déduire que la fonction g est constante sur $]-\pi, \pi[$.

4. Montrer que pour tout $\theta \in \,]0, \pi[$, on a les égalités suivantes :

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2i}\left(g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}\right) = \sin(\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2 + 2t\cos(\theta) + 1} \, \mathrm{d}t$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le réel θ_n par $\theta_n = \dfrac{\pi}{2} + \arctan(n)$. Montrer les deux égalités suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(\theta_n)\sin(x\theta_n) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{\sqrt{1+n^2(1+t^2)-2nt}}\,\mathrm{d}t = \int_{-n}^{+\infty} \left(\frac{u+n}{\sqrt{1+n^2}}\right)^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

On rappelle les formules $\sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ *et* $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

6. En déduire, en utilisant le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{n\to+\infty} g(\theta_n)\sin(x\theta_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

Indication : on pourra commencer par vérifier que $\left|\dfrac{u+n}{\sqrt{1+n^2}}\right| \leqslant 1+|u|$.

7. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0,1[$ fixé.

8. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \int_0^1 \frac{t^x - t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

9. En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2}.$$

10. En déduire enfin que :

$$\forall y \in]0,\pi[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y\sin(y)}{y^2 - n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}.$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

11. Montrer, pour $p \in \mathbb{N}$, que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t.$$

13. En déduire que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t.$$

14. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas $p=0$, cette intégrale est communément appelée « Intégrale de Dirichlet ».

15. Montrer que $(\cos(t))^{2p} = \dfrac{1}{2^{2p}}\left(\dbinom{2p}{p} + 2\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\dbinom{2p}{k}\cos(2(p-k)t)\right)$.

Indication : On pourra développer $\left(\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2p}$.

16. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi.(2p+1)!}{2^{2p+1}.(p!)^2}.$$